JINDAI SHUXUESHI

近代数学史

胡作玄 著

1234567890

山东教育出版社

JINDAI SHUXUESHI

近代数学史

胡作玄　著

1234567890



ISBN 7-5328-3427-1
9 787532 834273 >
ISBN 7-5328-3427-1
定价：35.00元

JINDAI
SHUXUESHI

近代数学史

胡作玄　著

山东教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

近代数学史/胡作玄著．—济南：山东教育出版社，2001

ISBN 7－5328－3427－1

Ⅰ．近…　Ⅱ．胡…　Ⅲ．数学史—近代　Ⅳ．O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 051543 号

近代数学史

胡作玄　著

出 版 者：山东教育出版社

（济南市纬一路 321 号　邮编：250001）

电　　话：(0531)82092663　传真：(0531)82092661

网　　址：http://www.sjs.com.cn

发 行 者：山东教育出版社

印　　刷：山东新华印刷厂潍坊厂

版　　次：2006 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

印　　数：1—2000

规　　格：850mm×1168mm　32 开本

印　　张：24.125 印张

字　　数：528 千字

书　　号：ISBN 7－5328－3427－1

定　　价：35.00 元

（如印装质量有问题，请与印刷厂联系调换）

序　言

这是一本关于近代数学史的专著.在我国,这类书似乎不少,那么,这本书有什么独特的价值呢? 自 1970 年以来,无论是数学,还是数学史,都有了巨大的进步.本书的主要目标,就是把这些研究成果加进去.这些新成果大体分为两部分:一部分是理论框架的变动,一部分是技术细节的更正.这些理论框架大都是作者本人的观点.首先是对数学本身结构的讨论,特别是学科的主要问题及主要方向.其次是从学科演化的角度考虑问题,即探讨近代数学是如何演化成为现代数学体系的.再者,对于许多数学史上的民间传说(folklore),实际上仔细研究的结果并非如此.例如,一般认为,伽罗华以后,代数仿佛一下子由方程论变成群论;19 世纪数学分析的严格化是一条主线,甚至"19 世纪是函数论的世纪",等等.更有甚者,许多著作在时间上留下大片间断(如 18 世纪上半叶),在学科上留下大片空白(如多元函数的偏微分),在各领域的相互关系方面没有任何涉及,在各科比例上留下大量歪曲形象.许多在 19 世纪备受重视且对 20 世纪数学发展有直接影响的学科,根本没有什么介绍,如椭圆积分、椭圆函数、阿贝尔积分、阿贝尔函数、代数几何学,特别是双有理几何学、不变式论、李群理论等等.而挂在许多人嘴上的伽罗华理论、埃尔兰根纲领、不变式论,一写在书上无非是些空泛的语言,一

到真正的技术细节不是一无所知，就是错误连篇．当然，19世纪的数学已经很难，阿贝尔及伽罗华的数学研究对于现代大学生来说，并非不费力气就能理解的．加上历史语言的差异，错误有时在所难免．例如，M·克利因在(Morris Kline，1908—1992)《古今数学思想》一书中也说“可解方程的群都是交换群”之类的话．当然，对于这部伟大的巨著，我们应该“不以一眚掩大德”．可是，对本书来说，我们希望给出正确的数学内容以及可靠的历史细节，真正能够使近代数学史科学化．

比起数学的技术来，数学史更偏重文化方面．没有一个数学大国是只重视技术而不重视文化的，没有一位大数学家是对整个数学一无所知、对数学的来龙去脉不了如指掌的．大数学家中的许多人，甚至同时是杰出的数学史家，例如F. Klein，H. Weyl，C.L. Siegel，A. N. Kolmogorov，B. L. van der Waerden，A. Weil，J. Dieudonné，I. Shafarevich，O. Zariski，一直到V. Arnold，Y. Manin等等．对于欧洲的法国、德国、意大利和英国来说，它们的文化传统也许比技术传统对造就它们成为数学大国更为重要．原苏联虽然解体了，但俄罗斯数学家在世界上仍是第一流的，俄罗斯仍是头等的数学大国，这与他们一贯重视数学文化恐怕不无关系．对于正在走向数学大国的中国，数学史研究恐怕并非多余．

古代中国数学史经过李俨、钱宝琮、严敦杰诸先生的开拓以及吴文俊先生的推陈出新，已经呈现出人才辈出、硕果累累的景象．而对于西方乃至世界数学史的研究则相形见绌．世界数学史的研究有资料的限制、语言的困难和文化背景的差异，特别地，近现代数学史的研究更要求研究者具备数学的功底、科学的知识以及哲学的头脑，没有一定的训练恐怕难有什么成就．如果再加上社会上的反智传统，科学界对于历史的无知及蔑视，那么其

后果就只能是呈现出一种文化沙漠的景象.

数千年的世界数学史至今已有很多积累,但对于17世纪以前的数学史,仍不断有所发现,其历史成分远大于数学成分,可以说是文化史的一部分.17—18世纪的数学史可以说已相当定型而成熟,许多结果实际上是到20世纪70—80年代才取得的.因此,近代数学史研究的重点是19世纪,世界近代数学史界的主要研究也集中在19世纪,特别是19世纪末.现代数学史研究现在可以说方兴未艾,但是,与现代物理学史、生物学史的丰富成果相比,差距甚大.之所以这样,是因为数学本身就很难,再加上过细的专业化,数学史研究所要求的综观全局的能力往往很难达到.在人类跨入21世纪之时,数学史的研究也将会有很大起色.正因为如此,本书试图做引玉之砖,为现代数学史的研究做一点铺垫.

本书的完成源于作者十多年的辛勤工作以及更长时期的资料积累,当然更应该感谢许多数学家及数学史家对我各方面的帮助.首先衷心感谢我的恩师吴文俊先生长期以来对我的支持与鼓励,尤其是吴文俊先生使我处于国内条件比较优越的环境之中,而没有这种条件,我对近现代数学史的研究将难以为继.我还特别感谢德国汉堡大学C.J.Scriba教授以及德国马克斯·普朗克学会,在他们的支持下,我才能够在1985—1987年两年多的时间里,在汉堡大学数学系自然科学、数学及技术史研究所任访问教授并进行研究工作.在此期间,我接触到大量国内难以见到的资料以及各种档案材料,这对于我后来的工作及本书的写作都有着不可估量的价值.其间,我还曾去过格廷根及其他各地,受到了很好的接待,这对我的工作大有裨益.我深切怀念挪威奥斯陆大学已故的Aubert教授,感谢他及克里斯蒂安森学院

Beegen 教授邀请我访问挪威，并报告“希尔伯特问题”及“伽罗华以后的代数方程论”.本书的有关章节，实际上是该报告内容的扩展.国外许多数学家及数学史家也给我寄来极为珍贵的参考资料，他们的大名将列入序后的致谢栏，谨向他们致以衷心的感谢.

在本书即将出版之际，首先感谢山东教育出版社孙永大社长的大力支持，特别要感谢本书责任编辑李俊亭，他的耐心细致的工作使本书增色不少.我还要感谢江苏教育出版社喻伟编审，他对推动本书的写作也给予了热情支持.

本书在写作过程中，得到了国家自然科学基金会、中国科学院政策局的支持，谨此致谢.

胡作玄

2005 年 10 月

致　　谢

（按姓氏字母顺序为序，敬称略）

Kirsti Andersen

David H. Arnold

Otto B. Bekken

John L. Berggren

B. C. Berndt

Lipman Bers

Henk J. M. Bos

Umberto Bottazzini

Herbert Breger

Claude Brezinski

Paul L. Butzer

J. W. S. Cassels

S. D. Chatterji

Roger L. Cooke

A. J. Crilly

Joseph W. Dauben

Jean Dieudonné

Pierre Dugac

Harold M. Edwards

Steven B. Engelsman

Walter Feit

Craig G. Fraser

Günther Frei

S. Gelbart

Christian Gilain

Helene Gispert

Enrico Giusti

Lvor Grattan-Guinness

Jeremy J. Gray

Thomas W. Hawkins Jr.

Heinekamp

H-J. Hess

S. Hildebrandt

G. Israel

Jean-Pierre Kahane

Victor J. Katz

Steven L. Kleiman

Andreas Kleinert

J. P. S. Kung

Jesper Lützen

Saunders Maclane

Barry Mazur

Gregory H. Moore

E. Neuenschwander

Olaf Neumann

Karen H. Parshall

Esther R. Phillips

Jean-Paul Pier

Helena Pycior

R. A. Rankin

Karin Reich

Paulo Ribenboim

Peter Roquette

Winfried Scharlau

J. Schoenbeck

Christoph J. Scriba

W. Strobl

C. Truesdell

A. Vogt

目　录

导　言

1　数　学

1.1　数学是什么

数学是一门研究纯粹形式的科学,它不是一门自然科学,它不以自然为对象,也不以理解世界和控制及改造世界为其最终目标.尽管数学对象最终可追溯到现实世界,但它们是理性思维的产物,属于波普尔(Karl Raimund Popper,1902—1994)的第三世界.数学中最原始的对象自然数已经是相当抽象的概念了,它不仅要从一个苹果、一间房子、一堆沙土等事物中抽象出"1"来,而且还要由 1 得出一般数的概念.有了自然数的概念,还会遇到基数和序数的矛盾.至于记数法和位值制,更是人类文明的伟大创造,这从欧几里得(Euclid)的《几何原本》(约前 295)和阿基米德(Archimedes,约前 287—前 212)的古希腊数学尚不知道位值制就可以看出来.显然,中国的这种伟大创造决不是对自然界的认识或对哲学的思辨的产物,它真正体现了数学的成就.数学的另一个原始对象是形,它更为直观,甚至长期以来有人也把它当成自然科学的研究对象,尽管柏拉图(Planto,前 427—前 347)早就说过,三角形属于理念的世界.当然,现在的数学空间远远超出现实空间,数学中的"形"也不限于我们的感官所能看得见、摸得

着的东西,特别是更抽象的概念,如无穷、集合、群、拓扑等等,更是任何其他学科都不研究的对象了.数学研究的对象正如波普尔所说,具有客观性,即可理解性,但它不是经验科学,除非把经验扩张到包括"心智经验".

数学作为一门纯粹形式的科学,应该归入更广泛的符号或形式科学类.这一类似乎应该介于哲学类与具体科学之间,如自然科学与社会科学.它的姐妹学科包括一般符号学、语言学、逻辑学、方法学以及还未成形的一般系统学.有意思的是,有些数学家也认为"数学是一种语言"、"数学可还原为逻辑"、"数学是一种普遍方法"等等,这些说法尽管有些偏颇,毕竟触到了数学与自然科学的本质差别以及数学与符号科学的亲缘关系.

1.1.1 数学是一种普遍语言

这种观点可以追溯到大数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716).他第一个提出科学与哲学的两大目标,其中第一个目标就是找出一种普遍文字(characteristica universalis),首先是一种由符号及变元表示的符号语言.正如伟大的物理学家吉布斯(Josiah Willard Gibbs,1839—1903)所说的,"数学是一种语言".吉布斯不仅是19世纪最伟大的统计热力学大师之一,而且还是向量分析的开创者及传播者.19世纪90年代在英国著名的杂志《自然》(*Nature*)上掀起的一场大辩论中,向量最终取代四元数而成为物理学上普遍使用的概念.在19世纪和20世纪之交,向量分析成为数学物理学的有效工具,更确切地说,成为描述各种现象的语言.

数学概念的产生及其符号化,反映了数学的进步.算术运算

的符号化及其向符号代数过渡,几何的代数化,微分、积分运算的符号化,函数的符号化及行列式、矩阵、向量、张量等的概念化及符号化,以及复数的表示、算子演算、符号逻辑等,都是数学的重要进展.在这个意义下,数学对象是一个符号集合.单纯的符号集合,正如裸的集合一样,没有结构,没有什么可说的,也没有什么意思;而只有当它具有形式结构(语法学),有一定的解释(模型—语义学),有一定的变换、生成、操作、运用方式(语用学)时,它才能变得丰富多彩起来.

数学作为一种普遍语言，有自己的特点，比起纯逻辑语言来有内涵的丰富性，比起通常语言来有外延的确定性. 数学不单纯是一种语言，它还是一种精密语言，正因为如此，它常被称为精密科学. 数学之所以精密，不单是因为其数量表示，还在于其越来越深入那些以前所无法表示的或非实在的概念，如瞬时速度、加速度、位势、熵、谱等. 对于许多直观概念，也只有在数学上才能得到很好的处理，如连续性、对称性、随机性，乃至信息、控制、策略、对策、决策等. 数学还明确了一些对立的范畴，如有穷与无穷、连续与离散、局部与整体、确定与偶然等；还有重要的元概念，如结构、构造、存在、模型、等价等. 这些语言越来越深入到科学乃至日常生活之中，使论述确切而精密. 对于许多常用的概念，也只有当它们在数学上得到澄清后，才算对其有了深刻的认识.

1.1.2 数学是一种普遍方法

从古到今,在对许多问题求出解答的过程中,人们或多或少产生了一种方法的意识,而这种方法概念,又以数学中的算法概念为摹本.虽然直到 20 世纪 30 年代才对精确的算法概念给出

确切的定义,但模糊的概念很早就有,而且也是数学追寻的主要目标之一.中国的数值运算及方程求解,欧几里得的辗转相除法以及印度、阿拉伯的一些算法,都使人认识到:算法是一种有限的指令,可以机械地运行,从而对一类问题得出确定的解答.许多几何作图问题以及求积问题,也要求发现广义的"算法"来求解.在这种经验的基础上,寻求普遍的方法是哲学家热心研究的问题.亚里士多德(Aristotle,前384—前322)就热衷于构造"发明术"(ars inveniendi),旨在为任何科学问题提供一个解答.西班牙经院哲学家吕力(Ramón Lull,1235—1315)在他的《大法》(*Ars Magna*)中也设想一种组合步骤,试图发现所有"真理".他的思想对于其后的代数发展有着重要影响,最主要的是有意识地建立起算法观念,并试图用机械化步骤来实现它.当然,这只是在数学领域中起到了统一思想方法的作用,把它推向普遍方法论高度的是笛卡尔(René Descartes,1596—1650),而在笛卡尔之前的布鲁诺(Giordano Bruno,1548—1600)的认识论和笛卡尔之后的帕斯卡(Blaise Pascal,1623—1662)的机械化思想及归纳法中,也有或多或少类似的想法.

笛卡尔十分明确地考虑了构造出普遍方法来解决科学问题,特别是数学问题,对此他称之为普遍数学.正是这种对方法的普遍考虑,使他首创用代数方法来研究几何问题,从而创立了解析几何学.中国数学家吴文俊(1919—)依据波伊亚(George Polya,1887—1985)的想法,把笛卡尔的方案总结如下:

任意问题

$\xrightarrow{①}$数学问题

$\xrightarrow{②}$代数问题

$$\xrightarrow{③}\text{解方程组}\begin{cases}P_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ P_n(x_1,\cdots,x_n)=0.\end{cases}$$

$$\xrightarrow{④}\text{解方程 } P(x)=0$$

其中,第③、④步无非是数学,第②步并没有一般方法,第①步则困难更大.

莱布尼茨也把找出能求解任何数学问题的普遍算法列为他的第二大目标.笛卡尔在几何方面实现了这个目标,而莱布尼茨则在逻辑上制定了一个方案.首先,所有的科学语句均可用确切的符号语言来表述,这样就形成了一个"逻辑的代数",它可以应用于各种类型的思想,并通过普遍算法,由原始的假定推出所有的逻辑结论.他梦想创造一种一般方法,只通过形式的计算就可以推出所有理性的真理.这就是他的"组合术"(arte combinatoria)的实质.这种思想直到19世纪中叶才陆续在逻辑领域中实现.它还不能被推广到大部分数学,更难以被推广到一般科学.但是,在数学发展过程中,人们创立了一些新的思想方法和思想原则来克服这些困难.这些思想方法和思想原则不仅使数学的领域得到扩大,也使其应用顺理成章,从而真正把数学变成普遍方法学,而不仅仅限于自然科学的工具.

具体来讲,数学题材具有其自由性,因此,它总是不断地跨越已有的领域,深入到未知的世界中去.17—18世纪,无穷及无穷小进入数学,把代数运算规则向无穷领域推广,这就导致了数学分析的形成.19世纪,这种构成方法上的大飞跃,使实分析向复分析过渡,再次显示出分析方法的威力.正如阿达马(Jacques Hadamard,1865—1963)所说的,"实域的两个真理之间的最短途

径是通过复域”.积分法、代数函数论、解析数论要是没有复分析,将是多么贫乏啊!如果数学方法只是停留在数学领域,那么也就显示不出数学的普遍方法学意义.正是复分析在流体力学及量子力学中不可或缺的作用,无可争辩地论证了数学的普适性.

1.1.3 数学是一种普遍思想原则

数学在发展过程中不断一般化、不断抽象化,从而形成了自身的普遍思想原则.对称性原则、不变性原则、守恒律三者统一,是E·诺特(Emmy Noether,1882—1935)于1918年首先提出的.而群论方法在量子力学、原子—分子结构、核结构、基本粒子理论中的适用性,也是大数学家外尔(Hermann Weyl,1885—1955)首先提出的.群论方法至今仍被广泛应用于科学的各个方面,而不仅仅局限于上述领域及固体物理.

数学的另一个重要原则是极值原则或变分原理,最早除了哲学的思辨之外,首先提出的是数学家费尔马(Pierre Fermat,1601—1665).这个原则也是其后许多物理理论的基础,如哈密尔顿(William Rowan Hamilton,1805—1865)原理.

1.1.4 数学是一种思想工具、理性思维框架

在20世纪之前,科学的支柱主要是理论和实验(包括观察和测量),数学和计算包括在理论当中.实际上,17世纪科学革命之所以推动近代科学的产生,完全依赖于理性与经验的结合.它们的哲学根源是笛卡尔的唯理主义和培根的经验主义,笛卡尔和培根也是近代哲学之父.确切来讲,笛卡尔把认识论置于本体论之上,把哲学从神学的奴仆地位解放出来,成功地实现了思

想的解放，直接推动了近代科学的产生．其中，理论概念、数学工具和观察实验三者的结合，是牛顿（Isaac Newton，1642—1727）科学革命的催生婆．牛顿成就其伟业不仅在于他提出了正确的理论概念（特别是力），而且还在于他提供了数学工具（微积分）及分析框架，尽管当时使用的还是欧几里得的几何系统．对于其后科学的重大进步来说，理论概念及数学表述和计算的结合仍是不可缺少的一环，尽管可能不像牛顿那样能够一人同时完成二任！傅立叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768—1830）发展了热传导理论，提出了傅立叶级数，对数学及物理学都产生了深远的影响，但他的理论开始是建基于错误的热质论基础上的．麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831—1879）的电磁理论在列方程及其求解上有了重大的突破，但一些理论概念（如以太）上的混乱以及数学表述都是由后人逐步澄清的．进入 20 世纪，数学越来越走在科学的前面，甚至事先为物理理论提供数学工具，如张量分析对广义相对论，矩阵论对海森伯（Werner Heisenberg，1901—1976）的矩阵力学等，都是如此．

第二次世界大战以后，计算机的发展与计算技术的进步，使得科学计算、理论和实验三者并列为科学的三大支柱．近年来，由于数学的发展，从数学出发的理论越来越多地成为科学理论取得突破的始作俑者．这特别表现在 1974 年将纤维丛理论作为规范场理论的标准表述．其后越来越多的前沿数学领域进入物理学及其他科学领域，形成了新兴的理论框架．实际上，数学已成为科学发展的第四根支柱．

对于生命科学、心理科学、社会科学来说，这种现象早已不是新事物．数理经济学以及对策论就是这方面的最典型的例子．

1.2 数学的分科及其主要问题

数学不是自然科学或社会科学,它的对象及研究目标不像这些学科那样明确和集中.从古到今,数学中所包含的对象、学科及分支变化多端.在中世纪,除了算术和几何之外,天文及乐理也是数学的分支.到17世纪,木工、石工、建筑、火器、占星术等等都是数学的内容;从那时起,静力学、水力学、光学、地图绘制法等等,仍然被看成大数学的一部分,尽管它们早已成为独立学科.数学内容的庞杂也可以说是数学的一大特征.

除此之外,许多基础的数学学科,它们的内容也发生了很大的改变,甚至面目全非了.经典代数学主要研究代数方程的求解,而经过几次变化,现代代数学主要研究代数结构.这样一来,数学的统一尽管多次被提起,但是总难以概括全部数学.因此,时至今日,数学仍然是既具有多样性对象也具有多种目标的学科,尽管它们之间有着千丝万缕的联系.

我们把数学划分为如下相互关联的六大范畴,其中前三个可以说是数学的技术方面,后三个可以说是数学的理论方面.下面分别对其中的对象、学科、研究目标等稍加分析.

1.2.1 操作技术

大部分最早的数学问题属于解决“如何”(how)的技术问题,它们大都来源于实践.最初的问题包括计数、计算、测量、作图等方面.后来逐步形成特殊的或一般的数学问题.在解决这些问题的过程中,形成了算法以及操作步骤的概念.在计算过程中,形成了算术,特别是解数值代数方程的算法.到近代,这推动了符号代数学、求解代数方程的技术以及把这些技术推广到无穷算

法、代替综合方法的代数方法的发展,从而形成了无穷小演算及解析几何学.其后,各个数学分支也提出了相应的算法问题,例如拓扑学中计算同调群、同伦群等.从这个意义上讲,数学在本来意义上是一种计算技术,或更广一点讲,是操作技术.而研究这种技术的目标就是发明算法或解题的步骤,以求得问题的解决.应该说,这是一种富有创造性的研究工作.以计算为例,由精确计算到近似解析计算到数值计算到计算机软件,一直是数学研究的重要内容.除计算之外,还有测量、绘图、统计、运筹等操作以及相应的或衍生的各种问题,例如古典几何中的许多几何作图问题,特别是用圆规、直尺作图的几何三大问题,以及更一般的作图方法.为了解决这些问题,还要发明许多技术,如各种投影技术等,它们至少在过去都属于大数学.在数学分析的范围内,级数求和、渐近展开、积分变换等都是高级的计算技术.

1.2.2　技术理论

数学一开始虽是一门技术,但对其操作对象,多少也应该有些认识.实际上,在操作过程中,对于其对象有哲学上的了解,例如什么是数,什么是形等等,不过,这些认识多停留在描述阶段,而不是对象理论阶段.在长期的操作实践之后,对于技术本身也有许多新问题,其中包括表示问题、操作规则与规律问题、可计算性问题,如无穷级数收敛与发散问题、收敛速度问题、方程可解性问题、逼近的程度及可能性问题、作图的可能性问题,特别是方法的评价问题等等.这些问题单靠试错法是不能完全解决的,而需要诉诸理论,这样就形成了与操作技术有关但又高一层次的学科,如数值分析、误差理论、函数逼近论、丢番图(Diophantus)逼近理论、可解性与稳定性理论等等.

1.2.3 操作对象理论

这里的操作对象理论与后面的对象理论有所不同,它不是指数论、函数论,而是指方程论.它的目标不是指向对象本身,而是指向技术,指向求解的方法,例如丢番图方程论、代数方程论、代数方程组理论、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论等.它们所涉及的不是单个方程,而是一类对象,因此,其首要问题是分类问题,然后再对每一类对象研究解的数目、解的性质、根与系数的关系、某类解的存在性问题等等.微分方程定性理论也属于这一范畴.

以上三大范畴是解决"如何"的技术问题,而以下三大范畴是解决"什么"的理论问题.

1.2.4 对象理论

由于数学的对象是思想对象而不是实物对象,因此,对象的本质问题属于数学哲学的范畴.既然要谈对象理论,一定要对对象说点什么.一谈起数学的对象,自然就是数、量与形,这些乍一看非常具体、非常直观的对象,在经历几百年、几千年的发展之后,却越来越不清楚了.在19世纪末,人们就提出了"数是什么"、"数应该是什么"、"曲线是什么"之类的基本问题.数学家对这些问题没有一个统一的看法.因此,我们把数学的对象理论分为两个层次,即学说和理论.

(1)学说(Lehre).这个层次带有哲学味道,历史上许多基本概念,如数、量、函数、集合、空间、曲线等等,都经历了长期的讨论.但是,还不能说完全达成一致意见.许多数学家不把学说看

成数学而把它看成哲学,例如外尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass,1815—1897)的函数论用的就是函数学说之词,这遭到了克洛耐克(Leopold Kronecker,1823—1891)等人的反对.另外,一些人不喜欢诸如处处不可微的连续函数之类的病态函数.因此,他们对同一个词实际上是有着不同的理解的.集合一开始更是被看成哲学,直到1904年以后才正式变成数学的理论.

(2)理论(Theorie).理论是对有确切定义的对象的性质、关系、刻画、分类等的研究.这属于数学的范畴.不过,在历史发展过程中,对象本身也在不断地演化.

典型的数学理论有数论、函数论、算子论以及各种几何对象理论、过程理论等等.以数论为例,重要的分支按对象分有整数论、代数数论、超越数论等;按方法分有初等数论、解析数论、概率数论等;按问题的性质分有型的算术理论、几何数论等,也包括占数论一大块的丢番图方程理论.这些很难统一在一起.因此,有着很长历史的对象理论,反而没有一个漂亮的理论体系.对于整数论,问题可以稍加集中.以正整数为例,主要有表示问题、刻画问题等,如:

①加法表示问题:华林(Edward Waring,1736—1798)问题、哥德巴赫(Christian Goldbach,1690—1764)问题等,形成加法数论.

②乘法表示问题:惟一因子分解定理成立,由此形成了素数问题(如素数的刻画问题、素数的计数问题等)和除数问题(如因子数目、算术函数等).

这些都属于解析数论范围.不过,正如魏伊(André Weil,1906—1998)所说的,解析数论并不是数论而是分析,因此解析数论是属于技术范畴的.事实也是如此.可是,代数数论恰恰更

多地涉及理论,并深入到结构理论中去.

函数论与算子论一开始也是表示问题,特别是无穷级数及无穷乘积表示,然后是积分表示等,其次涉及值分布等,也可以说是计数问题,另外还有刻画和分类问题.对于几何图形,则有许多性质与关系方面的问题,如度量性质以及相交、属于等关系,但也有刻画和分类问题.

1.2.5 结构理论

结构理论与对象理论之间并没有一条不可逾越的鸿沟.之所以这样划分,是因为结构理论必须建立在集合的基础之上,而一般的对象理论并不一定考虑所有对象的集合的性质,对象理论只考虑其中的每个元素或某类元素所具有的性质.在由对象理论到抽象结构理论之间,还可以分成三个层次,即隐形结构理论、具体结构理论和抽象结构理论.

(1)隐形结构理论.例如型论,一开始它是对象理论,如拉格朗日(Joseph Louis Lagrange,1736—1813)及高斯(Carl Friedrich Gauss,1777—1855)的二元二次型理论,其后从整体上,即从所有的型的集合出发,来考虑其刻画和分类问题.代数数论、代数不变式论一开始也是如此.

(2)具体结构理论.在研究前四个范畴的过程中,得出了具有某种特殊性质的对象的集合,从而进一步研究它们的结构,如置换群理论及变换群理论.

(3)抽象结构理论.从具体结构中摆脱掉具体对象的特征,特别是从公理出发来定义集合,我们得出抽象的结构.现代数学的大部分内容是处理这种集合及其上的结构的.

按照布尔巴基(Nicolas Bourbaki)学派的观点,原始的结构可

以划分为三大类,对它们各自的结构的研究形成了结构数学的主要分支.

①代数结构:主要是群、环、域,它们分别构成群论、环论及域论.

②序结构:主要是格,它构成格论.

③拓扑结构:主要是拓扑空间,它构成一般拓扑学的研究对象.

这些抽象的研究对象有两个来源:一个来源是从过去研究的具体对象中抽象化,特别是公理化而成的,如群、域以及拓扑空间;另一个来源是从已有的抽象结构中衍生出来的.

新结构的产生有如下几种途径:

①增减公理.以群为例,现在公认群是元素间存在二元运算(例如乘法)并满足下列四条公理的集合:

1°(封闭律) 集合中任意两个元素的乘积仍属于该集合.

2°(结合律) 乘法满足结合律,即

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

3°(么元律) 集合中存在么元 I,对集合中任意元素 a,满足

$$I\cdot a=a\cdot I=a.$$

4°(逆元律) 对集合中任一元素 a,存在惟一元素 a^{-1},使得

$$a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=I.$$

由以上四条公理,对群的概念可以有许多推广,办法有:

减少公理:如果一个集合只满足1°,被称为广群;只满足1°、2°两条,被称为半群;满足1°、2°、3°三条,被称为单式半群(monoid).

减弱公理:如果2°、3°、4°不一定满足,但满足2°′:对给定 b,c,存在惟一的 x 及 y,满足 $xb=c$ 及 $by=c$,则满足1°、2°′的集合

被称为拟群;如果拟群还满足 3°,则被称为圈.

反过来,增加公理或加强公理也可以得到一些更为特殊的具体的对象,如群加上交换律就得到阿贝尔(Niels Henrik Abel,1802—1829)群,它是数学中最常用的对象之一.另外,对群还可以加上一些限制,例如有限群、有限生成群等等.

格是一种偏序集,它的公理增减之后可得到全序集及偏序集.格经特殊化以后可以得到分配格,再特殊化以后可以得到布尔(George Boole,1815—1864)代数.

②复合结构.两种或多种结构可以复合而成更复杂的结构.每种结构都保持其独立性,但是它们之间通过映射、运算等关系联结在一起.复合结构最简单的例子是向量空间,其推广是模,它是环与交换群的复合结构,模可以说是同调代数学的主要研究对象.域上的环被称为代数,也属于这个范畴.

③多重结构.一个集合同时具有两种或两种以上的结构,这些结构之间有一定关系并且彼此相容,就被称为一种多重结构.多重结构的例子有很多,如偏序群、全序群、拓扑群、拓扑环、拓扑域、偏序拓扑空间、拓扑向量空间等等,其中包括泛函分析的主要研究对象希尔伯特(David Hilbert,1862—1943)空间及巴拿赫(Stefan Banach,1892—1945)空间.

④混合结构.混合结构是指由各种结构形成的复杂系统,特别是流形、复合形、纤维丛、绯索(faisceau,通常译为层,但与真正的层化空间(Stratification)易混,故不用)以及簇、层化空间等等.流形是现代数学最中心的研究对象,其特点是在流形上拓扑、几何及分析全面发展.流形是由局部一样的坐标块相互重叠拼接起来的,正如球面及环面都可看成是由一个一个小圆片拼接起来的.流形在局部上一样,但就其整体性质来说,由于拼接方法

及两个重叠的坐标块之间映射的不同而产生不同的对象及研究领域.例如:

连续(同胚)映射→拓扑流形:拓扑学;

分段线性映射→PL 流形:PL 拓扑学;

可微(微分、光滑)映射→微分流形:微分拓扑学、微分几何学;

实解析映射→实解析流形:实解析几何学;

双正则映射→复解析流形:复解析几何学;

双有理正则映射→代数簇:代数几何学.

流形中的下层结构都是建立在上层结构的基础上的,从这些层(它们之间还可以插入其他的层)中可以提出一系列问题,如一个拓扑流形上存在微分结构的条件是什么?如果存在,又有多少种不同的微分结构?给出一个微分流形,能不能找出一个代数簇与它同胚或微分同胚?

研究这些抽象对象的目的是搞清楚它们的结构,并加以分类.所谓结构,就是元素(或它们的集合)和元素之间的关系.对于抽象的集合,元素和元素之间除了它们有共同从属于该集合这种共性之外,彼此之间没有关系.一旦有了关系,结构也就产生了.

以有限群为例,结构数学的主要问题大致可分为相互关联的四类问题:

(1)刻画问题.结构数学的首要问题是对对象的刻画,指出两个有限群在什么情况下是一样的(同构);如果它们有差别,一定反映在一些不变量(在同构之下不变的量)的不同上.为此,必须找到一些新的不变量,并指出哪些不变量足以刻画该群.

(2)分类问题.对于所有有限群,需找出完全组的不变量,以

此对它们进行分类. 1981 年对于有限单群的分类工作已经完成.

(3)结构问题.研究结构的主要问题,大致有下列几个方面:

①子结构.群作为一个集合,它的某些子集合也是群,则称之为子群.子群中有一些特殊性质的,则称之为正规子群.

②原始结构.一个群如果没有非平凡的正规子群,则称之为单群.单群是构成群的原子,任何群都可以看成由单群(原子)构成的分子.

③商结构.一个群通过正规子群分解成陪集,这些陪集也构成群,则称之为商群.

④结构扩张.群可以通过一些办法扩张成更大的群.

⑤结构的同态及同构.

⑥自同构群.一个群到自身上的同构经过复合也是自同构的,所有自同构的集合也构成群.

(4)实现问题. 20 世纪数学中的结构,都是通过公理定义的抽象结构,为了更具体、更深入地理解,我们需要找出与它同构的特殊的群,这种造法常被称为表示.例如,有限群最常用的有线性表示,另外还有置换表示及图象表示等.

至此,我们考虑的多是简单结构.数学中还有许多更复杂的结构,最典型的是具有边界的流形,具有各种奇点的流形、簇、层化结构等等.对此,我们也有一些特殊问题,如奇点分类与解消问题以及层化问题.

对结构与结构之间关系的研究,导致了范畴与函子理论的产生,它也可以看成是一种元数学.

1.2.6 元理论

元数学是对数学本身进行反思的产物,长期属于哲学的范畴.20 世纪以来,数学基础问题受到重视,其后又有符号逻辑的产生,从而形成数理逻辑这个领域.对于算法的研究形成递归论;对于证明结构的研究形成证明论;对于集合论基础的研究形成公理集合论;对于结构的分类及实现形成模型论.到 20 世纪 70 年代,在计算机的影响下,出现了计算复杂性的新领域.元数学的结果中有相当一部分是否定的,即许多问题的不可解性,对此应进一步使问题特殊化,并划清可解与不可解的边界;对于可解问题,则求出解法.

传统数学学科可能横跨六大范畴,并按上述顺序自然发展,从而使每一学科的研究目标越来越明确,这有助于我们对数学进行全面的理解.

2 数学史

数学史研究是在数学的科学层面上加上时间的维度而进行的.数学的内容及范围随着时间的不同而不同,因此有言:“数学无非就是它的历史.”不过,数学家大都不这样看.他们所关心的大都是他们感兴趣的领域在无穷小时段上的历史,因此也就把整个领域、全部时段、各种情况的演化留给不到数学家的 1% 的数学史家.这样,数学家与数学史家有一个分工:他们在对象、方法、领域、时段以及讨论的问题等方面都有所不同.因此,我们有必要对数学史的一些根本问题稍加讨论.

2.1 数学的演化与进步

没人否认数学是不断进步的.谈到进步,在科学哲学中,特别是库恩(Thomas Kuhn,1922—1996)的历史学派,提出了范式以及不可通约性的观念,认为自然科学中有些理论很难说是进步的.他们还提出数学中没有"革命",这也引起许多争论.我们的观点是,数学不是自然科学,数学哲学不等于科学哲学.数学从总体上来讲是无边界的领域,从这种意义上说,数学是不断进步的.但是,数学是形式科学,并没有外在的实在基础,它的对象是多样的,对它的研究是多途径的,在这些方面,数学比经验科学存在着更多的主观性问题.由于数学哲学还十分幼稚,许多问题还有待深入探讨.

从现在实际存在的资料出发,我们认为,数学的发展主流是进步的,它主要表现在如下四个方面:

(1)问题的提出和解决.数学正如任何其他学科一样,都是从特殊问题开始的.最早的问题无疑大都来自于实际,如计数、作图、求长度、求面积、求容积、求体积、确定位置等,但很快就形成了概念以及理论问题.从数的表示及计算、几何作图问题到微积分,随着理论体系的建立,进一步形成了一系列不同层次、不同难度的问题.问题是数学的灵魂,一个数学分支的成熟程度也主要看它是否能提出系统的问题层系,而一步一步解决这些问题也就成为这个学科进步的自然判据.在解决这些问题的过程中,数学家创造出各种技巧、技术及方法,它们构成了数学进一步发展的工具,这是数学在技术上的进步.

(2)概念及理论体系的形成与深化.科学与前科学的显著不同之处在于它形成了理论体系,对数学也是如此.科学的理论体

系首先在于对象的形成、概念化以及基本原理的建立.在这个过程中,理性思维和哲学起着决定性的作用.由于“数学的本质在于它的自由性”,对象的选取则存在着主观任意性;如果选取得好,将对学科的发展有重要意义.例如,素数的引进就使数论与算术区别开来.在这方面,欧几里得的《几何原本》成为以后数学发展的典范.在数学上,有许多领域是由于数学家的伟大洞察力而形成和发展的,例如射影几何学、代数数论、类域论、黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann,1826—1866)曲面理论、理想理论、不变式论、置换群理论、微分方程定性理论、组合拓扑学、希尔伯特几何基础等.20世纪的泛函分析、广义函数论、调和积分论、流形的几何与拓扑等,也是如此.

(3)领域的扩张和新学科的建立.数学对象摆脱其有生以来的非本质因素而不断地抽象化,从而逐步形成新学科、新领域,这是数学不断进步的过程.例如,方程的置换→置换群→变换群→抽象群,这一过程并没有把代数由方程论简单地变成群论.实际上,所有这些理论都有自己的问题,并在不同程度上得到了发展.例如,伽罗华(Evariste Galois,1811—1832)理论的逆问题尚未完全解决,置换群理论的许多问题无法用抽象群论加以解决;而抽象群论又从有限群产生连续群,然后又出现离散群乃至更复杂的群;由群论又产生半群、伪群及各种各样的二元系理论.

几何学的分化反映了数学领域的大扩展,其中具有突破性意义的是非欧几何的出现.而广义的非欧几何还涉及高维几何、非阿基米德几何及复几何等等,这些推广还可以不断继续下去.

由于问题的多样性和理论体系的相互作用,数学领域的扩张及其多样化将是无止境的进步过程.

(4)不同领域相关性的发现和数学统一性的寻求.数学领域

最早被划分为数论和几何,欧几里得最早把它们统一在几何之下,这个传统一直到 17 世纪.此后代数—分析开始代替综合几何而成为数学的基础.解析几何和无穷小几何无非是代数和分析在几何上的应用.19 世纪末以群来统一数学取得很大成功,另外代数数论、代数函数论、代数几何学及代数不变式论导致交换代数的发展,这些都促进了抽象代数学的产生.同时,从分析和几何两条道路发展了拓扑学.拓扑学和代数学构成了 20 世纪数学的两翼,这导致布尔巴基学派用结构来统一数学.近 30 年来,尽管数学已分化成几十个、上百个分支,但是在它们之间,人们越来越多地发现了新的意想不到的关系.

2.2 数学史的分期

数学史研究要解决的问题首先是分期问题.当然,分期有一定的主观性、任意性.但是,其重要性是不言而喻的,而且它作为研究数学发展的基本框架,对研究数学史也有方法论的价值.

数学史的分期方法很多,主要有按社会政治史、按文化史、按科学史、按数学内容的发展史以及按世纪来划分.这些分法都有一定的优点,但也并不能反映数学发展的真正状况.

社会政治的主要事件与数学发展几乎没有什么关系.1492 年哥伦布发现新大陆、1588 年西班牙无敌舰队覆灭、1642 年英国革命、1688 年“光荣革命”、1789 年法国大革命、1848 年欧洲各国革命、1917 年俄国革命等,有的虽然影响到数学家个人,但一般并不影响数学的进程.另一方面,文化科学的发展也不完全与数学同步.19 世纪的英国就是典型的例子,虽然它的科学极为先进,但它的数学远不如德国和法国.

许多分期按照初等数学、高等数学来划分,实际上这些界限

并不清楚.作为初等数学的平面几何,在19世纪又有很大的复兴.数论和组合论的许多难题至今也难以解决.常量数学与变量数学的提法更是欠妥,因为变量与函数的概念在17世纪末才刚刚涉及,而较精确的函数概念直到18世纪中叶才被提出来.

按世纪来划分也有不尽如人意之处.错玉顿(Hieronymus Georg Zeuthen,1839—1920)把16世纪数学和17世纪数学放在一起,丢东涅(Jean Dieudonné,1906—1992)把18世纪数学和19世纪数学放在一起,虽然他的书中有许多章节的内容写到了20世纪60年代.更具体细分的还有霍夫曼(Joseph Ehrenfried Hofmann,1900—1973),他把从1637年到18世纪末作为一段;许多人还把解析几何学作为近代数学的开端,而把符号代数归入前期.本书作者不愿采用这些方法.丢东涅把代数学划分为1840年之前、1840—1920年以及1920年之后各一段,但对分析数学来说,这恐怕欠妥.

本书作者采用如下的分期:

(1)前史时期;

(2)古代及中世纪时期(从公元前4世纪到16世纪末);

(3)近代前期(17—18世纪);

(4)近代后期(19世纪);

(5)现代时期(20世纪).

下面对每一时期的特点稍加分析.

2.2.1 前史时期

前史时期的数学主要是民族数学或文化数学(ethnomathematics).在各种文化的发展过程中,各民族都或多或少地掌握了一些简单的数学技术,包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等,

基本上属于实用技术.这些知识是零散的,而且反映出较大的文化差异.另一方面,也出现了神秘的占星术、数秘术(numerology)、占卜术等伪科学,其中也有个别的涉及数学内容,如二进制等.各种建筑上的对称图案以及正多面体的列举,包含着群的观念的萌芽.

2.2.2 古代及中世纪时期

数学经过长时期的发展之后,正式成为一门学科,其主要标志是:

(1)建立数的表示及计算方法;

(2)对于一些问题有较系统的方法.

这使数学的技术部分初步形成.而欧几里得《几何原本》的问世,则使理论数学有了一个原型.由于各国数学的发展状况不同,古代数学的主要领域是算术和几何.古希腊具有初等的数论、量论以及一些基本的几何问题和数论问题.这些问题对以后的数学产生很大的影响,但不一定很重要.比较重要的数学是计算,特别是解方程.经过1000多年的发展,人们仍然只会解一次、二次方程,三次方程只有个别的会解,因此,16世纪求解三次、四次方程无疑是一个重要突破.但是,古希腊的几何方法与中国、印度的近似方法不是欧洲近代数学的发展主流.显然,精确解与精确算法的概念以及普遍代数方法把算术提高到一个新阶段.从历史上看,古希腊数学的几何理论大大优于数值计算,而中国、印度、阿拉伯的数学则偏重于计算及实际问题的解决.如果单纯的实用技术难以提高到理论,最终将影响到技术的提高,这也许是东方数学没能产生解析几何与微积分的原因.如果理论本身没有实际问题的支持,也必然流于玄虚.例如,西方中世纪关于

无穷的研究仅停留在神学—哲学阶段,没能产生有用的理论.但理论思维在科学上有其领先作用.由于求解几何作图三大问题,导致了圆锥曲线及其他曲线的产生,这为科学革命准备了数学语言及研究素材.

2.2.3　17—18世纪的数学

近代数学诞生的标志是符号化的普遍算法的建立以及无穷进入数学.这一下子使建立在几何和算术上的算法上了一个新台阶,不仅使数学的应用范围大大扩大,成为发展科学技术的有力工具,而且也向理论研究提出了一系列问题.这就导致了19世纪操作理论、操作对象理论、对象理论的产生.由此,数学进入了多样化和理论化的时代.

17世纪符号代数、解析几何学及微积分的建立,虽然大大扩大了数学技术的宝库,但是并没有改变数学主要是一门实用的计算及操作技术的状态.当时几乎没有专业的数学家,数学家大都是科学家,数学在他们看来主要是解决自然科学和其他技术(如制造光学仪器)问题的工具,而纯粹的数学,如数论,虽然也有一些进步,但在当时只不过是数学游戏或智力竞赛,业余数学家即使得到结果,也并不当做学术成果去发表.数学作为一门计算技术进步惊人,特别是微积分的完成,解决了许多天文学、力学及物理学的问题.微积分本身只不过是一种更有效的演算方法,即所谓无穷小演算(infinitesimal calculus).随后,常微分方程及数学物理方程的出现以及变分法的诞生,使数学工具更为有力."变分法"原文是 calculi variationum (变分演算).微分法、积分法、变分法的名称一直沿用到现在.17—18世纪的概率论实际上是概率演算(le calcul des probabilites),直到20世纪还有

这方面的著作问世,而真正的概率论是20世纪的事.同样,莱布尼茨最早有了逻辑演算的观念,直到19世纪才由布尔等人实现.

科学革命时期所形成的这些技术学科,后来被统称为(数学)分析.在当时,分析与代数的对象是不加区别的.如果有什么区别的话,可以说代数是进行有限的演算,而分析是进行无穷的演算.这种区别直到19世纪初柯西(Augustin-Louis Cauchy,1789—1857)开始对分析的严格化进行尝试,才为人们所重视.实际上,这个问题涉及数学的基础问题:有限演算的规则(如加法交换律)是否适用于无穷的运算(如无穷级数)? 人们很快发现,有限演算的规则对无穷运算决非畅通无阻.有限推理所得出的逻辑规则能否被推广到无穷推理或对无穷对象的推理,则是20世纪的数学基础的中心问题之一.在当时,还有一门被称为“代数分析学”的学科,从欧拉(Leonard Euler,1707—1783)到柯西,都写过这方面的专著和教程,其主要内容是从初等函数到一些特殊函数的演算及公式,特别是把初等超越函数展开成无穷级数、无穷乘积、无穷连分式的方法.在这一时期,虽然有一些新的对象,如无穷小量、无穷大量等,却没有适当的对象理论.不仅如此,讨论这种演算的合法性的“操作”或“演算”理论,如级数求和的可能性、收敛与发散问题等,也没有被提到日程上来.因此,这个时期虽然在技术上有很大发展,而相应的技术理论却相当落后.它标志着方法观念上的变革,即从几何式的综合方法导向计算式的分析方法,这对于几何学、力学、天文学的理论系统都产生了重大的影响.

2.2.4 19世纪的数学

19世纪的数学是近代数学的成熟时期,也是数学真正发展

成为自在的理论科学的时期.但是,伴随着第二范畴的操作理论(如最小二乘法及误差理论、级数求和理论、函数逼近理论及丢番图逼近理论)和第三范畴的操作对象理论(如代数方程理论、常微分方程理论)的产生与发展,数学技术本身也大有提高,特别是傅立叶展开、积分变换,尤其是复分析的建立.

19 世纪的数学可以说是数学对象化与多样化的时期,一方面数学由主要是操作技术转变为理论,另一方面也为 20 世纪现代数学的发展奠定了基础.19 世纪由于求解高次代数方程以及几何作图三大问题未能成功而产生了方程理论的新学科,这种现象使代数作为一个学科,其主题不断演化.对于微分方程及变分问题,也逐步提出方程理论问题,并由解的表示而形成特殊函数的理论.高斯正式把数论变成一个学科,而且创造性地引进代数数论和型论,这样,数学对象理论才真正形成,数学发展成为一门自在的科学,而不再仅仅是自然科学或技术的语言和工具了.几何随着方法的多样化,也越来越扩大自己的领域,特别是对于几何对象的观点的不同,大大改变了对古典几何的看法:

(1)由古典的欧氏几何扩展到非欧几何,这样,几何改变了自己是自然科学的一个分支的地位,而变成一门形式科学.

(2)几何对象大大扩张,由二维、三维空间扩展到高维空间,特别是作为曲线、曲面的推广的流形概念,成为几何研究的主要对象.同时,不以点为元素的线几何、球几何等也被提上日程.

(3)几何学研究的目标,也逐步由特殊对象的特殊性质以及度量,转变为对分类及其上结构的研究.在这方面,变换的观念、群的观念及不变性观念成为分类的基础.

(4)几何学研究的手段,也从综合方法转变为主要是代数方法和分析方法,反过来,几何观点也对分析问题产生直观的理

解.19世纪的几何学由一个内容比较贫乏的学科变成一个内容丰富多样的学科,到19世纪末形成一个有内在统一性的学科,到20世纪又由博返约,纯粹几何学的内容似乎已被淹没在代数及分析的汪洋大海之中.可以说,19世纪是几何的黄金时代.

19世纪的代数也经历过几次变形,但它并不是由后面的领域完全代替前面的领域,而是领域扩大,中心主题偏移.起初方程数值解法、近似解法仍有所发展,包括几何解法与图象解法,求精确根式解及解析解(包括无穷级数解)也一直有人研究.其后是方程论及置换群论的发展,乃至产生抽象群及表示论.另一方面,在19世纪中期,型论及不变式论也占据过"近代代数"或"高等代数"的宝座,线性方程组导致线性代数的发展,代数方程组起先导致消去法技术的产生,其后发展成为交换代数理论.最后,四元数及其各种推广导致线性结合代数及非结合代数的产生,而向量及张量的演算最后被归入线性代数及多线性代数.19世纪的代数的确经历了一个多样化并不断产生分支的过程.

2.2.5 20世纪的数学

20世纪的数学是数学从19世纪的多样性时期趋于统一的时期,其统一的基础是集合论.一方面,集合论之上产生了结构数学的庞大领域;另一方面,集合论的基础问题产生了元数学.数学新对象的出现,形成结构的多样性,导致理论的多样性.而且19世纪末以前的四大范畴的数学仍有新的发展,加上应用数学、计算数学等新领域的出现,数学日趋专门化、多样化.但意想不到的是,从20世纪70年代起,各个领域之间的新关系不断被发现,新一轮的统一性正在形成之中.

3　数学史学史

史学史(historiography)一词也可译为编史学,是讨论历史编纂法及其发展过程的学科.科学史学史已有多种著述,而数学史学史往往作为其中一部分加以论述.根据我们对数学的观点,数学史学史并没有成为一门成熟的学科.因此,这里所论述的只不过反映了数学史学史作为一门学科前史的情况.

3.1　数学史的工作

数学史论述数学的发展历程,因此,其工作性质与科学史差不多,主要的工作有:

(1)原始著作的搜求、编辑、校订、整理及分析、考证等.

(2)传记以及其他背景材料的考察.

(3)各种材料的时间顺序及其因果关系的研究和确定,构成历史的基本单元——史实.

(4)建立分析框架,从历史背景以及学科和整个社会文化背景来论述数学的发展,并以此为契机,探讨数学发展的规律,预测未来的进展.

研究数学史的角度一般分为内史和外史.内史从学科角度来考察,对于数学概念及理论,主要从本学科内部或相邻学科考察其起源及相互影响,近现代数学史研究多偏重这方面;外史从社会的政治、经济、文化等方面来考察数学的发展.数学的古代史,特别是史前史,与各民族文化发展的关系密切,而且直接影响数学基本内容的起源.在后来的发展中,数学的内在体制及数学与社会的相互关系,从宏观及结构上对数学的发展产生重要

影响.例如,数学教育,纯粹数学与应用数学的比例关系,政治与意识形态的干预等,都在很大程度上影响到数学的发展.

把数学史划分为内史和外史,实际上只是为了方便.对于数学乃至科学的发展来说,介乎内史和外史之间的哲学与技术的影响是至关重要的.许多大数学家本人就是哲学家,他们有着深刻的哲学思想,一门数学领域的开创与开创者的哲学思想关系密切,这是过去局限于内史和外史的数学史家容易忽视的一个领域.另一个研究不多的领域是技术的影响,特别是计算工具以及其他数学工具的历史.近年来,由于电子计算机的发展,其对数学发展的影响也应该被纳入数学史研究的轨道.

数学史的成果形态有以下几大类:

(1)原始的形态.

①文献目录;

②传记及合传;

③年表及编年史;

④原始文献汇编.

(2)史料专题的研究.

(3)编纂的历史.

①通史;

②断代史;

③分科史与专题史;

④民族、地区及国家史;

⑤社会史、文化史及科学史中的数学史.

(4)史论.

3.2　数学史研究的分期

由于西方近代数学主要来自希腊,这里只叙述源自希腊的这一部分.

3.2.1　史前史(18世纪之前)

数学史的编纂同数学史一样古老.古希腊欧德莫斯(Eudemus,前4世纪)曾著《几何学史》,现已失传,但部分内容曾被他人特别是普罗克留斯(Proclus,约410—485)等广泛引用.古希腊的许多数学著作经过罗马人,特别是阿拉伯人的翻译、评注或著述而流传至今.在他们的著作中,也保存了大量的史料.12世纪,这些著作传入西欧,成为其后西欧数学发展的起点.

17世纪的一些数学综述著作往往包含着丰富的历史资料,例如沃利斯(John Wallis,1616—1703)的《代数通论》(1685),这部著作尽管不能说没有偏颇,但是确实提供了许多资料.18世纪的这类著作有海尔布朗内(Johann Christoph Heilbronner,1705—1745)的《数学通史》(*Historia matheseos universal*)(1742)等,其中列举了许多论著及手稿.

3.2.2　草创时期(1750—1870)

现在公认,蒙图克拉(Jean Etienne Montucla,1725—1799)的《数学史》(*Histoire des Mathematiques*)(1758)标志着数学史作为一门独立学科正式诞生.但其主要不足是数学的逻辑综述与历史叙述相脱离.蒙图克拉的《数学史》共分两卷:第一卷集中叙述希腊、罗马及东方传统数学;第二卷叙述几何、力学及光学史,一直到17世纪.第二版(1799—1802)出版时,蒙图克拉已去世,修订

工作是由拉朗德(Joseph-Jérôme Lefrancais de Lalande,1732—1807)完成的.在许多同事的帮助下,拉朗德完成了第三卷,并且花了4年时间写完了第四卷.这两卷叙述的是18世纪数学史,树立了编写当代史的典范.在这部著作中,许多当时的材料得到收集和处理,全书共3000页,并附有索引.另一大部头著作是德国数学家、数学史家凯斯特纳(Abraham Gotthelf Kästner,1719—1800)写的四卷本《数学史》(*Geschichte der mathematik*),玻普(Johann Poppe)的修订本于1828年出版.意大利数学家一直对数学史有着强烈的兴趣,最突出的是李布瑞(Guglielmo Libri,1803—1869)用法文写的《意大利数学科学史》(*Histoire des sciences Mathematiques en Italie*)(共4卷,1838—1841).

这期间对东方数学的研究开始兴盛,特别是对埃及与梵语文献的研究.近代数学的文献及书信也开始编辑,特别有意义的是出版了《莱布尼茨数学文集》(1849)与欧拉的书信集.

3.2.3 黄金时代(1870—1914)

这个时期也是德国数学登峰造极的辉煌时代,德国学者在科学史,包括数学史上做出了突出贡献.主要是M·康托尔(Moritz Cantor,1828—1920)的四大卷《数学史讲义》(*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*)(1880,1892,1898,1908),其中他本人写了前三卷,第四卷是在他的主持下由其他同事共同编写的.第一卷是1200年以前的历史,第二卷是1200—1668年的历史,第三卷是1669—1758年的历史,第四卷是1759—1799年的历史.第四卷还首次辟有一章数学史学史.另一部著作是特洛夫克(Johannes Tropfke,1866—1939)的《初等数学史》(*Geschichte der Elementar-Mathematik*)(1902),他本人修订了第二版(1921)以及

第三版的一部分(1940),第四版第一卷在1980年由他人出版.

大数学家克莱因(Felix Klein,1849—1925)本人也是著名的历史学家,他是德国的《数学百科全书》(*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*,1898—1935)的首倡者及组织者,这部著作中的各章提供了极其详尽的文献材料,是研究近代数学史的重要资料.原来曾计划有一卷数学史,但后来没有成文.

在这个时期前后,一系列数学史期刊问世.最早登载数学史论文的期刊是法国的《新数学年刊》的《历史通报》专栏,1855年创刊.康托尔在《数学物理学杂志》上创办《历史文献》专栏(1865—1900)以及《数学科学史文集》(*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*,1877—1913)共30卷,后20卷独立刊行.

第一个专业数学史杂志是邦康帕尼(Baldassarre Boncompagni,1821—1894)创办的《数学科学文献及历史通报》(*Bullettino di Bibliografiae di Storia delle Scienze Mathematiche*),1868年创刊,1887年停刊,主要是文艺复兴时期的数学史.瑞典数学家恩涅斯特隆(Gosta Eneström,1852—1923)创办《数学文献》(*Bibliotheca Mathematica*,1882—1914),其中1884—1886年部分作为《数学学报》的附录,1887年起独立发行,涉及从古到今的数学史(例如集合论史),但最后几年指向批评M·康托尔的《数学科学史讲义》.另外,意大利数学史家洛里亚(Gino Loria,1862—1954)还创办了《数学科学文献与历史通报》(*Bolletino di Bibliografiae Storia delle Scienze Mathematiche*,1898—1919).

在这个时期,数学家著作的编辑工作一直在积极进行,不仅古代数学家,而且近代的甚至在世的数学家都有相当权威的全集或文集行世.重要文集的编选、注释及翻译工作也在积极进

行,特别是奥斯特瓦尔德(Wilhelm Ostwald,1853—1932)的《精密科学经典著作》丛刊,从1889年到1937年共刊行211种,其中涉及数学的约有60种.在文献编辑及分科史方面,主要有非欧几何学以及行列式论史的著作.错玉顿写过《16—17世纪数学史》.

3.2.4 低潮时期(1914—1960)

这期间最主要的趋势是萨顿(George Sarton,1884—1956)以一种统一的方式研究科学史,他创办了《艾雪斯》(*Isis*)等重要的科学史期刊,本人也对数学史有所论述,但其观点似嫌陈旧.在数学史方面,主要学者是德国数学史家维莱特纳(Heinrich Wieleitner,1874—1931),他创办了两种数学史杂志,并研究近代数学史.克莱因的《19世纪数学发展讲义》(1926—1927)至今仍是重要的经典.诺格包尔(Otto Neugebauer,1899—1990)创办了《文献及研究》丛刊(1929—1936),他本人对巴比伦数学史有突出贡献,1934年去美国工作.

在此期间,一批美国数学史家崛起,在许多方面做出了奠基性工作.其中包括卡卓里(Florian Cajori,1859—1930)、斯密司(David Eugene Smith,1860—1944)、阿奇巴尔德(Raymond Clare Archibald,1875—1955)、卡尔宾斯基(Louis Charles Karpinski,1878—1956)、库里治(Julian Lowell Coolidge,1873—1954)、贝尔(Eric Temple Bell,1883—1960)等.贝尔的《大数学家》(1937)及《数学的发展》(1945)至今仍有很大影响,但在史实方面未必可靠.

3.2.5　复兴时期(1960—　)

从1960年起,又有四种专业数学史期刊相继问世,其中包括《精密科学史文献》(1960—　)、《数学史》(1974—　),此外法国和意大利各有一份期刊.原苏联在1948年创办了《数学史研究》丛刊,至1993年已出至第33辑.

近40年来,数学史研究有了长足的进展,近代数学史中的17—18世纪部分已趋于完整及确定,牛顿的8卷数学著作已出齐,除牛顿的7卷通信集已出版外,莱布尼茨、欧拉等人的书信集正陆续编辑出版.

19世纪重要数学家的全集,除少数人的外,大体出版齐全,近年还出版了十几位数学家的科学传记,详尽的数学史研究已推进到19世纪末期,许多观点得到澄清.这些都构成了本书写作的基础.

第1章 古代数学的遗产

近代数学,特别是17—18世纪产生的符号代数学、解析几何学和微积分,是人类思想的伟大创造.它们不仅为科学革命提供了有效的数学工具,大大推动了力学、天文学、物理学的飞速发展,而且极大地拓宽了数学的领域,从数值的运算过渡到符号的运算,从有穷的操作过渡到无穷的操作,从受限制的几何思考方式过渡到自由的代数和分析的思考方式,从以计算为主的实用技术过渡到有对象的理论,从而给数学和科学带来了翻天覆地的变化.

1 近代数学的起源

近代数学可以说是两个潮流相互结合的产物,一个是古希腊数学经由阿拉伯及拜占庭传入欧洲,在文艺复兴时期,特别是16世纪中叶出现了一个翻译出版古希腊经典著作的热潮,对当时的学术界起着一种振聋发聩的作用;另一个是印度、阿拉伯(其中也包括中国)的实用计算技术在12世纪传到欧洲后,通过数学实践者的推广,在欧洲各国得到普及.正是这两种互补的潮流的相互作用,加上13—16世纪欧洲人自己的一些独特的创造,直接推动了天才时代的天才们更上一层楼的创造.

1.1 古希腊的数学

古希腊数学与其他国家和地区的数学有着完全不同的风格,它大致相当于现代纯粹数学.古希腊数学的实用计算部分比较原始,但数学部分内容独特,所以说是非常特殊环境下的产物.古希腊数学中的某些问题,例如尺规作图问题,特别是几何作图三大问题,直到19世纪才被解决,而有的问题直到现在还在研究,它们对近现代数学的发展有一定的刺激作用,但从实用角度来看,它们的确是可有可无的.

古希腊数学大致有三大部分:几何、数论和量论.它最突出的特点是欧几里得几何公理系统,这种演绎式的思想体系对后世影响极大,直到现在仍被看成是理想的模式.在西方,欧几里得的《几何原本》是仅次于《圣经》的"畅销书".古希腊数学与其他数学不同的另一个显著特点是几何中心论,比起算术来,几何学是数学的更可靠的基础.古希腊的数论及代数也被称为"几何(式)代数",这种观点一直延续到19世纪末.从内容来看,古希腊几何学的内容相当丰富,其对象从《几何原本》中的直线、圆以及球、正多面体,到圆锥曲线乃至高次曲线,其问题涉及定理证明和作图法,这些都为近代科学提供了重要素材.古希腊的数论与其他民族的计算技术不同,是近现代数论问题的主要来源.至于素数、完全数、亲和数、多角形数,则是近代数论的主要研究对象.而不定方程则来源于丢番图的《算术》.古希腊人把数与量加以区别,发展出一套比例理论,而对无穷与连续性只局限于哲学上的探讨.但是在求弧长、面积、体积的实际问题上,有时又不得不诉诸欧多克斯(Eudoxus,约前400—约前347)的穷竭法.阿基米德对这种方法的发展则预示着后来的微积分.

古希腊数学这种理想化的、抽象的、脱离实际而又很少有实用价值的倾向,一直从近代数学贯穿到现代数学当中.近代数学从古希腊数学中继承了欧几里得的演绎公理体系的理论框架,严格的标准、规定,以及一些独特的数学对象、问题、技术和方法.但是,从历史上看,对古代数学的继承也必然带有其局限性和不足之处,而近代数学正是在克服局限性、破除古代数学的禁锢的基础上蓬勃发展起来的.

古希腊数学的局限性主要在于以下几个方面:

(1)数学几何化,计算技术落后.

古希腊数学经历上千年的发展,始终没能发展出有效的记数法及位值制,这导致计算受到几何的束缚,并在很长时期内不能摆脱.例如,数要考虑其几何意义,一个数可以有平方(表示面积)、立方(表示体积),而对更高次方就不考虑了,有些数学家甚至认为它没有意义,而且不同量纲的量不能相加,方程必须满足齐次原则,也就是次数或量纲相同.这种限制直到笛卡尔才被完全打破.

(2)量的精密化,导致近似计算的缺乏.

古希腊数学发现不可通约量的存在,量不能还原为数,进而创立比例理论,这无疑是古希腊数学的伟大成就.不过这种几何化、精密化也有其消极的方面,主要是没有进一步研究近似计算.由于在实际问题中主要要求得出数值解,然而一般很难得出精确解,这就要求有一套近似计算的算法,这在中国古算中有着很重要的发展,而古希腊数学却阻塞了这条应用数学的道路.

(3)对无穷的拒斥.

欧几里得把“全部大于部分”作为第五公理,从而古希腊数学有意识地不把“无穷”一词纳入数学命题之中.例如,《几何原

本》中不说“素数有无穷多”，而说“素数比任何素数的指定集合都多”.阿基米德的著作也都符合几何的严密性，但他必须对每个问题都进行特殊处理，而微积分正是打破这种限制而发展起来的.

由于大多数近代数学家崇尚古希腊数学，近代数学的发展也不能不打上希腊化的烙印.实际上，直到19世纪末，这些局限性才基本上得到克服.

1.2　印度—阿拉伯的计算技术

古希腊的演绎数学体系尽管美仑美奂，但从实用角度讲，可以说一文不值.古希腊、罗马落后的数码及计算技术对于经济走向繁荣的欧洲来说，无疑大大拖了后腿.古希腊数学尽管有高深的理论体系，但不能有效地记数并发现位值制，这不能不说是理论及应用数学发展的一大障碍.幸好印度—阿拉伯数码及位值制传入欧洲，这才使欧洲数学补上所缺少的一条腿，使它迅速地跑起来.从菲波那奇(Leonardo Fibonacci，约1170—约1250)的《算盘书》(1202)开始，经过3个世纪的普及，欧洲数学才走向正轨.印度—阿拉伯数学的传入也向欧洲数学提出了一系列全新的方法，特别是解代数方程的算法，包括创立新算法以及简化旧算法.印度、阿拉伯几个世纪的长期经验，无疑对16世纪欧洲在代数方程解法上的突破提供了借鉴之处.除了方程的解法之外，古希腊、印度及阿拉伯的三角术，对欧洲近代数学以及天文学的发展也是不可或缺的.正是由于有了印度—阿拉伯的代数及三角，欧洲数学才能迈上一个新台阶.

2 近代以前欧洲数学的独创领域

欧洲在接受古希腊和印度—阿拉伯数学遗产的基础上,在取得近代数学的飞跃之前,已经有了重大的创造.这些创造无疑对近代数学有着直接的影响,其中特别突出的有四个方面:

(1)透视法、投影法及地图绘制.从文艺复兴时期起,这个领域有着长足的进步,并导致射影几何学及画法几何学的创立.

(2)三角法.15 世纪以前主要是球面三角法,其后建立了平面三角法,并达到统一的处理.

(3)三次、四次代数方程的解决.一次、二次代数方程的求解问题至少已有上千年的历史,但对于三次方程,特别是四次方程,长期无法得出精确算法解,直到 16 世纪上半叶,意大利数学家才取得突破.对方程求解方法的系统化,直接推动了符号代数学的产生.

(4)对数的发明.对数的发明是计算技术的决定性改进,对于电子计算机发明前的数值计算有着不可估量的影响,而有关对数值的精确计算也是微积分产生的推动力之一.

上述四个方面的创造,前两个较为专门,本书不作详细讨论.下面仅概述后两个创造的历史.

2.1 三次、四次代数方程的求解

代数学是算术的直接延伸.在数的初等运算(加、减、乘、除、乘方、开方)之外,出现了各种解方程的问题.埃及人已经能处理一次方程和求解某些二次方程,巴比伦人已经知道某些二元二次联立方程的解法.希腊人重视几何学,只有丢番图的《算术》中

包含大量的二次方程甚至个别三次方程的问题,其中所有问题都是对具体问题进行具体解决,没有写出一般的算法.中国在代数方面有着巨大的成就,特别是高次方程数值求解.印度引进负数和零,在当时极为先进.阿拉伯人有着移项、对消等化简技术,这对后来代数的发展有着重要影响.

方程论取得真正的突破,是 16 世纪上半叶发现三次和四次方程的解法,因为直到 15 世纪末,除了个别三次方程之外,人们还不会解一般的三次方程,甚至到 1494 年帕齐奥利(Luca Pacioli,约 1445—1517)还宣称一般三次方程不可解.可是在 1500 年左右,意大利博洛尼亚的数学教授费娄(Scipione dal Ferro, 1465—1526)首先解出了 $x^3 + mx = n$ 型的三次方程,但是他并没有发表他的解法,因为在 16—17 世纪,人们在有所发现后常常保密,并且向对手们提出挑战,要他们解同样的问题.当布雷西亚的方丹纳(Niccolo Fontana,约 1499—1557)听说后,就自己设法求解.方丹纳小时候曾被一个法国兵用马刀将面部砍伤,导致口吃,而被大家称为塔塔利亚(Tartaglia),意即"口吃的人".他出身贫寒,靠自学学会拉丁文、希腊文,并表现出突出的数学才能.1530 年,他已会解 $x^3 + mx^2 = n$ 型的三次方程,而且对 $x^3 + n = mx^2$ 型的问题也能给出解答.在当时 m, n 都是正整数.到 1535 年,他还会解 $x^3 + mx = n$ 型的方程.

费娄在临终前曾把自己的解法传授给他的学生菲奥尔(Antonio Maria Fior,1535 年前后).在 1541 年,塔塔利亚会解三次方程的消息传出后,有人在菲奥尔和塔塔利亚之间安排了一次竞赛,即每人向对方提出 30 个问题,让对方在一定时间之内解决.塔塔利亚解决了菲奥尔所提出的所有问题,而平庸的菲奥尔除了老师教给他的那几种类型之外,一点也不会解塔塔利亚向他

提出的类型,塔塔利亚大获全胜.

塔塔利亚获胜的消息很快传到卡尔达诺(Gérolamo Cardano,1501—1576)的耳朵里,他于是邀请塔塔利亚到他家里,还提出给他找一个尊贵的保护人.那时卡尔达诺已是一位著名人物,他于1526年在帕都亚取得医学博士学位,1534年起在米兰行医,是远近闻名的医生.1543—1560年他被任命为帕维亚大学医学教授,1562—1570年为博洛尼亚大学医学教授.他一生写了200多种著作,涉及医学、数学、物理、哲学、宗教、音乐、地质学等领域,可以说是当时最博学的人.但同时他也声名狼藉,是一位狂热的占星术家及赌徒.卡尔达诺同他的秘书费拉里(Ludovico Ferrari,1522—1565)从1536年起曾合作研究三次方程及四次方程的解法,但是没有获得成功.于是,他恳求塔塔利亚告诉他解法,并发誓保守秘密.但不久他就背弃誓言,把塔塔利亚告诉他的方法写进《大法》(*Ars Magna*)之中,并于1545年出版.他在该书中承认费娄最早发现有关的解法以及塔塔利亚告诉他的方法,而对各种情形的证明则是他自己作出的.他在该书中明显叙述了 $x^3+mx=n$ 的解法:

"把 x 的系数的三分之一取立方,然后加上方程常系数的二分之一的平方,再将所得的数求平方根,然后取两个这样的平方根,其中之一加上常系数的二分之一,另一个减去常系数的二分之一,于是你就会得到二项数及其相配数,然后从这二项数的立方根中减去其相配数的立方根,其差数或者余数就是 x 的值."即这种类型的方程的解为:

$$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u},$$

其中

$$t=\sqrt{\left(\frac{m}{3}\right)^{3}+\left(\frac{n}{2}\right)^{2}}+\frac{n}{2},$$

$$u=\sqrt{\left(\frac{m}{3}\right)^{3}+\left(\frac{n}{2}\right)^{2}}-\frac{n}{2}.$$

这就是著名的卡尔达诺公式.但是,他的证明是用几何方法给出的,即把 t 和 u 看成是立方体的体积,而$\sqrt[3]{t}$,$\sqrt[3]{u}$是相应立方体的边长.在《大法》中,卡尔达诺还解出了下面三类方程:

$$x^3=mx+n,$$

$$x^3+mx+n=0,$$

$$x^3+n=mx.$$

卡尔达诺也知道如何把 $x^3+px^2=q$ 型的方程化成 $x^3+mx=n$ 等上述四种类型的方程.他在书中自始至终都给出正根和负根,但他称负数为虚拟的数,而对复数根则完全不提.卡尔达诺在《大法》中还给出了费拉里关于四次方程的解法,其中包括 $x^4+ax^2+b=cx$ 以及下述类型:

$$x^4=bx^2+ax+n,$$

$$x^4=bx^2+cx^3+n,$$

$$x^4=cx^3+n,$$

$$x^4=ax+n.$$

他也给出了求解的过程,并给出了几何证明.

卡尔达诺的背信引起塔塔利亚的愤怒,他立即在《各种问题与发明》(1546)以及后来的《数量概论》(1556—1560)中发表了自己的方法,但是并没有更多的材料.关于三次方程解法的优先权问题引起塔塔利亚和费拉里之间的激烈争论,双方互相谩骂,甚至公开进行人身攻击(1548).但卡尔达诺并未参与论战.

2.2 对数的发明

对数的原始思想已见于法国数学家舒开(Nicolas Chuquet,?—1500)及德国数学家史梯费尔(Michael Stifel,1486—1567)的著作中,他们把等差数列与等比数列加以对比,发现等差数列中两项的乘法对应等比数列中对应项的加法,除法对应减法,乘方对应乘法,开方对应除法,但没有给出明确的定义及构造方法.真正的对数发明人是苏格兰人耐皮尔(John Napier,1550—1617),他为了简化球面三角运算,在上述对应思想的启发下,约于1594年具体给出一般数的对数,并于1614年发表计算的规则,在1619年的书中说明构造对数的方法."对数"这个术语也是他给出的.德国人布尔吉(Joost Bürgi,1552—1632)大约同时独立作出对数表,但迟至1620年才发表.英国数学家布里格斯(Henry Briggs,1561—1631)在得知耐皮尔的工作之后,建议用10作为对数底,从而产生通常用的常用对数,并在1624年发表了30 000以内数的常用对数表.从1666年起,圣·文森(Gregorius Saint Vincent,1584—1667)、莫卡托(Nicolaus Mercator,约1619—1687)、格利高里(James Gregory,1638—1675)、牛顿、哈雷(Edmond Halley,1656—1743)等把对数用无穷级数展开,从而大大简化了对数的计算,使对数表成为常用的计算工具.

对数的发明是计算技术的一次革命,根据其原理发明的计算尺长期以来是工程技术人员的必备工具.拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace,1749—1827)说:"对数的发明,简化了天文学家的工作,延长了他们的寿命."

对数从它的产生起就蕴含着函数的观念,实际上它是最早为大家所接受的函数,而三角函数的概念要到欧拉时才明确.比

较简单的指数函数一开始是作为对数的反函数来看待的.

3　古希腊经典著作的传播

古希腊对近代数学影响最大的数学家首推亚力山大里亚的欧几里得、阿基米德和阿波隆尼斯(Apollonius,约前262—前190),其次是丢番图和帕普斯(Pappus,约300—350).他们的著作传播到近代西方世界经历了漫长而曲折的过程,在这个过程中,许多学者进行了抄写、评注、编辑、翻译,也有不少研究和创造.古希腊数学及其传播的历史现在已是较为专门的课题,至今仍有许多研究行世.通史的作者对此常常略而不谈.由于近代数学与古希腊数学有着密切的关系,我们在这里简单概述如下.

(1)欧几里得.现今归在欧几里得名下的有11部著作,其中5部著作,即《几何原本》、《已知量》、《光学》、《现象》(几何天文学)、《音乐原理》,其抄本基本上被完整地保留下来,而《图形的分割》只有阿拉伯文译本.他的另外4部著作,即《曲面轨迹》、《圆锥曲线》、《衍论》以及《辨伪论》,已经失传,但从帕普斯及普洛克洛斯(Proklos)的著作中对其中的内容可略知一二.《反射光学》虽最终来源于欧几里得,但现存版本是否属于欧几里得,很令人怀疑.

《几何原本》的流传过程可分为四个时期:

①古代的希腊时期;

②中世纪的阿拉伯时期;

③中世纪的基督教拉丁时期;

④16世纪以来的近代时期.

其中16世纪学者的精心整理与翻译,对近代数学有着决定性的

影响,而且后来对历史的研究也掀起一个小小的热潮.在9—12世纪,多种欧几里得的希腊文手抄稿被保存在西欧的图书馆中(如牛津、罗马、维也纳及巴黎).关于《几何原本》是如何进入伊斯兰国家的,现在仍是个谜,有人认为中间存在一个叙利亚文版本.但是,8—9世纪欧几里得的两个完全的翻译本——赫贾季(al-Hajjāj)译本与伊沙格(Ishaq ibn Hunain)译本,却来源于两个完全不同的抄本,即前提翁抄本与提翁(Theon,4世纪)抄本.这两个来源不同的翻译本大约同时在12世纪被翻译成拉丁文.前提翁抄本的赫贾季译本是由阿德拉德(Adelard of Bath,约1120年前后)译成拉丁文的,提翁抄本的伊沙格译本是由杰拉德(Gerard of Cremona,约1114—1187)译成拉丁文的.杰拉德译本对基督教西方产生巨大冲击,它影响了大思想家阿尔伯特(Albertus Magnus,约1200—1280)和经院哲学领袖阿奎那(Thomas Aquinas,1225—1274).1255年左右,阿德拉德译本经坎帕努斯(Campanus of Norara,?—1296)进一步修订成为在1482年第一次印刷出版的《几何原本》,不过,它是间接翻译的版本.虽然帕齐奥利称之为最忠实的翻译,可是别人却攻击它为最野蛮的翻译,并要求直接从希腊文翻译.1505年赞贝替(Bartolomeo Zamberti,约1473—?)直接由希腊文翻译而成的拉丁文版《几何原本》出版,成为以后各种版本的基础.仅在16世纪,欧几里得《几何原本》就有100种以上的版本出版,其中有的还收入欧几里得的其他著作,如《现象》、《光学》、《已知量》等.因此,到16世纪,欧几里得在学术界早已家喻户晓.特别有意义的是,意大利数学家康曼狄诺(Federico Commandino,1509—1575)提供了超出坎帕努斯及赞贝替的直接由希腊文手稿翻译而成的权威版本,这个1572年版本被称为"王版",除了《几何原本》本文之外,它还包

括自古以来许多学者的评注.

在16世纪,以各种文字出版的《几何原本》也相继问世.希腊文版于1533年出版,意大利文版于1543年出版,德文版于1562年出版,法文版于1564年出版,英文版于1570年出版,西班牙文版于1576年出版.这时,《几何原本》的影响已远远超出了学术界.

(2)阿基米德.阿基米德与微积分的关系要比欧几里得密切得多,但是阿基米德不像欧几里得那样有自己的学派,他在当时更以技术发明而著称,他的著作也不像欧几里得的著作那样被作为经典为人们所反复研究.因此,比起欧几里得来,对阿基米德的著作的翻译也要晚一些.阿基米德至少有12部数学著作:

①《抛物线求积法》;

②《论球与圆柱》;

③《圆的度量》;

④《论螺线》;

⑤《论劈锥曲面与类球体》;

⑥《平面图形的平衡》(Ⅰ,Ⅱ);

⑦《力学原理》;

⑧《力学定理的方法》;

⑨《数沙器》;

⑩《群牛问题》;

⑪《论浮体》;

⑫《引理集》.

阿基米德的部分著作通过阿拉伯文译本由吉拉德(George Brich Jerrard,1804—1863)译成拉丁文,大部分著作由拜占庭收集为手稿集,根据这些希腊文本,莫尔贝克的威廉(William of

Moerbeke,? —1286)主要把力学著作译成拉丁文,并在 1503 年印刷出版.而数学著作的两种译本由塔塔利亚及莫罗利科(Francesco Maurolico,1494—1575)于 1543—1544 年编辑出版.康曼狄诺的新拉丁文版在 1558 年出版.阿基米德著作的出版,直接激起对微积分和力学的研究,不过,他的《力学定理的方法》直到 1906 年才由海伯格(Johann Ludvig Heiberg,1854—1928)发现而成为数学史家的研究对象.

(3)阿波隆尼斯.阿波隆尼斯的《圆锥曲线论》(8 卷)中的前 4 卷,经阿拉伯人之手于 9 世纪由希腊文译成阿拉伯文,1537 年由门努斯(J. B. Menus)译成拉丁文出版.1566 年出版了康曼狄诺的较好的译本,并附加许多评注.通过另外的希腊文本 5—7 卷译成的阿拉伯文本,由博雷利(Giovanni Alfonso Borelli,1608—1679)等译为拉丁文,并于 1661 年出版.这些是 16—17 世纪学者所根据的阿波隆尼斯的著作.由于第 8 卷已失传,对它的复原也是学者们所热心研究的题目.改进的全译本直到 1710 年才由英国天文学家哈雷校订出版,他还根据有关文献再造出第 8 卷.

(4)丢番图.丢番图的《算术》有 13 卷,它传到欧洲是比较晚的.1464 年,德国数学家雷基蒙塔努斯(Johan Regiomontanus,1436—1476)在给比安奇(L. Bianchi)的信中曾提到,他在威尼斯见到了丢番图的《算术》的 6 卷希腊文手抄本.一个世纪以后,胥兰德(Xylander,即 Wilhelm Holzmann,1532—1576)才翻译出版了最早的拉丁文译本(1575),其中附有丢番图的另一部著作《多角数》.其后,巴歇(Claude-Gaspar Bachet de Méziriac,1581—1638)出版了经他校订注释的希腊文—拉丁文对照本(1621).正是这个本子使得费尔马走向建立近代数论之路,他在这个本子上写了许多批注,包括著名的费尔马大定理.费尔马的儿子萨缪尔

(Samuel de Fermat)将全部批注插入正文,重新于1670年出版.1973年发现了另外4卷阿拉伯文手稿,它们应处于以前6卷的Ⅰ~Ⅲ卷与Ⅳ~Ⅵ卷之间.

(5)帕普斯.帕普斯的《汇编》原有8卷,第1卷及第2卷的一部分已失传,最早的拉丁文译本是康曼狄诺于1566年出版的.帕普斯的《汇编》是韦达(Francois Viète,1540—1603)、笛卡尔等人的研究的出发点.

第2章　17—18世纪各国数学发展概况

1　意大利

意大利的科学发展历史源远流长,阿基米德和芝诺都曾在意大利南部活动.中世纪,比萨的利奥纳多(Leonardo Pisano)即菲波那奇引进印度—阿拉伯数码和阿拉伯的代数算法及问题,所著的《算盘书》(*Liber Abaci*)(实际与算盘无关)成为著名的经典著作.这个方向摆脱了希腊古典数学的限制,面向实用数学,从而构成未来数学的一个新的组成部分.在热那亚、比萨、佛罗伦萨、米兰和威尼斯等地,商人的子弟纷纷学习阿拉伯数码及其计算.这些“算盘家”对由实用问题引出的方程的求解很感兴趣,这也为16世纪代数方程求解取得突破性进展奠定了基础.经过3个世纪的发展,这些实用的算术、代数、几何知识,总结出现在帕齐奥利于1494年出版的《算术、几何、比及比例关系大全》一书中,这是当时实用数学的百科全书.在文艺复兴后期,博洛尼亚的费娄、费拉里,布雷西亚的塔塔利亚及米兰的卡尔达诺求解了三次、四次方程,邦别利(Rafael Bombelli,1526—1576)则建立了代数的基础.

从16世纪初,意大利的大学成为当时学术界的中心.最古老的大学博洛尼亚大学从整个欧洲吸引留学生,其中著名的有

哥白尼(Nicholas Copernicus,1473—1543)、德国大艺术家丢勒(Albrecht Dürer,1471—1528)等.卡尔达诺和费拉里都曾在该校任教,而集代数大成者邦别利以自然的方式延续了这个传统,尽管他没在博洛尼亚大学上过课.到17世纪初,博洛尼亚数学传统的代表人物是卡塔尔迪(Pietro Antonio Cataldi,1552—1626),他是无穷算法的首创者之一,在《论求数的平方根的最简单方法》(1613)一书中,首次引用无穷连分数.他还发表过对第五公设的批判的历史著作.其后,博洛尼亚大学最著名的数学家是卡瓦列利(Bonaventura Cavalieri,1598—1647),他是该大学首任数学教授(1629—1647).

罗马是另一个数学中心,而且在1603年建立了山猫科学院,使它成为科学中心,许多耶稣会教士的教育是在这里完成的.这时,罗马数学界的代表人物是原籍德国的数学家克拉维乌斯(Christoph Clavius,1537—1612).他在罗马学院教授数学近半个世纪之久(1565—1612).他编著了许多教科书,包括算术、代数、几何等,影响很大.他的学生则大都面向近代数学问题的研究.瓦雷里奥(Luca Valerio,1552—1618)曾在罗马任教,他的著作《论重心》(1604)及《抛物线求积》(1606)还是用阿基米德的方式撰写的.

到17世纪初,伽利略(Galiei Galileo,1564—1642)成为当时最有影响的科学家,在数学方面也很有影响.由于他在比萨大学及帕多亚大学任教授,这两个大学也成为学术中心.他的学生有卡斯特里(Benedetto Castelli,1578—1643)、卡瓦列利、托里切利(Evangelista Torricelli,1608—1647)和维维安尼(Vincenzo Viviani,1622—1703),维维安尼自称是伽利略最后的学生.

17世纪的意大利数学家对数学的贡献主要是建立和发展

了不可分量方法.它主要是卡瓦列利在1635年的著作中创立的,并且在托里切利的著作中得到了发展.卡瓦列利的学生安格里(Stefano Degli Angeli,1623—1697)在1660—1661年的著作中用不可分量方法求出了一些几何图形特别是螺线的面积、体积及重心.门格里(Pietro Mengoli,1625—1686)发展了卡塔尔迪的无穷算法,不过他们的方法很快被无穷小演算方法所超过,意大利数学从此趋于衰微.

从17世纪中叶到19世纪中叶,意大利数学平稳地发展,除了拉格朗日之外,意大利没有产生有重大影响的数学家,但是个别数学家仍有许多出色的成果.

塞瓦兄弟中的哥哥G·塞瓦(Giovanni Ceva,1647—1734)以平面几何中的塞瓦定理而知名,弟弟T·塞瓦(Tomasso Ceva,1648—1737)研究了各种曲线,而且使米兰成为数学发展的中心.他们的朋友格兰迪(Guido Grandi,1671—1742)接替托里切利任佛罗伦萨大公的数学家,也研究了各种曲线,特别是引进了玫瑰线等特殊曲线,并发现了蔓叶线及蚌线的新性质.他的主要功绩在于把莱布尼茨的无穷小演算引入意大利.在此之前,由于伽利略崇尚欧几里得几何,而把新兴的解析几何和微积分拒于国门之外,从而产生了消极的影响.直到18世纪初,一些数学家才开始学习微积分,其中特别是黎卡提(Jacopo Francesco Riccati,1676—1754)及法纳诺(Giulio Carlo Fagnano dei Toschi,1682—1766),他们都是贵族,前者在1724年引入黎卡提方程,后者在1714—1720年间关于椭圆积分的工作被欧拉于1750年发现以后,成为欧拉椭圆积分加法定理的出发点.

18世纪后期,意大利经历了一个漫长的政治分裂与动荡时期.都灵成为撒丁尼亚及皮德蒙王国的首都,伦巴底和威尼提亚

并入奥地利,罗马属于教皇领地,那不勒斯成为两西西里王国的首都.在它们之间还散布着一些大公国,如托斯卡纳和莫德纳,这种情况使意大利科学的发展遇到了更大的困难.为了克服这种由于政治分裂而造成的困难局面,1782年成立了意大利科学会(Società Italiana di Scienze),旨在促进人员接触及学术交流.该科学会还创办了杂志《文集》(*Memorie*),这是当时发表数学论文较多的期刊.

18世纪下半叶,意大利代数学家在数学史上占有重要地位.在他们之先,拉格朗日于1757年在都灵建立了都灵科学会,还创办了刊物《都灵杂志》,最早的3卷发表的大都是拉格朗日的著作,他于1766年离开都灵.马尔法替(Gian Francesco Malfatti,1731—1807)于1771年成为费拉腊大学的数学教授,他在1770年独立得出了代数方程预解式.鲁菲尼(Pulo Ruffini,1765—1822)是莫德纳大学的数学教授,他受拉格朗日的影响,首先尝试证明五次方程不能根式解,不过马尔法替对他的证明表示怀疑.

到19世纪中叶意大利统一之前,意大利数学在世界上几乎没有什么影响.

2　法　国

从15世纪起,法国一直是统一的中央集权制国家,思想领域主要由正统的巴黎大学所控制.17世纪上半叶,在出现韦达、笛卡尔、费尔马和帕斯卡这一代大数学家之前,法国数学谈不上有什么伟大的传统.16世纪,数学在法国有一定的普及,最著名的著作是舒开的《三部》(*Triparty*),这是一部最早的代数著作.

值得注意的是,他大大推广了数的概念,其中包括0、负数、根以及根的组合.16世纪中叶,拉姆斯(Petrus Ramus,1515—1572)编写过一些算术及几何学教科书.在体制方面有重要意义的事件是1530年法国国王弗朗索瓦一世(Francois I,1494—1547,1515—1547年在位)建立王立学院(Collège Royal),同显赫的巴黎大学相对,它成为传播新人文主义的场所.它不需要入学考试,也不授予学位,对所有听众都开放,谁都可以来听课.它没有固定的课程,教授愿意讲什么就讲什么.显然,它体现了最早的教学自由及学术自由的原则.由于它不像过去的大学那样培养专业人才,从而为发展科学及数学开辟了道路.有些数学家,如罗伯瓦尔(Gilles Personne de Roberval,1602—1675,1632—1675年任教授)、拉伊尔(Philippe de la Hire,1640—1718,1682—1718年任教授)等,就是这样被培养出来的.

直接推动法国数学黄金时代到来的数学家是马桑(Marin Mersenne,1588—1648).马桑出生在法国劳动人民家庭,1604年进入拉弗莱什耶稣会学校,直到1609年毕业.接着,他到巴黎大学神学院读书,两年后加入米尼姆教派.1619年他回到巴黎,主持米尼姆修道院,除了短期旅行外,一直在这里,直到1648年9月1日去世.马桑自己也有多方面的兴趣,他发表过自然哲学、声学、力学、光学、音乐等方面的著述.1626年他编辑了《数学汇编》,收集了从古代到当时的数学文献.但是,他在科学史上的地位主要是作为第一位杰出的科学组织者,使得科学更有效地传播与交流.当时的所有著名科学家都与他保持着联系,特别是费尔马、笛卡尔(从1629年起主要定居于荷兰)、惠更斯(Christiaan Huygens,1629—1695)以及伽利略和他的学生们.

1623年起,马桑的修道院成为欧洲学术界的交流中心,他

与整个欧洲学术界的著名学者通信,并传播他们的成就.许多学者经常在他的修道院聚会,如帕斯卡就是在这里遇到笛卡尔的(1647).马桑作为"中转站"的秘书,在聚会的基础上于 1635 年组成了原始的巴黎科学院.

马桑小组成员中的有些人后来成为巴黎科学院的奠基人.巴黎科学院的建立是科学史上的一件大事,它是在巴黎学者自由组织的基础上,由当时的首相科尔贝(Jean Baptist Colbert, 1619—1683)向国王路易十四(Louis X Ⅳ, 1638—1715, 1643—1715 年在位)建议设立的,得到了好大喜功的国王的恩准.1666 年 12 月 22 日新科学院举行首次会议时,成为完全致力于科学研究的聚会,其成员开始时只有 15 人.他们得到国王的年金,研究活动也得到资助.他们的研究分为两大部分,即数学和物理学.前者包括力学及天文学,后者还包括化学、植物学、解剖学及生理学.他们一周聚会两次,分别讨论数学和物理学问题.当时,院士中包括罗伯瓦尔、惠更斯,在数学方面主要研究笛卡尔的工作以及无穷小演算,这无疑是当时数学的主流.他们的成果多以书的形式发表,也有的发表在《学者杂志》(*Journal des Scavens*)及其他期刊上.《学者杂志》是第一份科学期刊,1665 年 1 月 5 日创刊,其上登载许多科学及数学文章,创刊后曾中断,从 1667 年起连续出版.巴黎科学院于 1699 年在丰丹尼尔(Bernard le Bouyer de Fontenelle, 1657—1757)的主持下进行改组,建立起正规的体制,并开始发行自己的刊物《科学院纪事、数学及物理学论文集》(*Histoires de l'academie des Sciences avec les Memoires de Mathematiques et de Physique*, 1702—1797).在 1750—1786 年间,还出版了《外国学者递交的数学及物理学论文集》.

从 17 世纪中叶到 18 世纪中叶,法国数学有一定进展,但没

有前后两个时期那么显赫.这个时期的主要数学家有丰丹尼尔(他更是一位哲学家)、罗尔(Michel Rolle,1652—1719)、洛比达(Guillaume Francois Antoine de L'Hospital,1661—1704)和瓦里涅昂(Pierre Varignon,1654—1722),他们是莱布尼茨的微积分的传播者.

到18世纪30年代,法国数学开始了新一轮的蓬勃发展时期.有意思的是,发展的动力来源于牛顿的宇宙学说战胜笛卡尔的学说而在法国占据统治地位.另一方面,他们继承欧洲大陆的微积分符号及分析技术,从而产生出一批大数学家,其中有克莱洛(Alexis Claude Clairaut,1713—1765)、达兰贝尔(Jean le Rond d'Alembert,1717—1783)等.经过一段间歇时期,在18世纪70—80年代,蒙日(Gaspard Monge,1746—1818)、拉普拉斯、勒让德(Andrien-Marie Legendre,1752—1833)成为当时在数学上做出主要贡献的人物.这时,1787年才到巴黎的拉格朗日已完成其大部分伟业.他们都一直活到拿破仑时代,那时法国数学又揭开了新的一页.

18世纪末法国大革命对教育及科学的冲击,为19世纪上半叶法国科学在世界上的领先地位奠定了基础.这时,只有法国形成了完整的"高等数学"的教科书体系,符号代数、解析几何和微积分都有了优秀的法文教科书,使法国学生可以很快接触到数学的前沿.在代数方面,有欧拉的著作《代数全书》的法译本,拉克鲁瓦(Sylvestre Francois Lacroix,1765—1843)和其他人都编过类似的教科书,特别是解析几何和微积分的教科书,都多次再版,有着广泛而深刻的影响.从1780年到1840年半个多世纪的时期中,法国数学在欧洲占有绝对领先的地位.

3　英　国

17世纪,特别是17世纪下半叶,英国成为科学革命的策源地.关于科学革命的历史及其原因的分析,已经成为许多专著的主题.英国从16世纪起顺利地通过宗教革命,并于1588年击败西班牙的无敌舰队而争得海上霸权.培根(Francis Bacon,1561—1626)的《崇学论》(1605)与《新工具》(1620)的出版,为科学奠定了思想方法的基础.从此,实验科学及技术在英国得到广泛的研究.1645年克仑威尔(Oliver Cromwell,1599—1658)革命以及1661—1688年王政复辟时期,科学革命的进程并未被打断,正是在这段时期,牛顿完成了他的伟业.1687年,牛顿的《自然哲学的数学原理》问世,标志着科学进入社会生活,并对其他一切领域施加影响.牛顿的这一巨著也反映出数学在自然哲学中的无可争辩的地位.从此,数学与科学的发展结下了不解之缘.

这个天才时代也是数学的黄金时代,英国在几乎所有领域都处于领先地位,在数学上也不例外.比起欧洲大陆的数学家来,英国的数学家与大学的关系更为密切.在17世纪,数学家还不是一种职业,但大学中仍设有极少数与数学有关的教授席位.另外,作为18世纪产业革命的摇篮,数学在学院之外也有一大批实践者和业余爱好者,这就形成一支庞大的队伍.学院里的数学家在创造数学的同时,间或也为他们普及数学,这就造就了17世纪英国数学的繁荣.

早在16世纪中叶,雷科德(Robert Recorde,1510—1558)用英文写了不少通俗教科书,大大加速了数学的广泛应用.其后,苏格兰贵族耐皮尔发明了对数,布里格斯引进常用对数,并在计算

方法上实现重大改革,对天文、航海、测绘以及科学发展的推动作用是不可低估的.这种重视计算的趋向对于纯演绎数学脱离实际的偏向是一种很好的平衡.

在理论数学方面,牛顿首先接触到的是符号代数、解析几何以及沃利斯的《无穷算术》,这些无疑是直接通向微积分的康庄大道.哈里奥(Thomas Harriot,1560—1621)和奥特雷德(William Oughtred,1575—1660)的两部代数著作于1631年同时出版,他们是英国符号代数的引进者.

在牛顿之前,英国最重要的数学家是沃利斯和巴罗(Isaac Barrow,1630—1677).沃利斯是当时符号代数和解析几何的传播者,对它们进行了完整的论述.他的《代数通论》(1685)概括了前人的结果,还讨论了穷竭法和不可分量法;他的《圆锥曲线》(1655)用笛卡尔的方法讨论了圆锥曲线.同时,沃利斯还是微积分的先驱之一.他的《无穷算术》(1656)有意识地使用无穷表达式,他的无穷乘积引导布隆克尔(William Brouncker,1620—1684)引入无穷连分式.巴罗是牛顿的老师,他的微积分工作最终结束了微积分前史阶段(1670),导致微积分的诞生.苏格兰人格利高里对微积分也有贡献,他采用几何方式表述了微积分基本定理.

在这段时期,英国科学界最主要的事件是英国皇家学会的成立.实际上从1645年起,沃利斯等人就在伦敦定期聚会,1646年大部分人移往牛津,1660年他们再次在伦敦集会.1662年7月15日获得国王的特许状,英国皇家学会正式成立.英国皇家学会集中了当时各界的精英,如化学家波义耳(Robert Boyle,1627—1691)、物理学家胡克(Robert Hooke,1635—1702)、经济学家配第(William Petty,1623—1687)、建筑师雷恩(Christopher Wren,1632—1723)等.牛顿从1672年起成为英国皇家学会会

员,1703年起任学会主席,直至去世.在17世纪后半叶,英国皇家学会是一个重要的科学家组织,科学家们在一起讨论、做实验,并通过书信与国内外学者联系,当时这些信件是最原始的传播科学的渠道.1665年英国皇家学会的《哲学汇刊》(*Philosophical Transactions*)创刊,成为最早的正式期刊.不过到18世纪,英国皇家学会的活动大不如以前了.

不可否认,英国的大学在培养数学家方面起到了一定的作用,尽管其主要职责是培养神职人员等显赫人物.在大学当教授也像牧师一样要求独身.英格兰的牛津大学及剑桥大学都有着悠久的历史,但从16世纪中叶起,数学才在剑桥大学占有一定地位.当时在大学任职的数学家有雷科德、狄(John Dee,1527—1608)和比灵斯利(Henry Billingsley,?—1606)等,比灵斯利是第一个把欧几里得的著作译成英文的人,然后由狄在1570年编辑出版.狄还是当时许多航海者的顾问,并且有的航海家,如赖特(Edward Wright,1561—1615),也在剑桥大学学习并工作多年,他的朋友布里格斯也曾在剑桥大学任研究员及讲师.

由于1596年格雷欣学院的建立,大学很快扭转了这种理论联系实际的局面,又回到纯粹的学术研究中去.格雷欣学院是由格雷欣(Thomas Gresham,1519—1579)的遗赠而在伦敦建立的,它一开始就设立了数学、天文学等教授席位,面向实际应用研究.其第一任几何学教授就是布里格斯.格雷欣学院的另一个作用就是支持英国皇家学会,从1660年开始,直到1711年,英国皇家学会就是在这里开会的,这两个机构可以说密不可分.

到17世纪,大学也开始设置数学的教授席位.1619年萨维尔(Henry Savile,1549—1622)在牛津大学设立几何学及天文学两个教授席位,布里格斯在1620年又成为牛津大学的首任几何学

教授.沃利斯在1649—1703年间继任教授,对17世纪下半叶英国数学有着极大的影响.凯尔(John Keil,1671—1721)从1712年起任天文学教授,他是牛顿学说的热心传播者,也是最积极指控莱布尼茨的人.

17世纪下半叶,剑桥大学也设置了一个显赫的教授席位——以卢卡斯(Henry Lucas)命名的数学讲席.这个席位的首任教授是巴罗,1670年由牛顿接任.

牛顿的学生科兹(Roger Cotes,1682—1716)在1706年被任命为新设的剑桥大学普拉姆(Plum)天文学及自然哲学讲座教授.1711年他被选为英国皇家学会会员.他协助牛顿编辑了《自然哲学的数学原理》第2版,在序言中他积极为牛顿学说辩护,反对当时还占统治地位的笛卡尔学说.牛顿对这位英年早逝的学生非常器重,他说过,"要是科兹不死,我们会知道得更多".

在18世纪前半期,一些数学家在发展牛顿的微积分方面做出了一定的贡献,不过很快就被欧洲大陆的数学家所超过.

棣莫弗(Abraham de Moivre,1667—1754)原是法国雨格诺教派的新教徒,因1685年路易十四废南特赦令,他逃到英国,在英国任私人数学教师,并同牛顿及哈雷交往.1697年被选为英国皇家学会会员,他的工作受到牛顿的称赞,1712年被英国皇家学会任命为牛顿—莱布尼茨争议委员会的成员.1711年他开始研究概率演算,1718年出版了《机遇学说》(*Doctrine of Chances*),其中包括50多个概率问题.他往往由概率的原理得出排列组合公式,这恰恰与习惯做法相反.1730年他出版的《分析杂著》(*Miscellanea analytica*)中,也有一些概率问题.1733年,他在一本小册子《二项和式展成级数的近似值》(*Approximatio ad summam terminoum binomii* $(a+b)^n$ *in seriem expansi*)中,首次得出误差律

及分布曲线，特别是概率公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

其英译本被收入《机遇学说》第 2 版（1738）中．在 1704—1714 年间，他经常同约翰·伯努利（Johann Bernoulli，1667—1748）通信，这可能引起了他对无穷级数及概率的兴趣．

牛顿的另一位朋友是苏格兰人斯特灵（James Stirling，1692—1770），1711—1716 年他在牛津大学贝里奥尔学院学习，因同情詹姆斯二世党人，他拒绝宣誓，因而未获准毕业．1717 年他出版了《牛顿的三次曲线》（*Lineae tertii ordinis Newtonanee*），在牛顿的 72 种三次曲线之外又加上 4 种．这使他有了名气，从而在威尼斯找到了工作．1724 年他到伦敦，在伦敦小塔街学院任教．在牛顿的帮助下，斯特灵于 1726 年被选为英国皇家学会会员．1735 年以后，他成为经营苏格兰拉纳克郡铅矿山的苏格兰矿业公司的经理，从此在数学方面没有更重要的工作．

牛顿的后继者中在数学上最有成就的当属泰勒（Brook Taylor，1685—1731），他曾在剑桥大学圣约翰学院学习，1714 年获博士学位．1714—1718 年任英国皇家学会秘书，后因身体不好而辞职．他曾去法国旅行，并结识当地学者．其后，泰勒转向有关宗教和哲学方面的思考及著述．他的著作《哲学的沉思》（*Contemplatio philosophica*）在他去世后于 1793 年才出版．除了数学分析之外，他还以透视学享有盛名．1719 年出版的《线性透视》是一部重要著作，是后来发展光学的基础．特别值得注意的是，他最先引入"没影点"的观念．

另一位杰出的数学家是苏格兰人麦克劳林（Colin Maclaurin，1698—1746），他是一位神童，11 岁就进入格拉斯哥大学学习，

1715 年获硕士学位，19 岁成为阿伯丁大学教授.1719 年他访问伦敦，见到了牛顿，从此成为牛顿的最坚定的支持者.他于 1720 年出版的《有机几何学》(*Geometrica Organica*)讨论了圆锥曲线及高阶平面曲线，其中证明了许多定理，有些是牛顿用过而没有证明的，有些是他独立发现的.在牛顿的帮助之下，1725 年他被任命为爱丁堡大学教授.他完全按照古典几何方式叙述牛顿的流数理论，但还是得出一些新结果.麦克劳林去世之后，英伦三岛的数学趋于衰微，只有少数数学家在普及方面做了一定的工作.例如辛普森(Thomas Simpson，1710—1761)，他主要是自学成才，1736 年开始发表著作，1737 年发表《流数新论》(*A New Treatise of Fluxions*)，1743 年被任命为皇家军事学院数学教师.他还编了许多教科书，主要有《代数》(*Algebra*)(1745)、《几何》(*Geometry*)(1747)、《三角》(*Trigonometry*)(1748)，均多次再版，有的一直用到 1826 年.

18 世纪后半叶，英国数学趋于衰微，其中只有华林值得一提.华林在 1760 年被任命为剑桥大学卢卡斯几何学教授，在数论、代数、几何、分析等多个领域做了一些重要工作.在数论方面，他首先提出华林问题，并在初等数论上得出一些结果，还首次公布哥德巴赫猜想.在代数方面，他独立得到代数方程根的幂和与系数之间关系的公式.在几何方面，他研究了代数曲线的性质及分类.在分析方面，他于 1776 年得出了柯西的无穷级数收敛或发散的判别法.由于华林几乎是在完全孤立的情况下工作的，而且缺少交流，他的大部分工作已为欧洲大陆数学家独立发现甚至远远超过，因此长期以来他一直默默无闻，影响不大.

4　其他各国

在17—18世纪,除法国、英国外,其他各国也产生了不少数学家,有些甚至是很杰出的,不过由于时代及各国国内社会条件的限制,没能产生在本国有影响的学派或形成数学中心.许多大数学家背井离乡到其他国家去.普鲁士柏林科学院和俄国圣彼得堡科学院是18世纪数学发展的摇篮,而其中的人才大都是外国人.

4.1　尼德兰

17世纪尼德兰(即今荷兰)处于发展的黄金时代,由于实现了政治自由、经济自由和思想自由,科学与教育有了极大进步,出现了人才辈出的局面.尼德兰在政治上摆脱腐朽的哈布斯堡王朝的统治而独立,在宗教上摆脱罗马教廷的束缚而成为新教徒的避难所.海外贸易也使经济繁荣起来.新兴的资产阶级宁愿不要税收豁免的优待,也要在家乡办大学.1575年建立的莱顿大学成为第一所新教大学,接着格洛宁根大学在1614年建立,乌特勒支大学在1636年建立,阿姆斯特丹在1632年建立了学院(athenaeum).为适应经济和技术的进步与发展,实用数学也进入大学的课程,理论与应用数学得到了协调发展.尼德兰最早的著名数学家是斯蒂文(Simon Stevin,1548—1620),他由南尼德兰来到莱顿大学任教,他的《算术》(1585)向荷兰普及了算术和代数知识.他还是一位工程师,在力学、天文、航海、土木建筑等方面都有贡献.在莱顿工程学校任教的还有范·柯仑(Ludolph van Ceulen,1540—1610),他以计算π数值而著名,1596年他算到小

数点后 20 位,后来算到小数点后 33 位(发表于 1615 年),最后算到小数点后 35 位,发表在他的学生斯耐尔(Willebrord Snel, 1580—1626)的著作《测圆术》(*Cyclometricus*)(1621)中.斯耐尔也是莱顿大学的教授,以发现折射定律而著名,他在测地学中也有重要贡献,并把德国、法国的数学引入荷兰.

由于荷兰的特殊条件,笛卡尔在 1629—1649 年间整整 20 年都在荷兰工作,并写出了他最主要的著作,特别是《方法谈》.荷兰数学家范·斯霍腾(Franz van Schooten,约 1615—1660)在解析几何学的传播上起着决定性的作用.范·斯霍腾还是一位杰出的教育家,他的学生、大科学家惠更斯,从 1660 年起移居巴黎,在物理学和数学上做出了第一流的贡献.其他学生,如许德(Johann Hudde, 1628—1704)、范·赫拉特(Hendrick van Heuraet, 1633—约 1660)、维特(Jan de Witt, 1625—1672)等,在解析几何及微积分方面都做出了自己的贡献.

17 世纪末,由于荷兰经济恶化,大学教学及科研趋于衰微.约翰·伯努利曾在格洛宁根大学任教 10 年(1695—1705),也没能挽回这种颓势.个别数学家也学过牛顿和莱布尼茨的微积分,但是成就不大.

有意思的是,荷兰数学会的前身阿姆斯特丹数学会(Amsterdam Wiskundig Genootschap)于 1778 年成立,较之英、法、德、美的相应组织要早得多,这大体是一个教师的组织.而荷兰王家科学院直到 1851 年才成立,从此之后,荷兰的科学才开始再次步入繁荣时期.

4.2 德国

比起英、法两国来,在 19 世纪以前,德国的科学与数学则大

大落后了.德国拥有多所历史悠久的大学,但由于教学内容陈腐,教学方法陈旧,很难培养出好的科学家来.

17世纪下半叶,德国最好的数学家是莱布尼茨,他没有受到正规的数学教育,而其成就当有赖于他在巴黎居留的时光(1772—1776).他对德国乃至欧洲大陆数学的影响在于他创办了德国第一个学术刊物《博学者学报》(*Acta Eruditorium*)(1682—1782),并建议普鲁士王成立柏林科学院.柏林科学院于1701年正式成立,但直到腓特烈大王(Friedrich Ⅱ,1712—1786,1740—1786年在位)即位后,才成为欧洲科学中心之一.

莱布尼茨的朋友车恩豪斯(Ehrenfried Walther von Tschirnhausen,1651—1708)出身贵族,也是在国外学习的,他先去莱顿,后去巴黎,还访问过伦敦,并结识了不少国际知名的数学家,这使他接近数学前沿,并在代数上取得了一定成就.

1740年腓特烈大王即位后,恢复并扩大柏林科学院,先后邀请欧拉(1741—1766)及拉格朗日(1766—1787)来柏林科学院工作,使柏林成为欧洲的数学中心,其期刊《柏林科学院历史》和《柏林科学院文集》登载了许多重要的论文.

德国科学家兰伯特(Johann Heinrich Lambert,1728—1777)是一位博学多才的学者,除数学外,在哲学、心理学、天文、气象、物理等方面也有贡献.他从1765年起在柏林科学院工作,直到去世.

1786年腓特烈大王去世后,柏林科学院也随之衰落,这反映出德国科学的特点在于其分散性和发展不平衡性.18世纪的德国被分成几百个小国,各自为政,当君主赞助科学、文化事业时,它们才能得到很好的发展.利奥波德一世(Leopold I,1640—1705)在1658—1705年间为神圣罗马帝国皇帝,1687年他把在

哈勒成立的科学会(1652)变成神圣罗马帝国的科学院,地点不定,到19世纪又回到哈勒,被称为利奥波德科学院.著名的格廷根大学于1737年建立,1751年汉诺威政府建立格廷根科学会(19世纪改为科学院),并发行《纪事》(*Commentarii*),到1833年改称为《院报》(*Abhandlungen*),并一直延续至今,其上登载了许多著名数学家的论文.巴伐利亚在1759年以柏林科学院为模式,建立了慕尼黑科学院,后改为巴伐利亚科学院,其期刊《院报》于1763年创刊.

不过,18世纪的德国并没有培养出自己的杰出数学家.高斯是天才,他不是教出来的.高斯的两位老师凯斯特纳和普法夫(Johann Friedrich Pfaff,1765—1825)是当时德国最好的数学家.凯斯特纳从1756年到去世,一直占据格廷根大学的教授席位,他的影响主要来自教学和著作,特别是他的《数学初阶》(*Mathematische Anfangsgründe*),对数学普及有一定影响.尤其是他对平行理论的兴趣,在德国引起小小的热潮,可能对高斯也有一定的影响,并促使高斯产生非欧几何的观念.普法夫于1788—1810年在海尔姆斯台德大学任教授,其间曾教过高斯.普法夫深受欧拉的影响,并编过欧拉的遗稿.他的《分析研究》(1797)是德国最早的微积分教程.

4.3 瑞士

18世纪瑞士产生了一批杰出的数学家.伯努利家族三代产生了8位数学家,其中雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli,1654—1705)和约翰·伯努利对数学分析的发展起着决定性的作用,他们先后在巴塞尔大学任教授.约翰·伯努利的学生欧拉是18世纪最伟大的数学家,但他不到20岁就离开巴塞尔,去圣彼得堡

科学院工作,正是圣彼得堡科学院以及柏林科学院为他提供了优越的条件.巴塞尔的另外一位数学家赫尔曼(Jakob Hermann,1678—1733)也对解析几何和莱布尼茨的微积分加以发展,他曾在意大利帕多亚及博洛尼亚任教授,1724—1731年在圣彼得堡科学院任职.

除了巴塞尔的数学家之外,克拉梅(Gabriel Gramer,1704—1752)在代数、几何与概率方面有一定贡献.他出生在日内瓦,同各国数学家有着广泛的交往.

此外,在俄国圣彼得堡科学院还有一些数学家,其中最著名的是欧拉,他前后两段时期(1727—1741,1766—1783)在圣彼得堡科学院工作,对俄国科学的发展有着极大的促进作用.他与德国人哥德巴赫的来往有着重要的历史意义.

第3章　符号代数学

近代数学是以符号化为其显著特征的，而这特别以近代代数学为其典型代表．早期的近代代数学的产生是两种潮流相结合的产物：一是数值计算过程的符号化；二是数系的拓广．这两个方面都经历了漫长的过程．前者到18世纪中期才稳定下来，而后者直到19世纪中期仍有一些学者持有异议，不过这时以方程论为中心的代数学已发展到比较成熟的地步．

数学史家纳塞尔曼(G. H. F. Nesselmann，1811—1881)认为，代数符号化过程经历了言辞代数、缩写代数、符号代数三个阶段．其实任何数学分支的符号化大抵都经历了类似的阶段，而且各阶段往往相互重叠，并不能截然分开．

1　数学的符号化

数学分支的符号化大致可分为以下五个部分：

(1)对象的符号化，首先是数字的符号化．由于印度—阿拉伯数码的引进，并于15世纪在欧洲普遍推广，到16世纪，现在普遍使用的位值制及十进小数记数法也得到了广泛应用，这大大推动了计算技术的发展．

(2)运算的符号化．加、减的符号“+”、“-”，早在15世纪中

期就已经有了,16世纪已被普遍使用.乘、除的符号则稍晚,根号在17世纪也已产生,乘幂的符号到19世纪初才固定下来.

(3)关系的符号化.等于、大于和小于的符号是16世纪中期开始引进的.

(4)区别已知量、未知量和未知量系数的符号,这是韦达的最大功绩.

(5)更一般对象的符号化.例如,集合、曲线、方程、函数、语句的符号化则是比较晚的事,一般到18世纪乃至19世纪才开始引进.

如果只把符号化看成一个以字母代表数字的过程,那就太简单了.实际上,符号化包含了计算对象(例如数)可以扩大到什么程度,也就是数系的扩大化的问题,另外还包含了运算的形式化或程序化及规则的公理化.这些不仅可以用于数、量的计算上,同时还可以应用于更一般的对象上.经过这样的处理,我们可以说一门学科得到了代数化.而代数化则直接导向数学的机械化,这开辟了构造数学的新方向.

2 韦　达

韦达,1540年出生于法国旺代省丰丹内·勒·孔德的一个信奉天主教的家庭.他的父亲是法官,母亲也来自上层阶级.韦达先在家乡的法朗西斯教派学校受教育,后到普法蒂埃大学学习法律,并于1560年取得法学学士学位.其后返回家乡当律师,24岁时曾为信奉新教的贵族夫人安东涅特当法律顾问,并对她的女儿凯瑟琳的教育十分热心,后来韦达成为凯瑟琳的终身密友.他在1564—1568年间的教学内容于1637年以《宇宙图原理》为

书名出版.他的另一部天文学著作《天体调和论》据称已不幸丢失.1572年他任布列塔尼议会议员.当时天主教与新教(雨格诺派)的斗争十分尖锐,1572年发生了天主教徒诱杀新教徒的圣巴特罗缪之夜的大屠杀,凯瑟琳的丈夫及拉姆斯均被害.后者是把数学引入巴黎大学的教学以及确立三段论法推论规则的著名逻辑学家.1574—1584年韦达成为法国国王亨利三世(Henri Ⅲ,1551—1589,1574—1589年在位)的顾问及外交代表.由于在政治上受到反对派的排挤,1584—1589年间他赋闲在家.1589年亨利三世重新任用他,但没让他回巴黎而在图尔任职.不久亨利三世遇刺,亨利四世(Henri Ⅳ,1553—1610,1589—1610年在位)继续任用他.

1589年在对抗西班牙的战争中,法国截获了一封由西班牙军官莫罗给国王菲力普二世(Felipe Ⅱ,1527—1598,1556—1598年在位)的密信,信是用密码写的(密码共有413组,每组两三个字母或两个数码,还划上点、线),这封信的日期是1589年10月28日.亨利四世交给韦达破译,他立即部分破译,其余的直到1590年3月15日才完全解决.菲力普二世失利后向教皇控诉说,法国人背弃基督教信仰,使用魔术战胜了他们.这给教皇留下了深刻的印象.

1593年荷兰驻法大使向亨利四世提出了由荷兰数学家范·罗门(Adriaan van Roomen,1561—1615)提出的数学问题,即求解45次方程

$$45x-3\,795x^3+95\,634x^5-\cdots+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=N,$$

并认为法国无人能解.国王召见韦达并让他解,韦达立即看出这个方程是把 $\sin 45\theta$ 表成 $\sin\theta$ 的多项式展开式,由此立刻可得出23个解来(他不承认负解).韦达反过来向范·罗门提出了阿波

隆尼斯问题,两人各自用不同的方法得到了解,从此两人结下了亲密友谊.韦达担任王室顾问一直到1602年.1603年2月23日他在巴黎去世.

韦达是一位典型的业余数学家,他有两段时期没有公职,赋闲在家,一段时期是1564—1568年,另一段时期是1584—1589年.在前一段时期,他主要研究天文、历法及三角术,并写了不少著作,发表的主要著作是《数学宝典、应用于三角形及附录》(*Canon Mathematicus, seu ad triangula cum appendicibus*)(1579).这本书首次把球面和平面三角术系统化,整理了三角公式,并给出精确到五位小数的三角函数表.这些著作把代数学系统化,使近代代数学发展到一个新阶段.特别是韦达在该书中研究了把$\cos n\theta$,$\sin n\theta$表为$\cos\theta$,$\sin\theta$的多项式的方式,对于$n=1,2,\cdots,9$,他给出了表示$\cos n\theta$的明显公式,这启发他后来产生了用三角函数解三次方程的想法.牛顿在1663年读了韦达的这部著作后,得出了联系$y=\sin n\theta$与$x=\sin\theta$的一般等式

$$y=nx-\frac{n(n^2-1)}{3!}x^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}x^5-\cdots$$

当n为奇数时,它变成多项式关系,且当$n=4m+1$时,可以得到

$$x=\frac{1}{2}\sqrt[n]{y+\sqrt{y^2-1}}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{y-\sqrt{y^2-1}}.$$

在1584—1589年间,韦达研读了丢番图、塔塔利亚、卡尔达诺、邦别利、斯蒂文等人的著作,发展了他们的思想,对符号代数学做出了突出的贡献.其后,他自费出版了一系列著作,其中包括1591年出版的《解析法入门》(*In artem analyticem Isagoge*),这是第一部符号代数学的系统著作.

韦达于1591年写成、到1615年才出版的《论方程的整理与修正》(*De aequationem recognitione et emendatione*)提出了解三次、四次方程的一般方法.

他在1593年出版了《几何学补充》,其中应用了代数和三角求解几何问题.1600年出版的《高次方程的数值解法》(*De numerosa potestatum resolutione*)提供了用逐步逼近法求解方程根的系统程序,这个方法大约到1680年才被普遍使用,但这个方法相当繁复,不太实用.

韦达同近代许多数学大师(如费尔马、笛卡尔等)一样,充满了文艺复兴时期那种对于古典文献极为崇尚的精神,对于古典文献中失传的部分总是力求恢复其本来面目.他们在这方面有许多方法上的创新.尤其是韦达,在帕普斯的方法和丢番图的方法之外,又提出了第三种方法,他称之为导引法(exegetic),即通过解方程求未知量的步骤.在《求解五书》(*Zeteticorum libri quinque*)(1593)中,他解释了他如何通过各种分析方法求解确定方程和不定方程的问题.

3 符号代数学

代数与算术、数论和几何都不同,它的对象一直变动不居,它与相邻学科的边界也是模糊不清的.在历史上,它至少有三次"近代化",也就是在代数的名称之前加上"近代"一词,而且每次都对代数领域有所扩大,甚至产生基本变革.第一次是符号代数或字母代数的产生;第二次是19世纪中叶不变式论的创立;第三次是1930年抽象代数学的诞生.

在第一次近代化之前,代数通常追溯到丢番图,在他的《算

术》中包括了大量的求解方程的问题.而在这之前,求解特殊的一次、二次数字方程的问题已经有不少,由于古希腊用的是几何方法,因而称之为“几何(式)代数”.丢番图的“代数”与此前的相比,有两个不同的特点:一是题目的来源和方法与几何部分脱钩,二是相当程度的符号化.从那时起,中国、印度、阿拉伯的代数有一定的发展,其主要问题几乎完全摆脱掉几何背景,而在解法上实现程序化、算法化.16世纪,在三次、四次方程求解取得突破之后,代数学再次产生飞跃.

16世纪意大利代数学的集大成者是邦别利,他在1572年出版的《代数学》是对前人工作的总结.当时出版的只有3卷,其第4、5卷直到1929年才由意大利数学史家博托洛蒂(Ettore Bortolotti,1866—1947)编辑出版,这两部分是“几何学部分”,讨论了意大利代数的符号演算,并正确指出了它们与图形的关系,这超出了希腊几何(式)代数的想法而接近笛卡尔的思想.在邦别利发表的3卷中,第1卷是开平方、开立方的理论,大大扩充了欧几里得《几何原本》第10篇的“量论”.第2卷系统地论述了二次、三次、四次方程理论,其中还对三次方程的“不可约”情形作了根本的改进.他证明,如果三次方程

$$x^3 + mx = n$$

中

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$$

为负数,则方程有三个实根.邦别利对代数学符号也有一些改进,这使他成为由意大利代数学到法国符号代数学的最主要的过渡人物.

虽然到16世纪后期,算法代数已经相当成熟,但是符号的

混乱和随意使用造成了学术交流及进一步发展的障碍.实际上,在丢番图之后,为了简化语言,各种符号层出不穷.这时,符号化造成了语言的多样性,因此当务之急是统一语言,统一标准,统一规则,而这正是韦达所完成的,他可以说是符号系统的立法者.但是,只是建立符号系统还不足以使韦达成为近代代数学之父,他还把符号代数称为类的计算技术(logistica speciosa),与过去的算术即数的计算技术(logistica numerosa)划定一条明显的界限,为代数学的发展开辟了广阔的前景.

符号代数学的划时代著作是韦达在1591年出版的《解析法入门》,这本书共分8章,其中把解析法分为三类:

①把问题化成方程的方法;

②由方程推出定理的方法;

③解方程的方法.

韦达在该书的末尾讲,如果使用这三种方法及原则,就没有解决不了的解析问题.他把计算分成两类,除了原先的数值计算之外,还加进了符号计算,从而把计算推广到一般的量及类上.在第2章中,他提出了支配符号计算的6条规则以及有关比例的8条规则.在第3章中,他把未知数或未定的量和已知的量用不同类型的字母来表示,以示区别.他用元音(母音)字母(如A,E,I,O,U等)来表示未知量和已知量,而用辅音(子音)字母(如B,C,D,F,G等)来表示已知数量.不过,他考虑的量受到因次的限制,认为只有用同次的量才能比较.另外,他所用的符号仍不彻底,这是他的符号代数的不足之处.1628年笛卡尔把古人的几何分析方法同近代人的代数结合而形成统一的普遍数学,这才彻底完成了符号代数,并产生了各种应用.

符号代数学在英国为哈里奥所奠定,他的著作《实用分析

术》(*Artis analyticae praxis*)在 1631 年出版,其中系统阐述了韦达等人的观点,并改进了一些符号,还引入了新的符号(如 >, <),同时着重讨论了方程论.同年,奥特雷德的《数学之钥》(*Clavis Mathematicae*)出版,他更加注意数学符号,他造出的符号超过了 150 个,特别是乘法符号(×),一直沿用到现在.奥特雷德影响了其后许多英国数学家及科学家,其中他的代数学影响了沃利斯以及牛顿等人.

韦达的符号系统的思想虽然很伟大,但是他所用的符号却很落后.其后,哈里奥、奥特雷德以及吉拉尔(Albert Girard, 1595—1632)有所改进,但仍然不能达到统一.近代数学的大师们,如笛卡尔、牛顿和莱布尼茨等,在这方面继续努力,特别是莱布尼茨,他在数学符号化方面的思想最为深刻.莱布尼茨对各种记号进行了长期的研究,听取各方面的意见,最后选定了较好的符号体系.他认识到,好的符号可以大大节省脑力劳动.他的微积分符号系统就是十分先进的.不过,大家都统一采用一种符号体系却经历了漫长的历程,到欧拉时代,代数的符号系统才基本定型,同我们现在所用的已经相差无几了.

韦达的代数思想还有另外的深刻之处,就是不仅仅把代数看成是符号算术,尽管开始时不过如此.代数一经符号化,计算对象就逐步得到推广.首先是由特殊的数到一般的数,然后推广为可计算的量,这就涉及到数系的拓广.最后是一般的对象,它们比数、量更抽象,也不一定遵守数、量计算的规律,这就为抽象代数学的产生和发展埋下了伏笔,从而大大扩大了代数学的领域.

在 19 世纪末之前,代数学的内容还包括数系的拓广.这个漫长的过程反映出西方数学思想上的种种限制.第一个限制是

几何上的限制,也就是齐性的限制.韦达还接受这个限制,到笛卡尔才打破.第二个限制是负数,韦达完全不用负数,笛卡尔部分地接受负数,这显然使符号代数的威力大打折扣.到19世纪中叶,还有人反对负数.在这方面,吉拉尔把正数和负数等量齐观的想法是极为先进的,他能够接受虚根也大大超出了当时的思想水平.第三个限制是无理数,斯蒂文、笛卡尔及沃利斯承认无理量是数,但是帕斯卡、巴罗及牛顿则持保守的观点.正是这些限制及其突破,反映了西方数学发展的曲折历程.

4 代数方程论

在符号代数出现之后,人们从几个方面对代数方程进行了研究.一是继承古代代数学的方向,对特殊方程求数值解.二是求方程的算法解,并把特殊的算法纳入一般的公式之中,在这个过程中发展了许多代数技巧.三是在上述研究过程中对方程本身进行探讨,形成了方程论这一分支,这一分支主要讨论根的存在性、各种根的数目、根与系数的关系等.四是探讨高次方程的解法.

4.1 方程根的数目

方程论开始于"方程究竟有多少根"的问题,显然这个问题同"什么根是合法的"问题有关.卡尔达诺引进了复根,但是他和韦达、哈里奥、笛卡尔等人一样,只考虑正根,而不考虑负根.只有到吉拉尔才认识到负数的意义并承认虚根,这样方程论的问题才有了一个讨论的基础.不过在历史发展过程中,直到19世纪仍有许多人对这些问题坚持不合理的意见,或者一味盲目地

求解，对他们来说，方程论只不过是一种多余.

代数方程根的数目到底有多少？卡尔达诺一度曾认为一个方程可以有任意数目的根，后来才认识到三次方程可能有 3 个根，四次方程可能有 4 个根等. 吉拉尔在他的《代数的新发明》(*Invention nouvelle en algebre*)(1629)中曾推测，如果把不可能的根(即虚根)计算在内，并按重数计算重根的数目，则 n 次方程有 n 个根. 笛卡尔在《几何学》(1637)第 3 篇中也有类似的说法. 由于长期以来排除虚根，问题就变成实系数多项式是否总能分解为线性因式及二次因式的乘积. 莱布尼茨、哥德巴赫等人认为这是不对的，而达兰贝尔和欧拉却试图加以证明，但他们的证明都不完全. 1772 年拉格朗日声称他完成了欧拉的证明，但实际上由于对复根的性质的认识仍然模糊，他的证明仍不完全. 直到 1799 年，高斯在他的博士论文中才首次证明"代数学基本定理"，他实际上证明的是"n 次多项式能表为一次及二次实系数因式的乘积". 他在论文中先批评达兰贝尔、欧拉及拉格朗日的工作，然后给出了自己的证明. 他在证明中运用了复数的几何表示及曲线的拓扑性质，但从现在的观点来看，仍不够严密. 高斯后来又发表了另外三个证明(1815，1816，1850)，最后一个证明更为一般，对于系数容许复数情形. 其后，许多大数学家均对代数学基本定理给出新的证明，特别是"复变函数论"得出了比较漂亮的证明，至今已有几十种证法. 高斯的工作是数学中的第一个存在性定理，首先体现了现代数学中存在先于构造的精神.

代数学基本定理在数学上占有极其重要的地位，这表现在：

(1)计算性数学除演算、求解之外，还需要研究演算理论和演算对象理论.

(2)除了从考虑特殊方程的解到研究一般方程的算法之外，

还要引入普遍的存在性问题.

(3)由于根的数目产生负根、虚根、复根的合法性问题,由此引出实数和复数的代数、分析及拓扑问题.

(4)最后形成数域以及“代数封闭性”的观念,这在抽象代数学中是最基本的概念.

4.2 正根、负根、实根、复根的数目

卡尔达诺曾指出实系数方程的复根是成对出现的,牛顿在《通用算术》(1707)中证明了这一点.关于正根的个数,笛卡尔在《几何学》(1637)中陈述了所谓的笛卡尔符号法则:正根的个数最多等于系数变号的次数,负根的个数最多等于两个正号及两个负号连续出现的次数. 1741 年法国数学家加德马尔弗(Jean Paul de Gua de Malves,1712—1786)证明了这个法则.他还证明了有关复根数目的定理:如果方程的 $2m$ 个相继系数为零,则按其前后两项系数同号或异号,方程有 $(2m+2)$ 个或 $2m$ 个复根.

不过,人们最感兴趣的问题是:

(1)一个给定的实系数方程是否有实根;

(2)如果有的话,实根的精确数目是多少;

(3)在区间 $[a,b]$ 内有多少个实根.

这方面的进展通常归为比当定理:实系数多项式在区间 $[a,b]$ 内根的个数等于 $f(x+a)$ 的系数变号数减去 $f(x+b)$ 的系数变号数.如果 $f(x)$ 的根不全是实数,则根的数目等于这个差或比这个差小一个偶数.不过比当(Ferdinand Francois Désiré Budan de Boislaurent,1761—1840)在 1811 年向巴黎科学院递交论文时,傅立叶早在 1787 年就已经知道了这个定理,并于 1796 年、1797 年、1803 年在巴黎综合工科学校上课时讲授过,他在

1820年发表的论文中给出过完整的证明，并在他去世后由纳维尔(Claucle-Louis-Marie-Henri Navier，1785—1836)整理出版的《确定方程分析》(1831)中引用过．而比当的论文到1822年才发表．这方面最完整的结果属于原籍瑞士的数学家斯图姆(Charles-Francois Sturm，1803—1855)，他在1829年宣布了这个结果，但没有给出证明，其证明在1835年发表．斯图姆定理用所谓的斯图姆序列来考虑问题：

设$f(x)$是实系数而无重根的多项式，

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

则$f(x)$的导数$f'(x)$定义为

$$f'(x)=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1},$$

令$f_1(x)=f'(x)$，定义$f_2(x)$为$f(x)$除以$f_1(x)$后所得余式反号后的多项式，$f_3(x)$为$f_1(x)$除以$f_2(x)$后所得余式反号后的多项式，如此下去，可得到斯图姆序列

$$f(x),f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x),c,$$

用两实数$a,b(a<b)$代入，得到两个实数序列：

$$f(a),f_1(a),\cdots,f_{s-1}(a),c;$$

$$f(b),f_1(b),\cdots,f_{s-1}(b),c.$$

斯图姆定理证明，$f(x)$在区间(a,b)内的实根数恰巧等于前一实数序列的变号数减去后一实数序列的变号数．其后，西尔维斯特(James Joseph Sylvester，1814—1897)等人推广了这个定理．雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi，1804—1851)、西尔维斯特、埃尔米特(Charles Hermite，1822—1901)不约而同地对“决定没有平方因子的实系数多项式的实根数目”这个问题产生兴趣，他们从不同的观点出发，得出了下面这个定理：

定理:f 的实根数目等于迹形式的符号差.

西尔维斯特于 1853 年首先发表了这个定理.根据波尔沙特(Carl Wilhelm Borchardt,1817—1880)发表于 1857 年的论文,雅可比已在 1849 年证明了这个结果.不过,雅可比的信件和笔记到 1857 年才发表.埃尔米特的结果在 1856—1857 年发表,他还定出 f 在区间$[a,b]$上的实根的数目.虽然这个定理已很少为人所知,但其工具迹形式却由于与上同调不变量有关而成为当今的热点.

关于复根的分布,首先是柯西在 1831 年得到的.

4.3 根与系数的关系

在研究代数方程的解时,许多数学家已经察觉到根与系数之间的关系.对于三次方程,卡尔达诺已知在某些情形下三个根的和等于 x^2 系数的负值.韦达在 1615 年出版的著作中则明确指出了这一点,并察觉到根与系数的一些其他关系,哈里奥也得出了类似的结果.但是,他们对负根及虚根的看法,使他们没能得出一般关系.直到 1629 年,吉拉尔才明确陈述了根与系数之间的一般关系,因为他承认负根及虚根,而且知道如何求出根的平方和、立方和及四次幂之和.而真正的一般关系,直到牛顿才完全确立.牛顿不仅了解根与系数之间的关系,而且还建立了对称函数理论.对于

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

如果 S_i 为 n 个根的 i 次幂之和,则当 $k \leq n$ 时,

$$S_k + a_1 S_{k-1} + \cdots + a_k k = 0;$$

而当 $k > n$ 时,

$$S_k + a_1 S_{k-1} + \cdots + a_{n-1} S_{k-n+1} + a_n S_{k-n} = 0.$$

这两个公式被称为牛顿恒等式. 它们首先在《普遍算术》(*Arithemetica Universalis*)中发表. 该书出版于1707年,但牛顿是在1673—1683年撰写的,是为了去剑桥大学讲课而准备的.

5　五次方程的求解

16世纪上半叶,在数学界给出了三次方程及四次方程的代数解法之后,数学家开始向高次方程进军. 从这时起,直到证明一般五次方程不可解,经历了漫长的300年,其历史也错综复杂. 为了明确起见,我们把数学家研究的动向归纳如下:

(1)一开始试图用统一的观点来看二次、三次、四次方程的解法,从中找出一些规律,其中包括对方程论的研究.

(2)17世纪到18世纪最重要的办法是:

①化简方程,使方程变得简单. 这有两种趋向,一是把解方程同多项式分解因子联系起来,从而只考虑不可约方程;二是如同解三次、四次方程那样,把方程的尽可能多的系数变成零. 不过,为了得到化简的方程,往往需要解新的方程.

②研究最简单方程的解法,其中主要是二项方程

$$x^n - a = 0.$$

(3)1770年,华林、范德孟(Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735—1796)和拉格朗日几乎同时在这个问题上迈出了一大步. 特别是拉格朗日引进了几个重要概念:首先是由根与系数的关系以及对称函数概念得出置换的概念,这是后来方程论研究的关键,其次是预解式的观念. 其后,高斯对分圆方程的研究也很重要.

(4)拉格朗日已发现用根式解五次方程有原则性困难. 鲁菲

尼已着手证明五次方程不可解,而阿贝尔是第一位扭转方向的人,伽罗华更进一步把方程论和置换群论结合起来.

5.1 一般方程

自从费拉里在 1545 年把四次方程约化为三次方程从而求出四次方程的根式解之后,不久就开始考虑高次方程的简约问题.首先研究一般方程的解的是笛卡尔,他在《几何学》(1637)中把五次、六次方程归为一类,并用图解法求根.笛卡尔还知道如果$(x-a)$整除多项式 $P(x)$,则 a 是 $P(x)=0$ 的根.他的思想为荷兰数学家许德所发展,许德没能使五次方程的次数降低,也没有探索一下其原因,但他用代换 $x=y+z$ 来简化三次方程的解.许德对莱布尼茨有一定影响.

莱布尼茨考虑过解五次方程,但没有成功.他的朋友车恩豪斯在 1683 年提出,通过一个多项式变换 $y=p(x)$,可以消去 n 次方程中$n-1$ 次项和 $n-2$ 次项的系数.对于三次方程,车恩豪斯提出,用变换 $y=x^2+ax+b$ 可以把一般三次方程化简成$y^3=K$,而四次方程也能用这个变换化简成 $y^4+by^2+q=0$,从而都能变成可解的形式.这样一来,就给三次方程和四次方程带来新的解法.车恩豪斯的想法似乎给解一般的 n 次方程带来希望,不过到五次方程就碰壁了.瑞典数学家布瑞英(Erland Samuel Bring,1736—1798)在 1786 年求出一个车恩豪斯变换,不仅能把一般的五次方程化简为 $x^5+ax^2+bx+c=0$,还能更进一步化简为 $y^5+py+q=0$.可是,这种形式的五次方程还是没有一般解法.车恩豪斯希望能通过多项式变换 $y=p(x)$把一般 n 次方程化简为$y^n-A=0$ 型的可解的二项方程.不过化简方程的根 y 虽然可以解出来,但是解原来方程的 x,就需要解一个次数更高

的方程 $P(x)-y=0$. 比如,将一般五次方程化为 $y^5-A=0$ 的变换方程 $P(x)$是一个六次方程,这就导致了恶性循环,结果五次方程还是无法解.

关于解一般代数方程的问题,经过欧拉等人的努力,在1770年取得重大突破,这个突破是由法国数学家范德孟和拉格朗日分别在1770年独立作出的.范德孟的论文呈交给巴黎科学院,但1774年才发表.拉格朗日的论文于1770—1771年递交给柏林科学院,并于1772—1773年发表.他们的思想接近,都引进了置换和预解式等重要概念,但其具体预解式稍有不同.另外,拉格朗日的结果更为明确且一般,成为以后方程论发展的基础.

拉格朗日的220页的大论文《关于方程的代数解的思考》从各个角度研究了二次、三次、四次方程的已知解法,从一般的角度来概括它,并试图讨论更高次方程的代数解法.

首先,拉格朗日考虑一般三次方程的根的表示法.对于三次方程

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,$$

三个根可表为

$$x_1=-\frac{1}{3}a_1+W_1+W_2,$$

$$x_2=-\frac{1}{3}a_1+\omega W_1+\omega^2W_2,$$

$$x_3=-\frac{1}{3}a_1+\omega^2W_1+\omega W_2,$$

其中

$$W_1=\sqrt[3]{-\frac{1}{3}a_3+\frac{1}{6}a_1a_2-\frac{1}{27}a_1^3+\frac{1}{18}\sqrt{D}},$$

$$W_2=\sqrt[3]{-\frac{1}{3}a_3+\frac{1}{6}a_1a_2-\frac{1}{27}a_1^3-\frac{1}{18}\sqrt{D}},$$

$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$，它是 1 的本原三次根，

$\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$，

D 为方程的判别式，

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 - 4a_2^3 + 18a_2 a_3 - 27a_3^2.$$

拉格朗日考虑到，如果我们能解 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ 之类表达式所满足的方程，也就可以得出原方程的解. 他注意到，表达式 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ 在三个根 x_1, x_2, x_3 的循环置换之下，相当于分别乘上 ω 和 ω^2. 例如，循环置换 x_1 换成 x_2，x_2 换成 x_3，x_3 换成 x_1，上述表达式换成 $x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1$，它无非就是 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ 乘上 ω^2. 因此，$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$ 在任何 $x_i(i = 1,2,3)$ 的循环置换下，都保持不变. 于是，他考虑 $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ 这种表达式所满足的方程. 拉格朗日看出，通过根的置换，共得出六个不同的表达式，分别用 $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ 来表示，即

$$t_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3,$$

$$t_2 = \omega x_1 + \omega^2 x_2 + x_3 = \omega t_1,$$

$$t_3 = \omega^2 x_1 + x_2 + \omega x_3 = \omega^2 t_1,$$

$$t_4 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3,$$

$$t_5 = \omega x_1 + x_2 + \omega^2 x_3 = \omega t_4,$$

$$t_6 = \omega^2 x_1 + \omega x_2 + x_3 = \omega^2 t_4.$$

这六个值 $t_1,\cdots,t_6$ 当然满足六次方程

$$f(x)=(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)(x-t_4)(x-t_5)(x-t_6)=0.$$

拉格朗日把这个方程称为预解方程,因为如果能够求出预解方程的根 $t_1,t_2,\cdots,t_6$,则不难得出方程的根 x_1,x_2,x_3. 预解方程的系数,显然是 $t_1,t_2,\cdots,t_6$ 的对称函数,因此也是 x_1,x_2,x_3 的对称函数,从而可以通过原来三次方程的系数表示出来.

由于这个六次方程的六个根满足一些关系,如 $t_1=\omega^2t_2=\omega t_3$, $t_4=\omega^2t_5=\omega t_6$,由此推出:

$$t_1^3=t_2^3=t_3^3,t_4^3=t_5^3=t_6^3,$$

即 $(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)^3$ 在 x_1,x_2,x_3 的所有六种置换之下只取两个值,或者原来六次方程可化简为二次方程. 求出二次方程的根之后,不难得出原三次方程的根. 从这个思想出发,他进而考虑四次方程,他从 $x_1x_2+x_3x_4$ 出发,在四个根的24种置换之下,可以取三个不同的值,从而原四次方程可以化简为三次方程.

拉格朗日进而证明一般的定理:如果一般 n 次方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根的有理函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 容许另一函数 $\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的所有置换,也就是使函数 ψ 不变的根的置换也使函数 φ 不变,则函数 φ 可用函数 ψ 及原方程的系数有理表出. 他还证明,如果函数 φ 不容许函数 ψ 的所有置换,但在函数 ψ 容许置换下取 r 个不同的值,则函数 φ 是一个 r 次方程的根,其系数是函数 ψ 及原方程系数的有理函数. 于是,一般方程通过解一系列预解方程,可以一步一步解出来. 拉格朗日对于二次、三次、四次方程寻找低次的预解方程获得了成功,但要解五次方程需要解一个六次预解方程. 因此,拉格朗日被迫承认,用代数运算解一般高次方程看来是不可能的. 拉格朗日虽然未

能把问题彻底解决，但他的贡献开辟了后来的两大方向：一是求证一般五次方程的确代数不可解，二是置换理论，一开始是研究函数在置换下取值的数目．后一个问题之所以重要，是因为如果根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的有理函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在根的置换之下可取 s 个值 $f_1,\cdots,f_s$，则它们是 s 次辅助方程

$$(t-f_1)(t-f_2)\cdots(t-f_s)=0$$

的根．如果辅助方程可解，譬如说 s 较小，原方程也可解出．拉格朗日认为，在所有 n 个根的置换（共有 $n!$ 个）中，如果有 p 个使 f 保持不变，则函数在所有置换下的取值数目是 $\frac{n!}{p}$．如上所述，f 是 $\frac{n!}{p}$ 次方程的根，这时 s 被称为使 f 不变的子群 H 的指数．拉格朗日已经证明：当 $f=x_1x_2+x_3x_4$ 时，指数为 3，f 是三次方程的根．这就构成了他解四次方程的基础．

鲁菲尼的研究继承了拉格朗日的思想，他仔细考虑使有五个根的有理函数 f 不变的置换数 p，证明当 $n=5$ 时，$\frac{n!}{p}$ 可取值 2,5 或 6，而不能取值 3 或 4，因此若 $\frac{n!}{p}\neq 2$，则必定被 5 除尽，五次预解式不能约化成二项方程

$$x^5-m=0,$$

从而一般五次方程不能根式解．但是他有一个假设：方程的根式解总可以选为方程的根及某些单位根的有理函数．而完成对这个定理的证明的是阿贝尔．鲁菲尼对五次方程不可解性的证明受到同时代数学家的怀疑，但数学史研究表明，他在置换群理论方面的工作的确有着重大的历史意义．

5.2 二项方程

对于代数方程的研究，除了一般方程之外，还包括对一些特

殊方程的求解,其中研究最多的是二项方程 $x^n - A = 0$,特别是 $x^p - 1 = 0$,其中 p 是素数.这个方程常被称为分圆方程,显然它与把单位圆分为 p 等份及正 p 边形的作图问题有关.在复平面上,单位圆上如果 1 是一个根,则其他 $p-1$ 个分点的复数值就是 $x^p - 1 = 0$ 的其他 $p-1$ 个根.早在 18 世纪,已知这些根的解析表达式为

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{p}, k = 0,1,2,\cdots,p-1.$$

这个公式当然对一般的 n 也成立.棣莫弗、欧拉都知道这样的表示.但问题是这种表达式是否可以表为根式解.1770 年,华林、范德孟及拉格朗日都研究过这个问题.范德孟断言,每个形如 $x^p - 1 = 0$ 的方程均可用开根解出,但他只验证了 $p \leqslant 11$.拉格朗日对一般情形感兴趣,对分圆方程只证明了 $p = 5, p = 11$ 两种情形可以根式解.彻底解决这个问题的是高斯,早在 1796 年,他已通过作出正十七边形得出了 $x^{17} - 1 = 0$ 的解,而后在《算术研究》(1801)中彻底解决了 $x^n - 1 = 0$ 的根式解以及正多边形的尺规作图这两个密切相关的问题.高斯首先把方程 $x^n - 1 = 0$ 的问题归结为素数问题,而 $x^p - 1$ 的根可用一个方程系列

$$z_1 = 0, z_2 = 0, \cdots$$

的根有理表出,$z_1, z_2, \cdots$的次数正好是 $p-1$ 的素因子.高斯先证明后面方程的系数可表示为前面方程根的有理函数,然后再证明这些方程可用根式解,从而所有分圆方程也可用根式解.实际上,这种思路对后来的阿贝尔和伽罗华也有重要影响.

与此相关的是,高斯解决了尺规作正 n 边形问题.历史上有许多人试图用直尺和圆规作正七边形、正十一边形等图形,但都没有成功.高斯找到了作正十七边形的方法后,他的老师、格

廷根大学教授凯斯特纳根本不相信,并把他赶了出去.这说明这个问题在当时是何等重要.在《算术研究》第 366 节中,高斯断言:一个正 n 边形可用尺规作图,当且仅当 $n=2^l p_1 p_2 \cdots p_m$,其中 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是费尔马素数(即 $2^{2^m}+1$ 型的素数),m 和 l 为正整数或 0.虽然其充分性由高斯关于二项方程的工作可以证明,但对于其必要性,他并没有证明,而且也不显然.第一个证明由法国数学家范采尔(Pierre Wantzel,1814—1848)在 1837 年得到,由此完全解决了三等分任意角问题及倍立方体问题.迄今为止,我们所知道的费尔马素数只有

$$p=3,5,17,257,65\ 537$$

这五个,其他大量正 p 边形均不能用尺规作出.其后,伽罗华理论则完全解决了尺规作图的充分必要条件,即:一个方程的根可用平方根表出,当且仅当方程的伽罗华群的阶是 2 的方幂.但是,有些作图不可能问题则属于超越数论,如化圆为方问题.

第4章　解析几何学

解析几何学的诞生是数学思想的一次飞跃，它代表着几何学与代数学的统一.解析几何学的基本内容是：

(1)引进坐标，使点(乃至更一般的几何对象)与数对应；

(2)使方程与曲线(或曲面等)相互对应；

(3)通过代数方法或算术方法解决几何问题，反过来对于代数方程等给出几何直观的解释.

最重要之点在于(3)，由于几何学的代数化或算术化大大扩展了几何学的研究领域，并弥补了综合方法的不足，为后来数学的发展指出了一条康庄大道.

1　笛卡尔

一般公认，解析几何学的主要开创者是大哲学家笛卡尔.

笛卡尔，1596年3月31日生于法国都兰地区的拉海耶，父亲是布列塔尼议会议员，有相当可观的地产.1604—1612年，笛卡尔在拉夫莱什的耶稣会学校受教育，学习古典语文、哲学、数学和物理.他在这所学校所获得的数学及科学知识，比当时法国多数大学里教的都多.数学科用的是克拉维乌斯的教科书.他毕业后去了其父亲定居的雷恩市，进骑士学校准备服兵役，并著有

《击剑术》一书.1613年他来到巴黎,先住在市区,后为避喧嚣而到郊区的圣日尔曼区居住,这时再次见到马桑.他还结识了数学家迈多热(Claude Mydorge,1585—1647),两人共同研究数学,后又学习音乐.1615年遵父命进普法蒂埃大学学习法律,次年年末获得法学学士学位,毕业后仍潜心于科学研究.其后,他来到荷兰.1617年5月他参加了拿骚的莫里斯的军队,当时荷兰太平无事,他享了两年的清闲.1618年11月,他在布雷达街头看到用荷兰文写的数学难题征答招贴,于是向人请教其内容并得出了解答,这使他意识到自己在科学及数学上的才能.由此,他结识了数学家贝克曼(Isaac Beeckman,1588—1637),两人谈得很投机.他从贝克曼那里学到了不少东西,特别是韦达在代数上的贡献.贝克曼向他提出了一系列问题,特别是力学及声学问题,成为他最早研究的课题.他曾写了《音乐概要》、《论代数》,并向贝克曼请教,两人长期保持着通信联系.这时30年战争(1618—1648)已开始,于是他离开莫里斯的军队,漫游丹麦、波兰,后到德国.1619年7月,他投身于巴伐利亚公爵马克西米连一世(Maximilian I,1573—1651,1597—1651年在位)所领导的天主教联盟的军队,冬天驻扎在慕尼黑以北、多瑙河边的诺伊堡,离乌尔姆不远.在乌尔姆,他结识了数学家福尔哈贝尔(Johann Faulhaber,1580—1635),从他那里学会了德国学派的数值代数学,并写成《立体论》,这可能也是他们讨论的结果,其中有欧拉的多面体公式:顶点数-棱数+面数=2.由于冬天天气极冷,他整天躲在房子里面沉思,这样,《方法谈》(*Discours de la méthode*)的思想已经酝酿成熟.据他自己说,他曾做过三个梦(1619年11月10日),这些梦改变了他的整个生活的面貌,而且导致解析几何学的诞生.1620年冬,他在波西米亚参加了白山战役.在布拉格,

他还了解到第谷·布拉赫(Tycho Brahe,1546—1601)的天文学观测结果.1621年春,笛卡尔在匈牙利服役,同年7月离开军队,经摩拉维亚、德国回到荷兰,次年2月回到法国雷恩.1623—1624年他从巴黎出发来到意大利.1625年春回国,同年6月在巴黎见到了马桑、迈多热,还结识了德萨格(Girard Desargues,1591—1661)、阿尔迪(Claude Hardy,1605—1678)、莫兰(Jean-Baptiste Morin,1583—1656)、德博内(Florimond Debeaune,1601—1652)、伽桑狄(Pierre Gassendi,1592—1655)等人,他们经常在一起讨论哲学、数学及光学.1627年笛卡尔参加了由巴格诺主教主持的讨论会,在会上他发表了自己的方法论观点,受到红衣主教贝律尔(Pierre de Bérulle,1575—1629)的赏识.贝律尔鼓励他著书立说.1628年冬笛卡尔开始写作《探求真理的指导原则》(*Regulae ad Directionem Ingenii*),但当时未写完,直到1701年才出版.1629年初他移居荷兰,在此定居20年,其间搬迁24次,住过13个地方,这期间他写了不少著作,并写了大量书信,其中与马桑的通信在数学史及科学史上很重要.他写的《论宇宙》(*Le Monde*),因1633年罗马教廷对伽利略的判决而没敢发表.1634年开始写《方法谈》及其三个附录《折光学》(*La dioptrique*)、《气象学》(*Les météores*)、《几何学》(*La geometrie*),并于1637年出版,这些是他的数学研究的最主要著作.1638年他研究了对数螺线、旋轮线,求出了旋轮线的法线及面积,并考虑德博内问题,这基本结束了他20年的数学生涯.1638年以后,他主要研究哲学,答复对他的批判,也有一些论战.例如,费尔马反对笛卡尔的《折光学》、《几何学》,而且得到罗伯瓦尔的支持,由此产生了笛卡尔同费尔马的一系列争论.1641年笛卡尔的《第一哲学沉思集》(*Meditationes de prima philosophia*)出版,1644年《哲学原理》(*Prin-*

cepia philosophiae)出版,这些也是他主要的哲学著作.1649 年应瑞典女王之邀,他离开荷兰来到瑞典.由于每天要在清晨 5 时给女王讲授哲学,他染上风寒并转成肺炎,1650 年 2 月 11 日与世长辞.

笛卡尔除了是一位伟大的数学家外,他更是一位伟大的哲学家和科学家.笛卡尔被称为欧洲近代哲学之父,是唯理主义的始祖.唯理主义虽然与培根的经验主义相对立,但他同培根一样,反对权威,崇尚科学,重视方法,为科学革命奠定了思想基础.他把数学看做哲学方法的典范,正是这种倾向与重视实验的倾向相结合,才把自然哲学提高到科学的高度.他的自然哲学思想从 17 世纪中叶到 18 世纪中叶整整 100 多年间,在法国乃至欧洲占据着统治地位,直到 1740 年之后才为牛顿的学说所代替.

2 解析几何学的产生

朴素的坐标观念在古希腊甚至古埃及就已经有了.希帕楚斯(Hipparchus,前 2 世纪)已开始对天球上的点引进坐标,而在中世纪欧洲,奥雷姆(Nicole Oresme,约 1320—1382)在 1350 年左右引进直角坐标系的原始形式.但有意识地把曲线与方程对应起来并用代数方法解几何问题,则是解析几何学诞生以后的事.

解析几何学的出现标志着方法上的重大进步.用以前的综合方法,每一个问题都要用特定的方法去求解,在许多情况下要求有高度的智慧和技巧.而解析几何学的方法,用统一的语言来表述对象,把几何问题转化为同一种形式——可处理的代数形式,这样可以通过标准化的代数程序使得几何问题得到解决.这

样就为解几何问题提供了一种普遍的方法，而且是一种机械化的方法.这样一来，能够解答的问题大大增加了.例如：

①通过计算来解决各种作图问题.

②求出具有某些性质的曲线(或曲面)，特别是能够解决各种轨迹问题，而且通过曲线、曲面等几何对象的方程可以确认它们到底应归入哪一类.

③可以发现或证明新定理，这在笛卡尔时代已有所表现.近年来，我国著名数学家吴文俊已把这种方法推向一个新的高度，并推广到极为广阔的领域.

④反过来，通过代数与几何的语言互译，也有利于用几何方法解某些代数问题，如方程求根的问题.不仅如此，解析几何学使微积分大大简化，而且扩大了数学的研究范围，如提出作图可能问题、曲线和曲面的分类问题、奇点问题等，大大推动了代数学的发展，并衍生出代数几何学及微分几何学这些直接后裔.

一般公认，笛卡尔和费尔马是解析几何学的创立者.虽然他们为优先权问题有所争吵，但他们是从不同的角度独立作出这项发明的.他们的出发点不同.费尔马是从复原遗失的古希腊著作出发，特别是阿波隆尼斯问题(即求一个圆与已知三个圆相切)，他更进一步推广成求一个球与已知四个球相切的问题.韦达、斯耐尔、戈台尔弟(Marino Ghetaldi，1566—1626)都曾努力做过这方面的工作，但他们的方法仍是传统的，而熟悉韦达的符号代数学的费尔马，却把代数与他所关心的轨迹问题结合起来.而笛卡尔完全继承了韦达的目标——通过几何作图作出代数方程的根来，当然也结合韦达的代数方法.他们的道路也不同：笛卡尔是一位哲学家，把数学当成理性思维的基础，几何学只是他的一般方法论的注脚；费尔马是一位数学家，把从古代典籍的只言

片语中得出的片断信息系统地翻译成代数的形式.

笛卡尔的《方法谈》中的附录《几何学》(1637)是第一个发表的解析几何学文献.但在这之前,费尔马已经掌握了解析几何学方法,并于 1629 年写成《平面和立体的轨迹引论》(*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*).不过,这本书到 1679 年才正式出版,他的一些结果通过同其他人的通信而为大家所知.他在该书中说,他找到了一个研究曲线问题的普遍方法.他在该书中,一开始就提出解析几何学的一般原理:"只要在最后的方程里出现了两个未知量,我们就得到一条轨迹,其中一个未知量的端点就描绘出一条直线或曲线."他接着说:"直线是惟一的,而曲线则是无穷多的,包括圆、抛物线、椭圆等."

接着,费尔马把轨迹分为三类:

(1)平面轨迹:直线或圆;

(2)立体轨迹:抛物线、双曲线或椭圆;

(3)线性轨迹:其他曲线.

"若令两个未知量构成一给定的角,通常假定为直角,并且未知量之一的位置和端点是确定的,则方程容易画出.如果两个未知量不超过二次……则其轨迹是平面轨迹或立体轨迹."

实际上,费尔马只是用一条直线 OX 表示一个轴,距离 OZ 表示一个未知量,距离 ZJ 表示另一个未知量,J 即其端点.当 Z 在 OX 上变化时,J 描画出一条曲线的轨迹.不过,他没有明确提出坐标的概念.

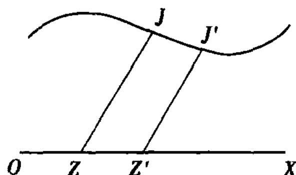


图 1

利用上面由距离表示的两个未知量,他求出一些曲线的轨

迹方程,用现代的写法就是:

(1)过原点的直线方程:$\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$;

(2)任意直线的方程:$\frac{b}{d}=\frac{a-x}{y}$;

(3)圆的方程:$b^2-x^2=y^2$;

(4)椭圆方程:$a^2-x^2=ky^2$;

(5)双曲线方程:$a^2+x^2=ky^2$;

(6)双曲线方程:$xy=a$;

(7)抛物线方程:$x^2=ay$.

后来,费尔马还引进了更高次的曲线,特别是 $y=x^n$ 及 $y=x^{-n}$.他没有负坐标的观念,所以他的方程并不能代表整条曲线.但他认识到坐标轴可以平移或旋转,而且通过它们,可把复杂的三次方程化为简单的形式.从某种意义上来说,这是现代坐标变换观念的萌芽.

3　笛卡尔的《方法谈》中的附录《几何学》

1637 年笛卡尔用法文写的《方法谈》出版,其中的附录《几何学》被公认为解析几何学诞生的标志.但其中除了解析几何的内容外,还有代数及微积分的一些问题,实际上与现在所理解的解析几何学相去甚远.《几何学》共分为三部分:第一部分是"仅需直线和圆的作图问题";第二部分是介绍曲线的内涵及分类,也有作图(轨迹)问题;第三部分是通过作图解高次代数方程.所以,笛卡尔的中心思想是通过代数方法去解几何问题,特别是作图问题.他没有提到坐标及坐标轴;如果有的话,也只是有相当于现在的横轴和原点.他的最主要观点是用代数方程表示曲线.

在《几何学》第一部分中，他把作图问题归结为作出未知线段.为此，就要搞清楚未知线段与已知线段的相互关系，使得同一个量能用两种不同的方式表示出来，这样就得到一个方程.如果未知线段不止一条，那就需要求出与未知线段数目相同的方程，这个方程组经过消元、化简之后，得出一条未知线段的一个方程，然后通过代数方法把未知线段用已知线段通过加、减、乘、除和开方表示出来.如果方程是一次和二次代数方程，则解可以通过已知线段的加、减、乘、除和开平方得到.他通过例子表明，这些代数运算都可以通过直尺和圆规作出图来.如果方程是高次方程，他在《几何学》第三部分加以特殊讨论.这些将一条未知线段对应一个方程的问题被称为确定问题.但是，当问题归结为一个含有两个未知长度的方程时，这就是不确定问题.实际上这是一个轨迹问题.对于这类问题，笛卡尔以帕普斯问题为例来说明他的解法.帕普斯问题是这样的：在平面上给定三条线段(或四条、五条或更多)，求满足下列条件的点的轨迹：从这点到每条已知线段各引一条线段交于已知交角，使得到的三条线段中有两条的乘积与第三条的平方成定比(如果有四条线段，则所得到的四条线段中有两条的乘积与另外两条的乘积成定比).帕普斯曾宣称，当给定直线是三条或四条时，所得轨迹是一条圆锥曲线.笛卡尔在《几何学》第二部分中对这个论断得出了一个漂亮的证明.实际上他得出的轨迹是 x, y 的一个二次方程.

在《几何学》第二部分中，笛卡尔对曲线的概念进行了新的论述.古希腊人把曲线分为平面曲线、立体曲线和线性曲线.平面曲线是指可用直尺和圆规画出来的曲线，立体曲线是指圆锥曲线，其余的都是线性曲线(或称之为机械曲线)，因为它们需用某些特殊机械来画.笛卡尔认为这种分法没有意义，他把可用有

限次代数方程来表示的曲线称为几何曲线，而把其他的曲线称为机械曲线，这样就一下子把曲线的领域扩大了许多，同时对曲线给出了一个自然的分类方法．他把含 x, y 的一次、二次代数方程所决定的曲线划为第一类，并认为圆锥曲线方程是二次的，但没有给出证明．然后他把三次、四次方程的曲线划为第二类，把五次、六次方程的曲线划为第三类，依次类推，这样他对曲线给出了一个系统的分类．

《几何学》第三部分题为"三次及三次以上问题的作图"．在这一部分，笛卡尔再次回到作图问题，不过所涉及的方程是三次或更高次的，这类问题一般不能用直尺和圆规直接来解，往往需要借助其他曲线．例如，他考虑两个量 a 与 q 的两个比例中项，即满足等式

$$\frac{a}{z}=\frac{z}{y}=\frac{y}{q}$$

的 y, z．当 $q=2a$ 时，此即古希腊著名的"倍立方体问题"．由第一等式得出 $y=\frac{z^2}{a}$，再由第二等式得出 $z^3=a^2q$．因此要求出 z，必须解三次方程．笛卡尔证明，z 可以通过抛物线及圆求其交点而得出．他进一步断言，如果方程是三次、四次的，非用圆锥曲线不可；而且所有三次方程问题，都可化为三等分角问题及倍立方体问题．这样，他无意中暗示了这两个问题不能单靠直尺和圆规来解，当然他没有给出证明．如果方程是高于四次的，那就需要高次曲线了．这样，他把代数方法提高到重要地位．在第三部分中，他总结了过去代数方程求解的方法，讨论了纯代数方程理论，并给出了代数学基本定理的一个直观的证明．

4 解析几何学的发展与传播

费尔马的解析几何虽然早在1629年就已经得出,并在有限的范围内流传,但直到1679年才出版其著作,而这时笛卡尔的解析几何早已流传很久了.不过,由于笛卡尔的叙述晦涩难懂,而且不是用学术界通行的拉丁文写的,所以他的思想的传播也很缓慢.我们可以把解析几何学的传播、发展和定型的过程分成四个阶段:

(1)翻译与评注阶段(约1637—1695);

(2)从牛顿到欧拉的扩展阶段(1695—1770);

(3)定型阶段(1770—1820);

(4)推广阶段(1820—　　).

对这几个阶段,分述如下.

(1)翻译与评注阶段.

笛卡尔的《方法谈》于1637年出版后不久,一些法国数学家已经开始介绍及应用笛卡尔的方法.罗伯瓦尔写了两篇论文,一篇是《方程论》,介绍笛卡尔的方程论;另一篇是《解方程的平面及立体几何》,则完全介绍笛卡尔的解析几何,其中讨论了两类问题,一类是用方程表示轨迹,另一类是利用轨迹的交截来解方程.他明显地忽视了费尔马的方程图象表示,这显然表示他完全是沿着笛卡尔的道路进行的.不过,他没有像笛卡尔那样强调解作图问题,而是去求熟知曲线的方程.他以一个圆的直径为轴,以直径的一个端点为原点,导出了圆、抛物线、椭圆、双曲线的方程,并得出了蚌线(其中一支)的方程.另外,他在自己的微积分著作中也对解析几何有过叙述,这些都是对解析几何的微小推

动.另一位法国数学家德博内为《几何学》写了第一个详细的评注,他除了第一次指出一次方程的图象是直线外,并没能显示出解析几何学的威力.

笛卡尔的解析几何学只有在被译成当时学术界的通用语言——拉丁文之后,才得到了更广泛的传播.第一个译本是荷兰数学家范·斯霍腾于1649年出版的《几何学》,这个版本不仅包含德博内的评注,而且包含译者自己写的更长的评注,其中不仅补充了笛卡尔原著中略去的证明,还加进一些新的作图问题、新的曲线以及新的代数、几何问题,特别是论述三次及四次方程的图解方法.该译本于1659—1661年再版时,被扩充成两卷,添加了许多新内容.这部书对于笛卡尔解析几何学的传播及发展起了决定性的作用.

在英国,沃利斯推动了解析几何学的发展.沃利斯是笛卡尔几何学算术化思想的执行者,他的《圆锥曲线论》(1655)是最早出版的用系统的代数方法来研究圆锥曲线的著作,其中第一次通过二次方程来定义圆锥曲线,而不是像以前用截圆锥或运动轨迹的方法.他还证明了由二次方程定义的曲线正好就是古人的圆锥曲线,而且从方程出发来研究圆锥曲线的性质.这无疑是解析几何学的一个重要突破.遗憾的是,沃利斯的研究路线与英国当时盛行的保守的综合几何路线大相径庭,他的方法遭到诸如哲学家霍布斯(Thomas Hobbes,1588—1679)以及巴罗等人的极力反对,同时欧洲大陆数学家对他的革命思想又采取沙文主义的态度,结果他的观点没有得到应有的重视.

欧洲大陆最早出现的解析几何学的系统著作是荷兰数学家维特在23岁时所写的《曲线原本》(*Elementa curvarum Linearum*)(1659—1661).沃利斯曾因为其内容相似而说它是自己著作的

抄本,但实际上两者有许多不同之处.维特的《曲线原本》一开始定义曲线时,用的不是解析方法,而是开普勒(Johannes Kepler,1571—1630)的运动作图法,他所论述的精神接近费尔马.他先用几何方法推导圆锥曲线的性质,然后再证明二次方程所表示的正是具有这些性质的曲线.因此从某种意义上说,沃利斯的书和维特的书是互补的,两者合在一起,大致构成现代解析几何学教科书的原型.

笛卡尔最为强调的是用解析方法去解作图问题,这也是17世纪几何学家所关心的主要问题,而且认为正是在这个问题上,解析方法显示出其优于综合方法的威力.从现在的观点看,一般认为作图问题早已不是解析几何学的主要问题,许多著作中根本连提也不提,但这在当时却是中心问题.这里还要补充一句,当时许多作图问题,如求曲线的切线、法线、渐近线等问题,现在已经属于微积分的领域,而在当时则是放在一起进行考虑的,不加以区分.由于解析几何学与微积分的并行发展,两方面的成果常常是混在一起的.沿着笛卡尔的作图路线发展的,首先是列日公国(现属比利时)的数学家斯吕思(René Francois de Sluse,1622—1685),他在1659年出版的著作中,系统地用笛卡尔的解析几何学方法解决了倍立方体问题,这赢得了高度赞扬,并促使一些数学家去解其他的作图问题,如阿尔哈曾(Alhazen,965—1040)问题.笛卡尔的学生伊丽莎白公主也曾尝试用他的方法解阿波隆尼斯问题.

为了使解析几何学作为一门学科能够完备化,在术语及形式上的进步也是不可缺少的.在范·斯霍腾的《几何学》译本第2版中,除了一条基线(x轴)外,已有了另一条基线(y轴),并提出了坐标变换的初步概念.沃利斯是第一个提出负坐标概念的

数学家.我们现在意义下的点的坐标(coordinate)这个词,首先是莱布尼茨在1692年使用的,他于1694年引用纵坐标(ordinate)这个词,在手稿中还用过横坐标(abscissa)这个词.到这时为止,大部分数学家用的还是平面斜角坐标系.

(2)从牛顿到欧拉的扩展阶段.

笛卡尔与费尔马的解析几何学在17世纪末沿着三个方向进一步扩展,从而更加显示出其方法上的威力:

①引进新的坐标系,从而带来一批新曲线,并提出关于坐标变换的新问题;

②研究的对象从二次曲线扩充到高次曲线,特别是仿照二次曲线的分类对高次曲线进行分类;

③把平面解析几何学扩充到空间解析几何学.

17世纪末斜角坐标系已被普遍使用,实际上对其他坐标系也在考虑.牛顿在1671年写成的"解析几何"的手稿(1736年以《流数法与无穷级数》为题出版英文本)中,除了以直线为参照系的斜角坐标系及直角坐标系之外,还提出了另外八种坐标系,其中包括极坐标系和双极坐标系,并利用它们研究一系列几何问题及微积分问题,特别是用极坐标系研究螺线.该书的出版过迟,雅各布·伯努利已于1691年正式首次发表极坐标系,并用来研究费尔马的抛物螺线.瑞士数学家赫尔曼则于1729年正式宣告,用极坐标系研究轨迹同笛卡尔坐标系一样好.他用ρ,$\cos\theta$,$\sin\theta$为变元,分别用z,n,m表示.他还给出由直角坐标系转换成极坐标系的一般公式,他这方面的工作似乎不太为人所知,以致后来人们多引用欧拉乃至更晚的意大利数学家丰塔纳(Gregorio Fontana,1735—1803)的著作.丰塔纳曾在1763年给出极坐标系的曲率半径公式.欧拉在《无穷分析引论》(1748)中已经系

统地使用极坐标系，并明确给出现在熟知的变换公式

$$\begin{cases} x = z\cos\varphi, \\ y = z\sin\varphi. \end{cases}$$

在这本巨著中，欧拉还给出另一种重要的曲线表示法，即参数表示法.早在巴罗及牛顿的微积分著作中，已有这种思想的苗头，但欧拉是第一个把它引入几何学的数学家，他研究了如何由笛卡尔坐标方程求出其参数表示，特别是有理参数表示.参数表示的存在问题后来成为代数几何学的重要问题之一.

17 世纪以前，除了直线及圆之外，圆锥曲线一直是几何学研究的中心问题，研究方法主要是综合方法.解析几何的出现把代数方法引进来，使得用综合方法无法很好处理的分类问题可以完全而彻底地得到解决，而这正显示了解析几何学方法的优越性.对于二次曲线，曲线的分类问题相当于把二次方程化为标准型的问题.维特在他的《曲线原本》一书中的确是这样做的，而英国数学家斯特灵在他的《牛顿的三次曲线》(1717)中，也曾这样做过.一般的完整分类见于欧拉的《无穷分析引论》第 2 卷中.

对于三次曲线的分类，首先是牛顿作出的，大约于 1676 年完成，但直到 1704 年才作为《光学》的附录发表.值得注意的是，牛顿不仅用负 x 值和负 y 值，还在四个象限中作图.牛顿把一般的三次方程

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + jy + k = 0$$

所代表的曲线通过坐标变换化为四种标准型：

①$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$；

②$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$；

③$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$；

④$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

这样,他根据这些方程,得出72种不同的三次曲线,并对每一种都画出图来表示.接着,他未加证明地提出了一个著名的定理,即所有三次曲线都能化为5种"发散抛物线"的投影,而它们是由方程③的右方三次多项式的根的不同性质来区分的:三个根是相异实根;一个实根和两个复根;三个实根中两个相等,重根大于或小于单根;三个相等实根.牛顿的这些结果后来由许多人加以证明,并把不同三次曲线的数目增加到78种.1888年,德国数学家鲍尔(M. Baur)认为,按照牛顿的分法,三次曲线应为96种.由此可以看出,按照不同分法得出的结果相差甚大,而且随着方程次数的增大,不同曲线的数目也会增大很多,因此,18—19世纪许多数学家从事于各种粗分类.欧拉在他的《无穷分析引论》第2卷中对三次和四次曲线进行了分类,他把三次曲线分成16类;而克拉梅则分成14类.19世纪普吕克尔(Julius Plücker,1801—1868)通过奇点的数目来对曲线进行分类,为曲线分类奠定了新的基础.其后,分类问题不再是解析几何学的研究内容,一方面变成不变式论的问题,另一方面进入代数几何学,成为代数几何学的主要问题.

把解析几何学由平面扩展到空间,这在解析几何学的创始人笛卡尔及费尔马的著作中已初见端倪.但最早写出一个曲面方程的是法国数学家拉伊尔.他在1679年出版的《圆锥截线新原理》(*Nouveaux élemens des sectiones coniques*)中给出了圆锥的方程

$$a^2+2ax+x^2=y^2+r^2,$$

当时是作为求轨迹问题得出来的,并没有系统地进行讨论.法国数学家帕朗(Antoine Parent,1666—1716)则用方程更详细地讨论了几种曲面,他已经明确地用有三个变量的方程来表示曲面.约

翰·伯努利在1715年给莱布尼茨的信中,引进了现在所用的三个坐标平面,但对空间解析几何学的系统研究是从欧拉的早期工作开始的.1728年,欧拉给出圆柱面、圆锥面及旋转曲面的方程,而他在1748年出版的《无穷分析引论》第2卷的附录V中,更系统地研究了一般的有三个变元的二次方程

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz = l,$$

然后通过坐标变换把它化成标准型,这样他得到6种曲面:锥面、柱面、椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、双曲抛物面和抛物柱面,其中双曲抛物面是他新发现的.在这之前,法国数学家克莱洛在1731年也给出过几个曲面的方程,还说明 x, y, z 的齐次方程表示顶点在原点的一个锥面.赫尔曼由于不太了解别人的工作,特别是克莱洛及欧拉的工作,而在1733年发表的论文中说,除了平面及旋转曲面之外,当时还很少知道其他曲面.赫尔曼由于关心地球的形状而对曲面加以仔细研究,他认为,立体解析几何学对球面三角也有用.他使用的坐标是一个平面(x, y)加上一条定向轴 z,因此他只考虑四个卦限.他最先仔细研究了平面方程

$$ax + by + cz - e^2 = 0.$$

他还证明,平面上任何一点都满足一次方程.他求出这个平面与坐标平面间的夹角的正弦为$\sqrt{b^2 + c^2} : \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.他指出 $x^2 + y^2 = f(z)$是绕 z 轴的一个旋转平面.他新得到的曲面有:

抛物柱面: $z^2 + ax - by = 0$;

锥面: $z^2 - xy = 0$;

锥面: $az^2 + bxz - cyz + cy^2 = 0$;

以及两类更一般的二次曲面:

$$z^2 - ax^2 - bxy - cy^2 - ex - fy = 0;$$

$$az^2 + byz + cy^2 - exz + fx^2 + gz - bx = 0.$$

他称这类曲面为“类圆锥面”,但他的分类显然没有欧拉的清楚而细致.因此,通常认为欧拉是立体解析几何学的奠基者.

立体解析几何学的另一个内容是空间曲线,在历史上也称之为挠曲线或双曲率曲线.从解析几何学的观点看,空间曲线的理论比平面曲线及曲面的理论都要复杂.这是由于空间曲面是用一个三元方程来表示的,曲线则需要一对联立的三元方程来表示,这是克莱洛首先认识到的.在此之前,对空间曲线的研究都是零散进行的.笛卡尔在研究空间曲线时,曾考虑过它在两个垂直平面上的投影,但他错误地认为空间曲线上的每点也只有一条法线;而克莱洛认识到空间曲线上的每点都有一个法平面,也就是包含无穷多条法线.当然这些研究还是极为初步的.欧拉后来给出空间曲线的参数表示,这使得研究空间曲线的微分几何得以发展.到19世纪中叶,空间曲线理论趋于成熟,而代数曲面的交截理论则仍然有许多可研究的问题.

(3)定型与推广阶段.

到18世纪后半叶,解析几何学的发展有三种不同的趋向:

一是继承和延续笛卡尔的传统,主要是作图问题和用图象解方程.

二是继承并延续费尔马的传统,对曲线给出方程,然后对曲线进行研究和分类,这可以说是函数论的方向.

三是新的趋向,即补充传统解析几何学的不足之处,使近代解析几何学得以最终确立,并且得以向代数几何学延拓.

第一个趋向在笛卡尔之后趋于衰微,许多问题,如作切线、法线的问题,已融入微积分乃至后来的微分几何之中.第二个趋向在18世纪中叶由于欧拉等人的工作已经大体完备,然而它们

与现在的解析几何学教科书的内容仍然差别很大.真正对解析几何学进行补充和定型的,主要仰赖三个人的工作:拉格朗日、蒙日及拉克鲁瓦,其中蒙日和他的学生贡献最大.实际上,现在看来最简单的问题及公式,直到18世纪70年代才明确.例如,“直线的方程一般具有 $y = ax + b$ 的形式”,首先是蒙日在1771年正式提出的,他还得到直线通过点 $M(x', y')$ 的方程为 $y - y' = a(x - x')$.另外一些公式,如一点到一线的垂直距离公式,也是蒙日在1771年首先得到的,不过直到1785年才发表;大约同时,拉格朗日已发表同样的结果,而且推广到立体解析几何,但这些在当时并没有受到重视.

解析几何学的真正定型应该从1794年巴黎综合工科学校的建立算起.蒙日在该校教授立体解析几何课,他以他的经典论文(1781)为基础作为教材,写成《分析在几何上的应用活页讲义》,并于1795年出版,1801年重印;后来加以修改补充,以《分析在几何上的应用》(*Application d'analyse à la geometrie*)为题于1807年出版(1809年以后多次再版).这是第一本解析几何学教科书,但内容主要是立体解析几何学.第一本平面解析几何学教科书是拉克鲁瓦写的,他是蒙日的同事和学生,也是1794年建立的巴黎高等师范学校的教师.他编写了许多教材,而且多次再版,在19世纪上半叶有着广泛的影响.拉克鲁瓦的《演算论》(1797)和《平面及球面三角以及代数在几何上的应用初步》(1798—1799)是最早的平面解析几何学教科书.他在《演算论》的序言中第一次明确提出“解析几何学”这个词,并用纯粹解析方法来研究几何,正如拉格朗日用纯粹解析方法来研究力学一样.由于蒙日的教材大部分内容很难,因此不适于解析几何学的普及.他和阿谢特(Jean Nicolas Pierre Hachette,1769—1834)又合

编了一本《代数在几何上的应用》,并于1802年出版,该书的内容比较初等,一直沿用了100多年,其中讨论了直线与平面、坐标轴变换的方程以及二次曲面的分类等问题,同现在的教材差不多.在他的影响下,在1798—1802年间一共出现了4本解析几何学教科书,其中拉克鲁瓦的书(1798)在以后的100年内共发行了25版.这样,解析几何学作为一门学科在法国已完全定型下来.此后,法国几何学家主要研究微分几何学以及射影几何学,而解析几何学后来的发展则主要是由德国学派所延续的.

德国学派继承和发展了法国学派的工作,特别是莫比乌斯(August Ferdinand Möbius,1790—1868)在1827年引进重心坐标,费尔巴哈(Karl Wilhelm Feuerbach,1800—1834)也做了同样的工作.更大的推动来自普吕克尔,他在《解析几何的发展》(1828)中用坐标方法得到庞塞莱(Jean Victor Poncelet,1788—1867)的许多结果,1835年他在《解析几何学体系》中重新用解析几何学方法对代数曲线进行分类,并在《代数曲线理论》(1839)中研究了三次、四次平面曲线的分类.他在1846年出版的《空间解析几何学体系》中则应用解析几何学方法来研究曲面及空间曲线.由于当时综合几何学占统治地位,普吕克尔的工作停顿了近20年.海塞(Ludwig Otto Hesse,1811—1874)曾对他的结果进行了整理及简化,并把解析几何学方法推广到直线几何学及圆几何学上.至此,解析几何学已成为一门成熟的学科,并被列入所有大学数学系的教材.德国最早的初等解析几何学著作大都译自法文,19世纪20年代开始有德国人自己编写的书,如马丁·欧姆(Martin Ohm,1792—1872)在1826年出版的书.成熟的解析几何学讲义首先是由海塞出版的(1861).

第5章　微积分

15世纪末,随着地理大发现、文艺复兴、资本主义生产方式的萌芽以及连年的战争,人们对科学技术提出了新的要求,其中许多问题的解决需要发展新的数学工具.例如,航海的发展要求准确确定船舶航行的方位;对天体运动规律的研究要求更加严格;随着枪炮的改进,对弹道学的研究要求对弹道及空气阻力进行精确表述;凿山开矿遇到计算体积、表面积及各种极大极小问题;光学仪器的研制要求精确描绘出曲面的切线及法线.这些问题都不是古典的算术及几何所能解决的.

从16世纪起,算术及代数学获得了较大的发展,使得数字计算的繁复程度大大减轻,人们的计算能力空前提高,并且创造出许多新的计算方法,特别是对数的发明以及三角学的发展.这些都促使数学产生新的飞跃.

真正导致微积分创立的数学基础是符号代数的发展、各种曲线的引进和解析几何的创立,特别是由于解析几何把过去相互分离的数与形联系在一起,大大突破了过去几何方法的局限性.代数方法也促进了形式化的推广,扩大了"函数"的范围(如分数指数及负数指数的出现),还推动了无穷级数、无穷乘积、无穷连分数等"无穷"手段的实施,而这正是无穷小演算所要求的.

因此,从本质上来看,数学分析与代数学并没有什么不同,

实际上都是一种符号演算的技术.如果说有什么不同,那就是代数学一般涉及有限的数量,而分析涉及无穷的步骤以及无穷大、无穷小之类的量.17—18世纪的数学分析的研究对象主要是演算(calculus),如微分演算、积分演算、函数演算以及变分演算,后来还有概率演算、算符演算、向量演算、张量演算等等.这些演算如同代数学中的四则运算一样,当它们有了基础之后,分析中的主要问题就成为解微分方程了.求解微分方程是18—19世纪数学分析的主要课题,它在各方面,特别是在力学、天文学及物理学上有着重要的应用.

17—18世纪的微积分的发展大致可分为三个阶段:

(1)牛顿以前的微积分(1600—约1670).在这一阶段,对于特殊的问题(如求切线、求极大极小、求面积、求体积、求弧长等),通常采取特殊的方法.

(2)牛顿及莱布尼茨建立无穷小演算系统(约1670—约1750).牛顿及莱布尼茨在前人工作的基础上,各自独立建立了普遍的无穷小演算方法,确认微分及积分为互逆运算,并开辟了微积分应用的广阔道路.由于求积分及求解微分方程一般极为困难,所以这个阶段发展了一些求积的方法及技巧,并开始把无穷级数作为一个特殊工具来使用.在这个阶段的后期,才引进了变量及函数观念,为以后分析方法取代几何方法奠定了基础.

(3)欧拉及拉格朗日建立形式分析体系(约1750—约1820).这个阶段是微积分得到广泛应用的时期,数学家们在许多方面抛弃了前人的几何倾向,而采取形式的、代数的方法.由于微积分(分析、解析)方法的应用,出现了解析力学、解析概率论、数学物理学等新学科,并使解析几何系统化.在数学物理学领域,傅立叶引进的三角级数是一项重大成就.

1 微积分前史

微积分的历史实际上可以追溯到远古时代,那时由于社会需要已出现土地丈量以及容积测量问题.随着天文学及测地术的发展,求弧长的问题也被提到日程上来.这些实用几何问题是十分古老的,而且都是各个民族在开化之后要碰到的.人们在经历了长期的实践之后,知道直线形的长度、面积及体积是可以求出来的,但是对于曲线形却极为困难,第一个问题当然就是计算π值,其次就是抽象出各种不同的几何对象,主要是曲线及简单的曲面,这时就出现了另一类问题——求切线问题.古希腊数学家阿基米德和阿波隆尼斯已经对求积问题及求切线问题有过许多考虑,但是他们没有普遍的方法,也就是对特殊对象、特殊问题进行特殊处理,而这也正是微积分前史的特征.17世纪,这种情形仍然在新的基础上继续着.

1.1 形形色色的曲线

在18世纪中叶以前,函数的概念是极为模糊的,所以17世纪数学(几何也好,微积分也好)的研究对象主要是平面曲线.许多术语,除了代数术语之外,都是几何的,间或是物理的.当时研究的主要问题,除了确定曲线方程以及由方程研究曲线性质之外,其他大都属于微积分的范围,这就是求切线、法线、切距、次法距、曲线下面积以及曲率等问题.17世纪曲线研究的一大类问题是求曲线的相伴曲线,其中重要的有:渐伸线、渐屈线、径向曲线、反演曲线、垂足曲线、旋轮线以及各种焦散曲线.渐伸线与渐屈线是1673年由惠更斯引进的.另外,求曲线的渐近线也被

提到日程上来.17世纪末,涉及变参数的曲线族问题也被提了出来,例如正交轨线问题以及变分问题,对这些问题的研究促进了偏微分概念的产生以及变分法的发展.

在整个17世纪,对于曲线的研究是以多样性和混杂性为特征的,也就是特殊的对象、特殊的问题与特殊的方法.由于解析几何学尚未成熟,它和微积分几乎平行发展,因此,对曲线的几何性质和度量性质是混在一起加以研究的,用的方法既有几何方法、代数方法,也有分析方法甚至力学方法.

自古以来,人们看见的曲线多种多样,但有一定认识的曲线并不多.在这里,所谓认识就是能够作图,也就是能够画出来,以及知道它与其他曲线区别开来的性质.各民族认识最多的曲线一般只有直线和圆,而古希腊人对圆锥截线的认识使他们的几何学处于突出的地位,并为近代科学的开创奠定了几何学基础.古希腊人知道的其他曲线就不多了,而这大都是为了求解所谓三大几何作图问题而提出来的,如希比阿斯(Hippias,约前425年)为了解三等分任意角问题及化圆为方问题而发明的割圆曲线,其直角坐标方程为

$$y = x\tan\frac{\pi y}{2a};$$

阿基米德的螺线,其极坐标方程为

$$r = a\theta,$$

这也可解同样的问题;尼科梅德斯(Nicomedes,约前240年)为解三等分任意角问题及倍立方体问题而发明的蚌线,其直角坐标方程为

$$(y-a)^2(x^2+y^2) = k^2y^2;$$

丢克莱斯(Diocles,约前190年)为解倍立方体问题而发明的蔓

叶线,其极坐标方程为

$$r = 2a\sin\theta\tan\theta.$$

实际上,梅纳科莫斯(Menaechmus,约前 350 年)发现圆锥截线也是出于解倍立方体问题.可以看出,古希腊三大几何作图问题的确推动了曲线的引进和研究.出于这种目标而发现新曲线的潮流在 17 世纪又兴盛起来.例如,老帕斯卡(Etienne Pascal,1588—1651,著名数学家、物理学家帕斯卡的父亲)在 1637 年为解三等分任意角问题而引入圆的蚌线,后来罗伯瓦尔称之为帕斯卡蚶线,其极坐标方程为

$$r = a + b\cos\theta,$$

实际上这种曲线前人也知道.当时,这些曲线大都是通过点的运动轨迹来定义的.

17 世纪对解析几何学、微积分以及运动学的研究,大大刺激了数学家对曲线的兴趣.可以说,17 世纪是曲线研究的黄金时代,这首先表现在许多新曲线的发现、曲线的分类以及用统一观点来研究曲线的性质(特别是度量问题的求解)三个方面.

费尔马在有了解析几何学这个工具后,开始用代数方程来定义新曲线,其中特别是通过推广等边双曲线、抛物线及螺线而得到的费尔马双曲线

$$x^m y^n = a,$$

费尔马抛物线

$$y^n = ax^m,$$

以及费尔马螺线

$$r^n = a\theta.$$

这些曲线后来都在微积分的发展中起着重要作用;特别是半立方抛物线

$$y^2 = ax^3,$$

这是第一个用积分法求弧长的曲线.费尔马还首先引进了箕舌线,其方程为

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}.$$

笛卡尔引进了笛卡尔叶形线

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

斯吕思引进了比费尔马抛物线更复杂的一类曲线

$$y^n = k(a - x)^p x^m,$$

被称为斯吕思珍珠线.

17世纪最受重视的一类曲线是各种旋轮线.16世纪以前人们已经知道旋轮线,它是圆在绕直线、圆或其他曲线运动时,其上一点的轨迹,也称之为摆线.16世纪初,保维耶(Charles Bouvelles,约1470—1553)提到过旋轮线.16世纪末,伽利略也提到过,并建议用于拱桥设计,但没有谈到它的任何性质.17世纪初,马桑及伽利略多次指出研究旋轮线的重要性,特别是1628年马桑鼓励年轻的罗伯瓦尔研究旋轮线.1634年罗伯瓦尔引进了原来旋轮线的伴线(compagne),其参数方程为

$$x = r\theta,\quad y = r - r\cos\theta,$$

得到它在一个圆弧下的面积正好等于生成旋轮线的圆的面积的3倍,且旋轮线绕其底线旋转而成的回转体体积为其外接圆柱的$\frac{5}{8}$.1638年他求出其上每点的切线,后来还推广到一般情形

$$x = a\theta - b\sin\theta,\quad y = a - b\cos\theta.$$

这无疑是求面积及求切线的最早例子之一,在微积分的发展史上具有典型意义.

1658年6月,帕斯卡提出旋轮线问题征求解答(同年10月1

日截止)，题目是求任何一段旋轮线下的面积和形心，以及求一段旋轮线绕底线或纵坐标旋转而成的回转体的体积和形心．虽然大家都很感兴趣，也有人寄来答案，但没有人能得出令人满意的解答．于是，帕斯卡以德顿维尔(Amos Dettonville)为笔名，发表《德顿维尔的信》(*Lettres de Amos Dettonville*)，解决了上述问题，其中还特别求出了螺线的弧长(Amos Dettonville是帕斯卡在发表著名宗教论战散文集《与外省人书》(*Lettres provinciales*, 1657)时所用的笔名Louis de Montalte的字母换序)．同时，帕斯卡撤消了奖金，这引起两位应征者沃利斯和德·拉卢威尔(Antoine de Lalouvère, 1600—1664)的不满，后者还受到剽窃的错误指控，这件事加上对优先权的争论，使旋轮线成为引起数学家争吵的“不和的苹果”．另外还有旋轮线的求弧长问题，这个问题由英国建筑师雷恩和费尔马分别独立解决．1673年惠更斯证明旋轮线是等时曲线．他还根据这个性质造出以恒定周期摆动的旋轮摆．

另一类重要的曲线是卡西尼(Gian Domenico Cassini, 1625—1712)卵形线，它是距两定点的距离之积为常数k^2的点的轨迹，其直角坐标方程可写成

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=k^4-a^4,$$

其中a为两定点距离的一半．当$a^2=k^2$时，它就是雅各布·伯努利的双纽线，后来许多重要的数学问题就来源于它．其他重要的曲线还有悬链线

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a},$$

和曳物线，其参数方程为

$$x=a\left(\log\tan\frac{t}{2}+\cos t\right),\ y=a\sin t,$$

以及各种螺线，这些大都是 17 世纪发现并开始研究的.

由于 17 世纪解析几何与微积分还不够成熟和系统，当时的研究都是对特殊的曲线研究其特殊的性质或求解特殊的问题，其中求面积和切线是最主要的.

1.2　曲线的求积法

曲线的求积(quadrature)通常是指求封闭曲线或几条曲线所包围的面积.

现在用微积分所能轻易解决的问题，如计算曲线所包围的平面图形的面积以及曲面所包围的立体图形的体积，古希腊人就已经考虑过，并且花费了很大力气. 例如，欧多克斯计算过圆锥及棱锥的体积，阿基米德计算过球的体积和表面积、抛物线段所包围的面积、阿基米德螺线所包围的面积、三角形的重心等等. 虽然上面许多问题实际都可化为求积分 $\int x^2\mathrm{d}x$，可是阿基米德等人似乎没有看出这些问题彼此之间有什么联系，他们解每一个问题都用不同的方法，甚至彼此之间毫无关系；但是，他们的方法往往十分巧妙，而且有着严格的证明，通常是先找到结果，然后再设法证明. 他们的方法大体可以分成两类：一类是欧多克斯的“穷竭法”，就是用具有已知面积的图形(比如多边形)去外切或内接所要求面积的图形；计算弧长也可用这种方法，特别是求圆周率 π，在很长时期内都用这种办法. 另一类是阿基米德的“平衡法”，实际上是力学方法，这往往作为发现结果的方法. 他把一个平面图形看成是由直线组成的有重量的某种东西，每条直线的重量都与它的长度成正比，这样问题就转化成使各种几何图形达到平衡或求出重心. 实际上，这种方法开创了后来

应用不可分量概念的先河.不可分量的概念在14世纪开始形成,到17世纪得到灵活应用,并导致积分法的产生.但是,阿基米德的不可分量思想的著作,直到1906年才由数学史家海伯格发现.因此在17世纪以前,古希腊人的穷竭法一直是公认的楷模.在16世纪初阿基米德的著作被译成拉丁文之后,许多数学家开始使用穷竭法计算重心等,并加以改进.但是,这种方法显然具有一定的局限性,它来自古希腊人的两方面的禁忌:一是禁用无穷,二是禁用数来表示量.因此,其后的进展正是在打破这两个禁忌的基础上完成的,这就是17世纪发展起来的无穷小量法及不可分量法.不过在当时,人们对这两种方法的差别的认识还是相当模糊的.

(1)开普勒的无穷小量方法.

最早使用无穷小量方法的是德国天文学家、数学家开普勒,他打破古希腊人的禁忌,认为上帝安排量的存在,是为了曲线与直线之间有比较的可能.他在1615年发表的《酒桶的立体几何》(*Stereometria doliorum vinariorum*)中探讨了酒桶的最佳比例.全书包括三部分:第一部分是阿基米德式的立体几何,其中附有92种旋转体的体积公式,都是阿基米德所没有讨论过的;第二部分是对奥地利酒桶的测量;第三部分是应用.他的出发点很简单,他把圆看成是由无穷多个无限小三角形组成的,把球看成是由无穷多个无限小锥体组成的,这样就很直观地得出圆的面积公式及球的体积公式.他继而讨论圆锥及圆柱,把它们看成是由薄圆片构成的;如果令圆片绕一个轴旋转,就得出圆环的体积.靠这种方法,他可以求出一段圆弧绕一个固定轴旋转而成的旋转体的体积,这样他得出苹果形或柠檬形旋转体的体积.不过,他在叙述过程中没有严格区别无穷小量与不可分量.

(2)卡瓦列利的不可分量方法.

真正明确使用不可分量方法的,一般公认是意大利数学家卡瓦列利.他写过多本著作,其中两本与数学关系密切.一本是《连续体的不可分量的几何学:一种新方法》(*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*)(1635,1653再版);另一本是《六个几何问题》(*Exercitationes geometricae sex*)(1647).他的不可分量思想很可能是从他的老师伽利略那里得到的.伽利略曾计划写一部关于不可分量的书,但没有出版,不过他关于这个问题的观点在他的《两种新科学的对话》(*Discorsie dimonstazioni matematiche intorno à due nuove scienze*)(1638)中有过明确的阐述.但卡瓦列利在1627年已有这种思想,他在一封给伽利略的信中已有所阐述,其基本思想是认为线段由点构成,有限面积由平行线段构成,有限体积由平行截面构成.卡瓦列利在前一本书中提出了著名的卡瓦列利定理:如果两个立体高度相同,并且在同一高度上与底平行的两截面成定比,则两个立体的体积也成定比.他还证明:如果平行四边形内线段与组成它的两个三角形之一的线段之比为2:1,则相应线段的平方之比为3:1.他认为这个结果可以推广到k次幂,他验证到$k=9$,但只证明到$k=4$,用现代语言来说,他证明了

$$\int_0^a x^k \mathrm{d}x=\frac{a^{k+1}}{k+1},k\geqslant 1.$$

实际上,这是积分法的最基本公式,许多人只是在各种特殊情形下才得到它或证明它.卡瓦列利也是如此,他没有意识到他的几何证明相当于求一般积分

$$\int_0^a(\alpha t^2+\beta t+r)\mathrm{d}t,$$

也没能得出普遍公式.实际上,在《连续体的不可分量的几何学:

一种新方法》第 2 卷中，他考虑过许多特殊情形，它们相当于求

$$\int_0^a t\mathrm{d}t,\ \int_0^a (a-t)\mathrm{d}t,\ \int_0^a (t+b)\mathrm{d}t,\ \int_0^a (a-t+b)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^a t^2\mathrm{d}t,\ \int_0^a (a-t)^2\mathrm{d}t,\ \int_0^a (t+b)^2\mathrm{d}t,\ \int_0^a (t+b)t\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^a (t+b)(a-t)\mathrm{d}t,\ \int_0^a (t+b)(t+b+c)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^a (t+b)(a-t+c)\mathrm{d}t,$$

其中 a,b,c 都是正的常量. 这个积分法的最基本公式决定了其后 20 年的发展，其间托里切利、罗伯瓦尔、帕斯卡、费尔马、沃利斯等都用不同的方法分别独立得到，有时还推广到 k 为负数及有理数的情形. 卡瓦列利的著作引起人们的极大重视，也引起许多争议. 有人认为他的思想来自开普勒，但不可分量法与无穷小量法显然是不同的. 开普勒的无穷小量是和被分割的图形同一维数的，而卡瓦列利的不可分量是低一维的(虽然他并没有确认这点). 另外，卡瓦列利通过他的原理比较容易地由已知得到未知，因而很简便地解决了开普勒关于抛物线弧旋转体的体积问题，而开普勒只能针对每个问题逐一对无穷小量求和. 虽然卡瓦列利的做法并不严格，但是他的许多思想值得重视：一是他把古希腊的量的观念推广到包含无穷多个元素的量上，他已提出总体(Omnes)来表示这种量；二是他的确给出一个切实可行的方法来计算积分；三是他虽然避免使用无穷小量，而且无穷小量也与不可分量完全不同，但由于它们确实是对古典的量概念的突破，从而间接地推动了无穷小演算的问世.

(3)无穷算术方法.

卡瓦列利提出不可分量法以后的 20 年，积分方法又有一大

进步,这就是英国数学家沃利斯引进算术方法计算分数幂的积分,这是他在《无穷算术》(*Arithmetica infinitorum*)(1656)中首先发表的.沃利斯从 k 为正整数解的情形出发,求出在单位区间上,曲线 $y=x^k$ 下的面积为

$$\int_0^1 x^k \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+\cdots+n^k}.$$

他是根据经验得出这个公式的,例如当 $k=3$ 时,有

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{9}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{36}{108}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^3}=\frac{100}{320}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}{5^3+5^3+5^3+5^3+5^3+5^3}=\frac{225}{750}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3}{6^3+6^3+6^3+6^3+6^3+6^3+6^3}=\frac{441}{1\,512}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24},$$

由此可推出

$$\frac{0^3+1^3+\cdots+n^3}{n^3+n^3+\cdots+n^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n},$$

当 $n\to\infty$ 时,极限为$\frac{1}{4}$.对于 $k=4,5$ 等比较小的值进行类似的计算之后,他推断出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+\cdots+n^k}=\frac{1}{k+1}.$$

接着,他通过类比得到,当 $k=\frac{p}{q}$时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[q]{0})^p+(\sqrt[q]{1})^p+\cdots+(\sqrt[q]{n})^p}{(\sqrt[q]{n})^p+(\sqrt[q]{n})^p+\cdots+(\sqrt[q]{n})^p}=\frac{1}{\frac{p}{q}+1}=\frac{q}{p+q}.$$

于是,他猜想

$$\int_0^a x^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x=\frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}=\frac{q}{p+q}a^{\frac{p+q}{q}}.$$

对于$\frac{p}{q}$为正有理数,费尔马及托里切利已证明了这个结论,但是他们的结果发表得较晚.

费尔马的结果是1658年发表的,他把自己所用的方法称为"对数方法",其主要特点是 x 的分点 $x_0,x_1,\cdots,x_m,\cdots$不是按等距离取的,而是成等比级数,即

$$x_0:x_1=x_1:x_2=x_2:x_3=\cdots$$

这样可求出广义双曲线 $yx^k=b$ (b 为常数,$k=2,3,\cdots$)下的面积,即负指数情形下的积分公式.费尔马称之为"对数方法",是因为当时"对数"一词相当于现在的"指数".同年,帕斯卡通过几何方法以及对静力学的考虑,为了解重心问题也得出了类似的公式,显然他的方法太特殊了,以致不能普遍适用.

帕斯卡对于算术方法也有贡献,他在1654年发现 k 次方之和的递归公式,即

$$\binom{k+1}{k}\sum_{i=1}^{n}i^k+\binom{k+1}{k-1}\sum_{i=1}^{n}i^{k-1}+\cdots+\binom{k+1}{1}\sum_{i=1}^{n}i$$
$$=(n+1)^{k+1}-(n-1),$$

其中$\binom{p}{q}=\frac{p!}{q!(p-q)!}$是二项系数,$p!$是 p 的阶乘,$p!=p\times(p-1)\times\cdots\times3\times2\times1$.

(4)曲线求弧长问题.

比起求平面曲线下面积与求旋转体体积来,求曲线弧长虽然也是积分问题,但问题的难度决不可同日而语.不仅复杂曲线的弧长很难求,就是椭圆与双曲线的求弧长问题也都属于极难求解的难题.除了直线、圆及抛物线之外,第一个求得绝对弧长的曲线是"半立方抛物线"

$$y^3 = ax^2,$$

这个名称是沃利斯定的,沃利斯把求出它的弧长的功劳归于英国数学家耐尔(William Neil,1637—1670)(1657),但费尔马及荷兰数学家范·赫拉特也独立得到过.不久之后,英国建筑师雷恩求出旋轮线的弧长.另一个求得弧长的曲线是蔓叶线,它是由惠更斯得到的.1670 年牛顿在他的《级数与流数方法论》中也求出了蔓叶线和半立方抛物线的弧长.他知道一般的求弧长公式,但在求椭圆弧长时,只是得到了无穷展开的级数.

椭圆积分首先是从求双纽线的弧长开始的.雅各布·伯努利在 1694 年证明,双纽线的弧长可表为

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

这个最简单的椭圆积分后来被称为双纽线积分,它在椭圆积分及椭圆函数论的发展中起着重要作用.椭圆积分最重要的发现是 1718 年法纳诺得出双纽线弧长的加倍公式,它可写成:若

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}},$$

则

$$y = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}.$$

由于 y 可以从 x 的有理代数运算及开平方得到,由此法纳诺得

出一个惊人的结果:可以用直尺和圆规把一个象限中的双纽线的弧分成二等份.他还进而证明可分成三等份、五等份,不过他的结果长期不为人所知.

1.3 曲线的求切线法

古希腊人已能求出圆及圆锥曲线的切线.阿波隆尼斯在他的《圆锥曲线论》中,把求圆锥曲线的切线问题看成从某一点到该曲线的极大线段或极小线段.

(1)罗伯瓦尔的力学方法.

首先研究更一般的求切线问题的是罗伯瓦尔,他用的是力学方法.他把曲线看成点的运动轨迹,而这种运动是两种已知运动合成的结果.例如,抛物线可看做远离准线运动和远离焦点运动的合成,由于抛物线上每个点与焦点和准线之间的距离都相等,所以它们的运动速度也相等,于是每个点合成运动速度的方向也就是该点切线的方向.用此方法也可求椭圆、双曲线的切线.意大利数学家托里切利也有同样的想法,由此他们之间产生过对优先权的争论.不过,这种方法虽然富有吸引力,但是用途有限,不能进行一般的推广.

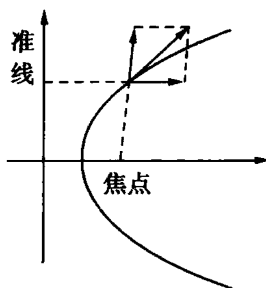


图 2

(2)费尔马的次切线法.

第二种求切线的方法是费尔马提出的,他用的是解析方法.费尔马和笛卡尔一样,也是解析几何学的奠基人,他知道曲线可用方程表示.当曲线的方程给出后,他发明一套办法来求曲线在

某一点的切线，他的方法就是所谓次切线法.

所谓一点 P 的次切线，即点 P 的切线与 x 轴的交点 T 到点 P 在 x 轴上的投影点 P' 之间的距离 t. 他用“切线是割线同曲线的两交点缩成一点时的极限”这个想法，设曲线方程 $f(x,y)=0$，则切线上点 P 的邻近一点 Q 的坐标是

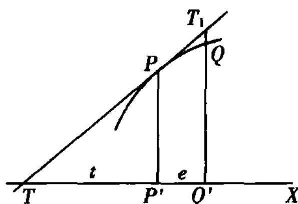


图3

$$\left(x+e, y\left(1+\frac{e}{t}\right)\right),$$

当 Q,P 之间的距离越来越小，Q 也就落在曲线 $f(x,y)=0$ 上，所以当 $e=0$ 时，有等式

$$f\left(x+e, y\left(1+\frac{e}{t}\right)\right)=0$$

成立. 这样就可求出把 t 表为 x,y 的公式，实际上用现代符号表示，即

$$t=-y\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

这个公式后来在斯吕思的著作中发表. 费尔马用它的次切线法求出了椭圆、旋轮线及笛卡尔叶形线的切线. 我们以笛卡尔叶形线为例，其方程为

$$x^3+y^3=nxy,$$

则有

$$(x+e)^3+y^3\left(1+\frac{e}{t}\right)^3-ny(x+e)\left(1+\frac{e}{t}\right)=0,$$

即

$$e\left(3x^2+\frac{3y^2}{t}-\frac{nxy}{t}-ny\right)+e^2\left(3x+\frac{3y^3}{t^2}-\frac{ny}{t}\right)+e^3\left(1+\frac{y^3}{t^3}\right)=0,$$

等式两边都除以 e,再令 $e=0$,得

$$t=-\frac{3y^3-nxy}{3x^2-ny}.$$

费尔马的求切线公式,首先在埃里岗(Pierre Hérigone,? 一约 1643)的《数学教程补篇》(1642,1644)中发表.费尔马认为,他的求切线方法是由他的极大极小方法派生出来的.据他自己讲,他早在 1629 年就已发现他的极大极小方法,但有关这种方法的详细论述首先见于他 1636 年给罗伯瓦尔及马桑的信中.费尔马在信中谈到:"求极大极小值的全部理论是采用如下惟一一条规则,即下述一般的微分或求导法则."

这第一个实际微分步骤是费尔马在 1629 年作出的,但是其原理以前也知道.开普勒已经看出,函数值的增量通常在极大值或极小值附近非常小,接近于零.费尔马于是把这个事实变成求极大值或极小值的方法.简单来讲,他的方法是:如果 $f(x)$在 x 点处取极大值或极小值,则当 e 很小时,$f(x+e)$就几乎和$f(x)$相等,即 $f(x+e)-f(x)=0$.于是,求极大值或极小值问题就变成解上述伪等式的问题.他的方法可从下例中看出:

费尔马的第一个例子是把一个量 B 分成两部分 A 和 $B-A$,使其乘积 $A(B-A)$极大.于是,费尔马造出

$$(A+E)[B-(A+E)],$$

令它等于 $A(B-A)$,即

$$A(B-A)=(A+E)[B-(A+E)],$$

$$BE-2AE-E^2=0.$$

等式两边都除以 E,得

$$B-2A-E=0,$$

再令 $E=0$,得 $2A=B$,即任何量 B,只有当平分之后,所得乘积最大.虽然费尔马实际上是令导数$f'(x)$等于 0,但他并不知道$f'(x)=0$只是极大值或极小值的必要条件而非充分条件,而且费尔马的方法也不能区别是极大值还是极小值.

(3)笛卡尔的圆法.

笛卡尔创造了第三种求切线的方法——圆法,他的方法只适用于代数曲线.他的方法是:先作出曲线 $y=f(x)$在点 P 处的法线,然后作其垂线即可.如果法线与 x 轴交于横坐标为v 的点,则点 P 即$y=f(x)$与 $y^2+(x-v)^2=r^2$ 的重交点,然后问题变成求$[f(x)]^2+(x-v)^2=r^2$ 的重根.为此,若$[f(x)]^2+(x-v)^2=r^2$ 有重根 e,则可得

$$[f(x)]^2+(x-v)^2-r^2=(x-e)^2\sum_{i=1}^{m}e_ix^i.$$

令等式两边 x 的系数相等,可得 e,并可得次法距 $v-x$,从而得出切线的斜率.笛卡尔的方法比较繁复,其后荷兰数学家许德及斯吕思把笛卡尔的方法算术化.许德在 1659 年发现了求重根的法则:$F(x)$的任何重根是 $F'(x)=0$ 的根,其中 $F'(x)$是 $F(x)$的形式导数.即若

$$F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

则

$$F'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1.$$

斯吕思在 1652 年进一步对 $F(x,y)=0$ 所决定的代数曲线得出斜率公式,但他的结果直到 1673 年才发表.

(4)巴罗的几何方法.

第四种求切线的方法是英国数学家巴罗提出来的.1669 年

他发表了《光学及几何学讲义》，这是他最主要的数学著作. 在序言中，他把书中的某些材料归功于牛顿(可能是光学部分). 正是在这本书中，他发明了微分方法，这种方法最接近现代方法. 这种方法的关键是应用所谓“微分三角形”. 比如求曲线在点 P 的切线，Q 为曲线上邻近点 P 的一点，如果 Q 很接近于 P，则 $\triangle PTM$ 和 $\triangle PQR$ 就非常接近于相似，即

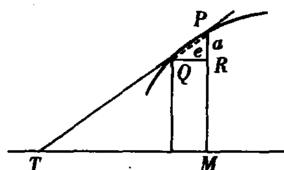


图 4

$$\triangle PTM \backsim \triangle PQR.$$

随着小三角形无限变小，

$$\frac{RP}{QR}=\frac{MP}{TM},$$

令 $QR=e$，$RP=a$，如果点 P 的坐标为(x,y)，则点 Q 的坐标为$(x-e,y-a)$，把这些值代入曲线的方程，并忽略 e 和 a 的平方项和高次方项，我们就有

$$OT=OM-TM=OM-MP\left(\frac{QR}{RP}\right)=x-y\left(\frac{e}{a}\right),$$

于是就可以将切线确定下来.

巴罗还把这种方法应用于求下列曲线的切线：

①$x^2(x^2+y^2)=r^2y^2$(Kappa 曲线)；

②$x^3+y^3=r^3$(一种特殊的拉梅(Gabriel Lamé，1795—1870)曲线)；

③$x^3+y^3=rxy$(笛卡尔叶形线)；

④$y=(r-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2r}\right)$；

⑤$y=r\tan\left(\frac{\pi x}{2r}\right)$(正切曲线).

牛顿认识到巴罗方法只不过是费尔马方法的一个改进.但是,巴罗根本没有提到过费尔马,他可能是通过间接途径知道费尔马的.巴罗方法与费尔马方法也有着不同之处.巴罗用到两个无穷小量 a 与 e,而费尔马只用到一个无穷小量 e,这样巴罗就涉及无穷小三角形与无穷小的比,而这正是莱布尼茨微分三角形的先声.更为重要的是,巴罗比费尔马更了解求切线与求积的互逆性,只是由于他的几何观点而没能使他走到底.

2　微积分的创立

2.1　牛顿

牛顿是有史以来最伟大的科学家之一.他于1642年12月25日生于英格兰林肯郡的格兰沙姆镇一个名叫武尔索普的小村里.他家世代为农,他出生时父亲已死.由于早产,他生下来就很孱弱.3岁时母亲改嫁,牛顿在外祖母家长大.在6岁时,他被送到附近的一所简陋的初等学校学习.12岁时被送到格兰沙姆中学.由于他只对机械装置有兴趣,因此学习成绩一般.1656年,他的继父去世,母亲带着异父弟妹回老家定居,牛顿辍学回家干活.但是,他不安心于农活,又被送回学校.这时,他对自然现象及科学问题开始产生兴趣.1661年6月,他以减费生资格考上剑桥大学三一学院,但他的欧几里得几何的答卷是有缺陷的.在大学学习的前两年,他按部就班地学习当时大学的主要课程——修辞学、语法、神学等,他对化学的兴趣也很大,还曾一度打算学法律.他也开始学习欧几里得的《几何原本》以及哥白尼的著作.从1663年起,他开始自学数学著作,并听新任卢卡斯讲

座教授巴罗的课.

从已经发表的牛顿的笔记中可以看出,1664年,他对自然哲学的许多基本问题进行过深入思考,这些问题在当时还是哲学、神学的混合物,科学成分不多.也许受巴罗的影响,牛顿在数学方面读了不少著作,并开始了研究工作.他1664年的三本笔记所学习的是奥特雷德的《算术之钥》(1631)、笛卡尔的《几何学》和范·斯霍腾的拉丁文译本及注释(1649,1659).他还读了韦达和沃利斯的著作.沃利斯的《无穷算术》(1656)可能对他影响最大,直接导向他最早的数学创造——二项式定理.

1665年牛顿获得学士学位之后,正赶上英国流行鼠疫,他于同年6月回到家乡,住了整整18个月.这个时期他的创造力最旺盛,而且在数学及哲学上的发现比任何其他时候都多.他在数学上发明了微积分,在光学上从实验中发现了色散现象,在力学上意识到引力的平方反比定律,而且用来解释行星的运动.

牛顿于1667年回到三一学院,成为研究员,1668年获得硕士学位,1669年在巴罗的推荐下,继巴罗之后任卢卡斯讲座教授,1672年被选为英国皇家学会会员.牛顿在这段时间继续他在光学方面的研究工作,他亲自磨制镜片,制造反射望远镜.1672年发表《光与色的新理论》,提出光是不同颜色光线的混合物,这受到胡克等人的指责;但他继续工作,又发现牛顿环,并提出光的微粒说.由于他不愿争论,他的《光学》直到1704年胡克去世后才出版.

约1669年之后,牛顿对动力学及引力理论进行了深入的研究.1684年哈雷同雷恩及胡克讨论吸引力同距离的平方成反比的普遍定律,花了许多时间仍未能找到令人信服的根据.于是,

哈雷在1684年8月拜访牛顿，请教在平方反比定律下行星绕太阳运行的轨道，牛顿马上回答是椭圆.哈雷想知道牛顿是如何计算出来的，牛顿于同年11月寄给他一份手稿.于是，哈雷马上来剑桥大学，试图说服牛顿发表他的著作.牛顿给哈雷看了一篇《论运动》的论文，后来又送交英国皇家学会一篇《论运动的命题》，这两篇论文是他的《自然哲学的数学原理》的基础.在这两年多的时间里，牛顿整天冥思苦想，甚至达到“废寝忘食”的程度.他从不休息，常常一天只睡四五个小时，但是进展并不快.《自然哲学的数学原理》的第一编到1686年4月才写完，送到英国皇家学会后，又遭到胡克的攻击.第二、三编直到1687年春才写完，全书于1687年夏出版，并很快销售一空.

《自然哲学的数学原理》这部巨著不仅是物理学上划时代的经典著作，而且也把许多力学问题化为数学问题去解决.他提出著名的牛顿三定律、万有引力定律，得出轨道的计算公式，并提出只需观察少数轨道要素就可以确定整条轨迹.牛顿还求出三体问题的近似解，后来三体问题一直是数学家与物理学家所十分关注的问题.《自然哲学的数学原理》的第二编讨论了物体在介质中的运动，开始讨论一些连续介质力学的问题.第三编研究行星及月球运动、潮汐理论、彗星理论，最后以《论宇宙体系》结尾.

牛顿的《自然哲学的数学原理》标志着科学革命时代的来临.它对人类思想产生了非同小可的影响.他用力学统一天上和地下的规律，促使机械论世界观的传播，对扫除宗教信条产生巨大的影响.在对人类认识的方法方面，牛顿靠自己的实践——实验、观察及计算，建立起近代科学方法，而抛弃过去神秘的方法及形而上学的思辨方法，这在哲学方法与科学方法之间明确划

上一条界限.牛顿统一运用分析与综合法、演绎与归纳法,得出科学及数学的基本原理,并得出相应的结论.从数学上看,他是第一位广泛地把数学与物理结合在一起的人.他不仅能提出问题,也能建立数学方法来解决它.他在《自然哲学的数学原理》中提出了许多问题,一直为以后的数学家们所探讨.

《自然哲学的数学原理》在哈雷的帮助下出版之后,第 2 版在科兹的协助下于 1713 年出版,第 3 版于 1726 年出版.

1687 年之后,牛顿的科学工作逐渐减少,主要从事公务活动,思想集中于炼金术、年代学、神学等方面.他藏有丰富的宗教书籍,他的炼金术实验室常常昼夜点火,他留下了大量的炼金术手稿,但是不知道他的目的是什么.牛顿曾设想用力学原理来说明物质的化合与分解现象,不过由于时代的局限性,他没有任何建树,而且他也不否认也许能够将贱金属变成贵金属.最近,由对牛顿的头发的分析,他的头发中汞、砷等成分远超过常值,这也许是他后来极度神经衰弱的原因.

1694 年牛顿的学生和朋友蒙塔古(Charles Montagu,1661—1715)升任财政大臣之后,聘任他为造币厂督办.牛顿于 1696 年 3 月上任,从此移居伦敦.1699 年他就任造币厂厂长,直到 1725 年.也是在 1699 年,他被选为巴黎科学院院士,并开始同莱布尼茨就微积分优先权展开争论.1701 年底,他辞去剑桥大学的职务.由于他改革币制有功,1705 年被安娜女王封为贵族,称号为艾萨克爵士.1703 年 11 月 30 日牛顿被选为英国皇家学会会长,直到 1727 年 3 月 20 日在伦敦去世.

2.2 莱布尼茨

莱布尼茨 1646 年 7 月 1 日生于莱比锡,父亲是莱比锡大学

道德哲学教授,在他6岁时去世.他从母亲那里接受启蒙教育,同时广泛阅读他父亲的丰富藏书,使他熟悉了古希腊及罗马文化.15岁时入莱比锡大学学法律,接受了哲学的训练.他的毕业论文《论个体原则》是维护经院哲学唯名派观点的.1663年到耶拿大学听维格尔(Erhard Weigel)的法学课,因维格尔也精通数学,所以在他的影响下,莱布尼茨开始对数学产生兴趣.在大学期间,他也阅读近代科学家和哲学家的著作,如培根、开普勒、伽利略、笛卡尔的著作,并写了《论组合术》(*Dissertatio de arte combinatoria*).1666年,他已准备好法学博士论文,但莱比锡大学却因他太年轻而拒绝授予他学位.于是,1666年10月他转到阿尔托夫大学,大学接受了他的论文,并于1667年2月授予他法学博士学位,还要聘他为教授.他没有接受教授职位,却去纽伦堡加入秘密社团,并结识了博因内堡男爵(Johann Christian von Boyenburg,1622—1672).博因内堡男爵是迈内茨选帝侯(Johann Phillip von Schönborn,1603—1673)的大臣,在男爵的推荐下,莱布尼茨被任命为迈因茨选帝侯法律顾问的助手,后来升任陪审法官.从1667年到1672年,他来往于迈因茨及法兰克福之间,从事公务活动,但他自己的大部分时间用来建立包罗万象的知识体系,或者说编大百科全书.为此,他打算办书评刊物,却两次遭到皇帝的拒绝.他只得孤军奋战,成为当时这类刊物的投稿人,并把一生读过的所有重要书籍都留下卡片索引.他还同几百位欧洲学者通信,题目涉及所有知识领域.他保留了1 500多封信,还有大量的笔记及草稿.1672年春,莱布尼茨带着迈因茨选帝侯的外交使命去巴黎,在巴黎居住4年,虽然外交目标没能完成,但由于他身在这个欧洲学术中心以及到各地旅行,他受到学术方面的影响,特别是受到惠更斯的影响.1673年初到伦敦访

问时,曾接触过牛顿等学者,这使他的哲学特别是数学提高到一个新境界.在这个时期,他独立发明了微积分.1672 年 12 月,博因内堡男爵去世,迈因茨选帝侯也于 1673 年 2 月去世,莱布尼茨失去了主要的职位.他想在巴黎科学院谋职却没能成功,谋求其他外交及法律职位也没有结果.由于负债,他不得不于 1676 年初接受汉诺威的布隆什维克公爵(Johann Friedrich, 1625—1679)的顾问及图书馆长职务.1676 年 10 月他离开巴黎,绕道伦敦及荷兰,于同年底到达汉诺威,从此定居下来.在以后的 10 年里,他除了担任繁重的图书馆行政事务外,在技术革新方面花费了许多精力,他钻研炼金术,设计新车子,做过利用风车抽水的装置,另外还提出各种各样的设想.不幸的是,这些都失败了.

1679年老公爵去世后,其弟新公爵(Ernst August, 1629—1698, 1692—1698年为汉诺威选帝侯)和他的夫人(Sophie, 1630—1714)及女儿(Sophie Charlotle, 1668—1705,后为普鲁士王后)对莱布尼茨都很照顾.这位公爵野心很大,为了扩大自己的影响,1687 年起公爵委托莱布尼茨编写族谱.为了搜集史料,同年 10 月他经马堡、法兰克福和慕尼黑,于 1688 年抵达维也纳.在维也纳停留了 9 个月,并晋见了神圣罗马帝国皇帝利奥波德一世.他给这位皇帝留下了深刻的印象,但没能使这位皇帝委以重任,他想建立世界图书馆的梦想也落了空.在维也纳期间,他收到了牛顿的《自然哲学的数学原理》,并写了书评.1689 年底到意大利,着手研究王室家族档案,直到 1690 年 6 月返回汉诺威.其后,他为布隆什维克史料集的出版做出了巨大贡献,他自己也以王室谱系权威自居.在 17 世纪和 18 世纪之交这段时期,莱布尼茨来往于各个宫庭之间,执行一些外交使命,不过成就并不大.大约同时,他向各国君主提出的成立科学院的建议,却产生了丰硕的

成果.1700年勃兰登堡选帝侯(Friedrich Ⅲ,1657—1713,1688—1701年在位,1701年成为普鲁士国王腓特烈一世)支持他成立柏林科学院的前身——勃兰登堡科学会,他还被任命为终身会长,同时得到王室顾问职位.在他的倡议下,维也纳及圣彼得堡都开始筹建科学院,但在他生前都没能建立起来.1712年,他被五个王室雇用,不过他并没能使其中任何一家满意.1712—1714年他在维也纳呆了两年,也没能谋到较好的职位.1714年9月他回到汉诺威,但汉诺威选帝侯已去英国任国王(即乔治一世,George I,1698—1714年为汉诺威选帝侯,1714—1727年即英国王位),并没有委他以重任.莱布尼茨的晚年生活相当不幸,他想写的历史及哲学著作都没能完成.1716年11月14日,他在患病一周后平静地去世,身边只有他的秘书及车夫.他的手稿是如此浩繁,以致今日对莱布尼茨的遗稿尚未整理完毕.

莱布尼茨是有史以来最渊博的、也是最富有创见的学者之一,他不仅是数学家,而且也是哲学家、科学家和历史学家.但是300多年来,对于莱布尼茨的思想和贡献,总的来说是低估了的,这也包含他的数学贡献.一般总把莱布尼茨当成不过是比牛顿略逊一筹至多是同牛顿平起平坐的微积分的独立发明者而已.姑且不谈莱布尼茨在组合术、代数方程论、几何学与逻辑以及计算机设计方面的贡献,即使在微积分领域,他还有许多只属于他的创造.例如,对于高阶微分、偏微分以及魏伊所强调的关于ydx的不变特征(莱布尼茨甚至用"普遍性"来形容它),说明他有许多超过他的时代的观点.他的哲学通过他的学生沃尔夫(Christian Wolff,1679—1754)统治着18世纪的思想界,尽管最后被康德的批判哲学所彻底批判,但他的思想仍不断地被反复研究.最后,他的自然哲学思想也决不是一无可取的,他对牛顿绝

对时空思想的批判以及关于"活力守恒"观点的论断,最终被证明是有合理内核的.

2.3 微积分的初建

2.3.1 微积分的普遍性

现在大多数历史学家公认,牛顿和莱布尼茨各自独立地发明了微积分.但牛顿和莱布尼茨论述微积分的语言及符号是如此不同,通常把他们分开来叙述.这样一来,他们之间的共同之点,特别是他们比前人高明之处就显得不太清楚.在这里,我们把牛顿和莱布尼茨的微积分的共同点概括如下.

牛顿和莱布尼茨的微积分比起前人来,其显著的特点是其普遍性,也就是建立起一个普遍算法,它能处理各种特殊问题.概括说来,求速度、作切线、求极大极小、求曲线在某点的曲率等问题可统一用微分法来解,而求面积、求曲线弧长、求体积、求重心、求距离等问题可统一用积分法来解.而以前大都对特殊问题采用特殊解法,它们之间的联系是模糊的.

其次,牛顿和莱布尼茨建立了微积分的一般算法体系,特别是证明了"微积分基本定理",也就是微分法和积分法为互逆运算.这个算法体系在莱布尼茨那里十分清楚,他明确给出了"函数"的和、差、积、商、幂、根的微分公式:

①如果 $y = v \pm w \pm a$,则 $dy = dv \pm dw \pm 0$(a 为常数).

②如果 $y = avw$,则 $dy = avdw + awdv$.

③如果 $y = \frac{v}{aw}$,则 $dy = \frac{wdv - vdw}{aw^2}$.

④如果 $y = w^z$,则 $dy = zw^{z-1}dw$.

⑤如果 $y=\sqrt[z]{w}$，则 $\mathrm{d}y=\dfrac{\frac{1}{z}\mathrm{d}w}{w^{\frac{z-1}{z}}}$.

这样，微积分的整个算法体系就建立起来了，为它成为解决实际问题的有效工具奠定了基础.

另外，他们都为进一步发展微积分本身指出了方向.他们都提出过换元方法，莱布尼茨特别指出 $y\mathrm{d}x$ 的换元下不变性，这是极为深刻的观点.他们都用过无穷级数，牛顿十分强调其普遍意义，这样就为一般问题的解决提供了前景.

2.3.2　牛顿的微积分

牛顿在数学方面有多方面的贡献，最主要的当然是微积分.牛顿的微积分形成于1664—1666年瘟疫流行的时期.1664年9月，他学习笛卡尔求次法线长度的方法，并应用许德求代数方程重根的计算法，开始求各种代数曲线的次法线的长度、切线的长度、曲率等，实际上是求代数方程所定义的函数的导数.1664年底，他学习沃利斯的不可分量方法，开始摸索求积分的方法.

1665年春，牛顿已经得出微分法的计算法和曲率的算法.同年春夏之交，牛顿已认识到微分和积分互为逆运算，并列出各种函数的微分和积分的并列公式.同时，他得出表示双曲线面积的级数展开式，到同年秋他已经试着解简单的微分方程式.这时，他开始有不完全的流数（导数）概念，这是从运动出发得到的.1665年底，他已经把求代数曲线的切线、曲率等推广到稍一般的曲线上.1666年春，他开始产生朴素的极限概念.所有这些最早的发现，他都写进1666年10月的著作《论流数》中.牛顿在世时，这篇微积分的第一篇论文只有少数复本在英国一些数学

家中流传,长期没有出版,直到1962年才首次问世.

《论流数》这部著作分为三部分:第一部分包括简单代数函数的积分公式及流数的一般算法;第二部分把这些方法应用于代数曲线及一般曲线,并提出关于垂直坐标轴的曲率理论以及曲率半径的概念,特别提到微积分基本定理;第三部分是重力理论.

从牛顿的《数学论文集》来看,后来牛顿关于微积分的著作可分成各有特色的三个时期:

(1)1671年左右,解析时期或代数的分析时期;

(2)1680年左右,几何时期;

(3)1687年,《自然哲学的数学原理》中的微积分.

牛顿在1666年论文的基础上,写了两篇重要的论文:

1669年,《运用无穷项方程的分析》;

1670—1671年,《级数与流数方法论》.

他1669年的论文在朋友中流传过,而且莱布尼茨也见到过,但直到1711年才出版.他在这本小册子中引进"瞬"的概念,即变量的无穷小增量.利用"瞬"的概念,对已知面积可求出原函数的值.反过来,可求出一个变量对另一个变量的变化率.他先运用二项式定理求出多项式的导数及积分,然后把逐项积分扩展到无穷级数,这样就可以得出一切积分的运算.他还明确指出:"任何事情,只要是普通分析能够通过有限多次方程去做的,也能够通过无穷多项的方程去做……后一种方程的正确性也不少于前一种……"当然,他的"瞬"的概念在逻辑上并不严格.

他1671年写成的著作在1736年才出版,这是一部详尽的著作,对自己的思想作了广泛而明确的说明.在这本书中,他认为变量是由点、线、面的连续运动而产生的,而不是以前所说的

无穷小元素静止的集合.他把变量称为流量,把变量的变化率称为流数,并用 $\dot{x}$(流量 x 上加一点)表示 x 的流数(即导数),反过来,流数为 $\dot{x}$ 的流量(即原函数)用 x' 表示.

接着,牛顿系统地叙述了微积分的三类问题:

(1)已知诸流量间的关系,求它们的流数间的关系,这是微分法.

(2)已知包含流数在内的方程,求这些流数的流量.这不仅包含积分法,而且包括对更一般的微分方程的积分.他把微分方程分成三种类型,并解决了其中一些问题.第一类方程有 $\dot{x}$,$\dot{y}$,还有 x(或 y)出现,这就是简单的积分问题.第二类方程有 $\dot{x}$,$\dot{y}$,x,y 出现,牛顿用逐步逼近法来解一些这类方程.第三类方程有 $\dot{x}$,$\dot{y}$,$\dot{z}$ 及其流量出现,实际上是偏微分方程,牛顿只求出了一些特殊积分.

(3)用微积分方法解决各类问题,其中包括求极大极小、作曲线的切线、求曲线上各点的曲率、决定曲率的性质、求面积已知的曲线方程、求面积满足某些方程的曲线、求任意给定曲线的面积以及求弧长的相应问题.

这本书实际上是第一部系统的微积分著作,它标志着微积分作为分析学登上了历史舞台,并促进了以后数学和物理学的发展.

1676年牛顿写了《曲线求积论》的论文.这篇论文在方法上虽然没有很大改变,但在原理上放弃了以前舍去"高阶"无穷小量的做法.他指出:"在数学中,最微小的误差也不能忽略……在这里,我认为数学的量并不是由非常小的部分组成的,而是用连续的运动来描述的……流数可以任意地接近于在尽可能小的等间隔时段中产生的流量和增量,精确地说,它们是最初增量的最

初的比……"而在增量消失时,就得到最后的比.他还引进了几何解释.他这样改变观点,实际上是否定笛卡尔的代数或解析观点,而回到公认严格的古希腊几何学观点.

1680年牛顿写了《曲线几何学》的论文.这篇论文完全采用了几何学方法.他按照欧几里得几何学的体制,对微积分按定义、公理、公设、命题来叙述.在11个定义中,第一个是流量(即由连续变化可增减的量),第二个是流数(即流量的变化速度).在6条公理中,第一条是恒等的二量由相等的流数生成,第六条是二量的流率之比等于其消失部分的最初比……上述的比等于消失部分在减少以至消失的情况下的最终比.这里又出现了最初比和最终比的概念,实际上是牛顿从前辈数学家那里继承下来的未完成的极限概念.其后,他给出2条公设及30个命题.这篇论文的第二部分,主要是通过"几何学方法"求解极大极小、切线和曲率问题.这部未完成的著作直到1971年才出版.

牛顿首次发表微积分的著作是他的巨著《自然哲学的数学原理》(1687),当然这部著作在科学上的价值远远大于它在数学上的意义.但是,他应用数学处理物理学的结果对后世有着巨大的影响.他在这部著作中仍然采用流数及最初比和最终比的概念,但他用极限对此作了说明:"消失量的最后比不是最后量之比,而是无限减少的这些量的比所趋近的极限,它与这个极限的差虽然能比任何给定的差更小,但是在这些量无限缩小之前既不能超过也不能达到这个极限."从现在的观点来看,这是清楚的,不过从逻辑上还是容易挑出毛病的.

2.3.3 莱布尼茨的微积分

同牛顿一样,莱布尼茨也没有及时发表自己的著作.促使莱

布尼茨发表他的著作的,是他在巴黎时结交的一位朋友车恩豪斯.从两人的书信来往中,莱布尼茨告诉车恩豪斯自己的结果,但车恩豪斯并没能透彻地理解莱布尼茨的结果,还把它当成自己的成果发表在《博学者学报》上.《博学者学报》是莱布尼茨的朋友、莱比锡大学道德及政治学教授门克(Otto Mencke,1644—1707)在1681年3—4月间倡议创办的,在创办该刊的过程中,他同莱布尼茨多次交换意见.这份刊物在1682年以月刊的形式创刊,莱布尼茨作为编辑,也在该刊上发表了不少论文.由于刚创刊就碰到车恩豪斯的论文,莱布尼茨和车恩豪斯对关于代数曲线的代数求积的可能性展开了激烈争论.这导致莱布尼茨考虑发表自己的微积分著作,一共有两篇:第一篇是在1684年10月第3卷上发表的微分法的论文,他在这篇文章中讲,他对微分法的考虑已经有9年了.它有一个很长的题目:《求极大与极小以及切线的新方法,这方法同样适用于分数和无理量,以及关于这方法奇妙类型的演算》(*Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus que nec fractas, nec irrationales quantitates movatur & singalare pro illi calculi genus*).这篇论文只有6页,却包括了微分记号及微分法则,还有判断极大极小及拐点的条件.第二篇是在1686年第5卷上发表的积分法的论文,只有8页,题目是《论深奥的几何学及不可分量或无穷的分析》(*De geometria recondita et analysi indivisibilium et que infinitorum*),其中给出了积分符号及积分方法(作为反微分法),并说明它们适用于超过当时代数式的机械曲线,还导出摆线的方程.这两篇论文先于牛顿奠定了微积分的基础,并促进了其后微积分的发展.

牛顿的工作和莱布尼茨的工作有许多差异,这主要是由于他们的出发点不同.牛顿主要是物理学家,他的中心思想是速度

概念.莱布尼茨主要是哲学家,他的中心思想是单子.思想方法的不同决定了他们通过不同的途径来建立微积分.牛顿强调连续性,莱布尼茨则强调离散性;牛顿自由地运用无穷级数来表示"函数",而莱布尼茨宁愿用有限的形式,他反对把函数展成无穷级数而宁愿把它们归结为哪怕是超越函数的积分.在具体做法上,牛顿的出发点是导数(也就是流率、变化率),求导数(微分法)是基础,求面积、体积是求导的逆问题,而不是从求和来考虑的.莱布尼茨首先关心的是求积问题,他把求积看成对无穷小量求和,进而得出微差.莱布尼茨直接处理微分,而把求和过程看成反微分.对他来说,独立的微分 dx,dy 是基本的,而其比$\frac{dy}{dx}$只不过是一个有几何意义的商而已.最后,由于莱布尼茨的符号系统比牛顿的更为方便,在算法考虑上更为普遍,所以就决定了他的方案日后得以被普遍推广.牛顿在不定量 y 上写一点 $\dot{y}$ 表示其流数(即变化率或导数),沿袭他的用法的被称为用点派,而莱布尼茨用 dx,dy 表示 x,y 的微分,被称为用 d 派,他还是积分符号"$\int$"的首创者.

与牛顿相比,莱布尼茨较晚得到微积分的成果,却首先发表.1672 年莱布尼茨访问巴黎,1673 年曾在伦敦呆了 3 个月,并且和一些知道牛顿工作的人通过信.据他自己在 1691 年的论文中说,他在 1672 年到巴黎时对高等数学还什么也不懂,到巴黎之后,主要受惠更斯的指点,并通过惠更斯学习了伽利略、笛卡尔、帕斯卡等人的工作,后来他在学习惠更斯的《摆钟》(*Horologium oscillatorium*)(1673)以及圣·文森编的格利高里的著作时,突然想到了微积分.他在 1673—1676 年间留有大量手稿,从这些手稿的研究中可看出他艰苦摸索的历程.可以断定,他是

在 1673—1676 年间获得微积分的成果的，在 1677 年 7 月已接近完成.

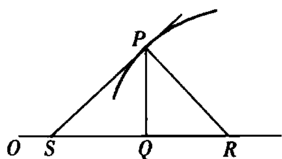


图 5

现在对莱布尼茨的数学手稿已有充分的历史研究，这里只把他的基本思想概述如下.

虽然莱布尼茨最先引入“函数”这个词，但是他没有讨论过函数及其导数. 他所考虑的是量、无穷小量以及它们之间的运算. 对现在考虑的自变量 x，他把 $\mathrm{d}x$ 定义为相邻两项的差，而对现在的因变量 y，他一般用来表示某个长度，它可以是横坐标 (OQ)、纵坐标 (PQ)、切线长 (SP)、法线长 (PR)、次切线长 (SQ)、次法线长 (QR) 等. 他把曲线下的面积看成无穷小面积的和，他最早用的记号是 omn · y^l，其中“omn”是拉丁文 omnia（所有）的缩写，后来用 $\int y\mathrm{d}x$ 表示，$\int$ 表示和“sum”中 s 的拉长. 同时，他定义的切线斜率是纵坐标之差与横坐标之差的比，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

他知道 $\mathrm{d}y : \mathrm{d}x = y :$ 次切线长，这些都没有什么新意，问题是求积与切线的关系，这与莱布尼茨关于级数求和的想法有关.

他刚到巴黎时，惠更斯就给他出了一道题，求三角形数的倒数之和. 三角形数是指形如

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

的数. 莱布尼茨很巧妙地解决了这个问题. 他发现三角形数的倒数

$$\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

因此,前 n 项和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以,三角形数的倒数之和为 2. 他解决了这个问题后很得意,认为几乎所有的无穷级数他都能够求和. 这时,他发现这个级数与调和三角形有关:

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \cdots \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \cdots \\
\frac{1}{6} & \cdots
\end{array}$$

他发现,除了第一行、第一列之外,每个数都是同列上一行的数减去右边的数的差;第二行正好是三角形数的倒数的 $\frac{1}{2}$;其和为 1;而第三行正好是四面体数

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

的倒数的 $\frac{1}{3}$,由调和三角形不难看出,其和为 $\frac{1}{2}$;依次类推. 而且造出这个调和三角形也不难,只需把算术三角形(帕斯卡三角形)

$$\begin{array}{llllllll} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots & & \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdots & & & \\ 1 & 5 & 15 & \cdots & & & & \\ 1 & 6 & \cdots & & & & & \\ 1 & \cdots & & & & & & \end{array}$$

的第 n 条对角线上每个数的倒数再除以 n，即可得到调和三角形的第 n 条对角线上相应的数．从这种类比中，莱布尼茨认识到求积运算（求和运算）与求切线运算（求差运算）互为逆运算．具体的求积法及求切线法与特征三角形或无穷小三角形有关．他把对一条曲线的求积化为对另一条曲线的求积，使得新曲线的求积法已知，或者与原来的求积问题有一定关系．他所采用的新曲线一般是抛物线及双曲线，它们已经能求积．他称这种规则为变换规则，并用来求圆的面积，从而得出著名的莱布尼茨公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

2.3.4　微积分优先权之争

17 世纪 80 年代微积分优先权之争似乎尚未开始，牛顿的《自然哲学的数学原理》的出版受到普遍的赞扬，牛顿的名声也大为提高．他在 1689 年被选为国会议员．1692 年牛顿突患抑郁症及神经衰弱，从此不能从事紧张的科研工作．同时，不愉快的事情也接踵而至，给他的晚年生活投下阴影．1695 年沃利斯告诉牛顿，在荷兰，微积分被认为是莱布尼茨的发明．1699 年瑞士的一位没有什么名气的好事之徒德·杜伊耶（Nicholas Fatio de

Duillier,1664—1753)在移居英国后,给英国皇家学会呈交了一篇论文,说莱布尼茨关于微积分的想法来自牛顿.1704年莱布尼茨在《博学者学报》上坚持自己的优先权,并抗议英国皇家学会的诬蔑,还在1705年对牛顿的《曲线求积术》给予不友好的评论.1708年凯尔在《哲学汇刊》上发表文章,强烈支持牛顿,反对莱布尼茨.于是,莱布尼茨作为英国皇家学会会员,一再提请英国皇家学会主持公道.这时牛顿已是英国皇家学会会长,他指定一个由自己的拥护者组成的11人的委员会研究文件,他们在1712年初向英国皇家学会提出一份报告,其中对莱布尼茨是否有意剽窃并没有从正面得出结论,而只是谈到莱布尼茨的微分法就是流数法,只是名称及记号不同.该报告认为,问题不在于谁发明,而在于谁第一个发明.该报告把第一个发明者归之于牛顿,并得出凯尔的攻击并非有意伤害莱布尼茨的结论.这个偏袒一方的报告只是根据一个假定,即莱布尼茨看过牛顿在1672年12月给科林斯(John Collins,1625—1683)的信,这封信中对任何有思想的人都足够充分地描述了流数方法.1713年1月,该委员会的报告用拉丁文付印,分送给有关的机构及个人.虽然莱布尼茨在欧洲大陆有许多拥护者,但很少有人敢于挺身而出为莱布尼茨辩护,只有约翰·伯努利一开始就支持莱布尼茨.当莱布尼茨获得这一消息后,他不得不自己替自己辩护.为了减弱对他不利的证据,他说"在我们已知道很久之后,牛顿还不知道如何正确地使用二阶微分"等等.这篇匿名发表的文章激起了英国人更大的愤怒,凯尔更是污辱谩骂、脏话连篇.牛顿本人也于1715年匿名在《哲学汇刊》上发表评论,力图对莱布尼茨予以毁灭性的打击.1714年,莱布尼茨写了《微分法的历史及起源》(*Historiaet origo calculi differentialis*)为自己辩护.直到他临终的1716年,

他在4月9日写给当时在伦敦的意大利教士康蒂(Antonio Schinella Conti,1677—1749)的一封信中指出,牛顿在《自然哲学的数学原理》一书的附注中提到,莱布尼茨是一位天才,也是微分法的独立发明者.他相信牛顿一定认为对莱布尼茨的指责是错误的.牛顿知道这封信的内容之后,散发了一个便条,否认自己在《自然哲学的数学原理》的附注中所提到的话有承认莱布尼茨享有独立发明权的意思,而且当他听到莱布尼茨去世后立即公之于世,并在《自然哲学的数学原理》第3版(1726)中把原来的附注换成了另一个,其中莱布尼茨的名字也不见了.由此看来,他们两人在莱布尼茨去世时,已由朋友变成了势不两立的对手.关于微积分优先权的争吵并没有随着他们两人的去世而结束,一直延续了一两百年,成为数学史家的研究对象.随着越来越多的历史文献的发表及研究,现在大家公认牛顿和莱布尼茨都是微积分的独立发明者.这场争吵对英国及欧洲大陆的交流造成了不可弥补的损失,特别是使英国数学的发展远远落后于欧洲大陆,使英国数学界错过了几代人可做贡献的机会.

3 微积分的发展

3.1 伯努利时代(1690—1740)

在17世纪80年代,莱布尼茨和牛顿各自发表了微积分的基本著作之后,微积分的框架只是初具规模,其后100多年的发展主要是微积分的体系化,特别是分析化,还有算法的改进、扩充以及各式各样的广泛应用.

在1690—1740年间的半个世纪,在数学史上被称为伯努利

时代.但是这期间的数学史,一般书上多语焉不详.在这个从牛顿到欧拉所有主角都在舞台上的时代,究竟上演的什么戏呢?

(1)数学上在1690年以后的10年间,提出了一系列问题,其中许多问题当时的确都是用微积分甚至更简单的方法加以解决的,但是,关于曲线族的一些典型问题远远超出一元微积分的领域,开创了多元微积分(定义偏微分)以及变分法两个新领域.

(2)在微积分从牛顿—莱布尼茨的几何表述方式过渡到欧拉—拉格朗日的分析表述方式,实际上还有一段很长的道路要走.这里面的关键问题是无穷级数展开.在这个问题上,无论是欧洲大陆莱布尼茨的用d派,还是英伦三岛牛顿的用点派,都看到了这一点.17世纪末18世纪初,处于微积分优先权争论的两派,在这个问题上却是殊途同归的.

(3)在这个期间,数学界最大的事件是牛顿和莱布尼茨关于微积分优先权的争论,这个问题的方方面面已有充分的研究,而且已有专著出版.在1699—1716年间正是双方热战时期,但是,欧洲大陆及英国之间的交流似乎并未就此完全停止.必须看到数学史著作中常常忽略的一件事,那就是牛顿的自然哲学体系也是在这50年间战胜笛卡尔的自然哲学体系而进军欧洲大陆,特别是笛卡尔的祖国——法国的.从这里可以看出,知识传播的历史是要经历一段时间的.约翰·伯努利在1730年还因为笛卡尔体系而获得巴黎科学院大奖,但到1734年他就开始调和折中笛卡尔体系和牛顿体系,1735年对笛卡尔学说及牛顿学说开始进行判别实验.按照笛卡尔学说,地球是长椭球形的,而根据牛顿的计算,地球应是扁平的.在1732年,巴黎学术界完全接受笛卡尔学说.当年,莫培督(Pierre-Louis Moreau Maupertuis,1698—

1759)的《谈论星体的不同形状》首先站在牛顿的立场上,因而遭到很多攻击,却得到思想界的领袖人物伏尔泰(Francois Marie de Voltaire,1694—1778)的支持.于是,问题变成对地球进行精密测量的问题.一开始人们似乎支持地球纵长学说.1735年莫培督开始组织到北极附近的拉普兰和南美的秘鲁进行测量,在1737年所得到的结果显示,两极的子午线1度略长一些.1740年支持地球纵长学说的卡西尼家族成员塞萨·卡西尼(César Francois Cassini de Thury,1714—1784)也发现越靠近北极,子午线1度的长度越长,这时牛顿学说完全取得胜利.伏尔泰不无讥讽地说:"牛顿的计算不仅压平了地球,也压平了卡西尼们."1740年成为巴黎科学院以笛卡尔学说为获奖竞赛的最后一年.其后,欧洲大陆的力学是用莱布尼茨的微积分表述的牛顿力学.而18世纪下半叶的英国,无论是数学还是力学,都大大落后了.

3.1.1 伯努利家族

伯努利家族是一个声名显赫、人才辈出的家族,至今在商界、学术界、政界、法律界等仍有许多这个家族的杰出后裔.令人惊奇的是,从17世纪末到19世纪初,这个家族一下子出现了十几位数学家,尤其是前两代产生五位杰出的数学家,他们成为伯努利时代欧洲大陆举足轻重的人物.前三代的八位数学家见下表,其中老尼古劳及小尼古劳不是数学家.

伯努利家族世代经商,16世纪下半叶在南尼德兰安特卫普定居,属信奉天主教的西班牙哈布斯堡王朝的统治.宗教改革时期,伯努利家族改信新教,因而受到迫害.1583年举家逃往瑞士巴塞尔,从此在这里生息繁衍.17世纪末,伯努利家族中首先出现了两位数学家,他们是伯努利时代的代表人物.



雅各布·伯努利,1654 年 12 月 27 日生于瑞士巴塞尔,是伯努利家族第一位杰出的数学家.他于 1671 年从巴塞尔大学哲学院毕业,取得艺术硕士学位,实际上这在当时表示完成七艺的基础课训练.其后遵照父亲的愿望,进入神学院学习,1676 年取得神学硕士学位,但他没有成为牧师,而是自学他所喜欢的数学及天文学.从 1677 年起,他开始写笔记"沉思录"(Meditationes),把自己的思想记录下来.1678—1682 年,他遍游瑞士、法国、尼德兰、英国、德国等欧洲国家,靠教书及布道挣钱,同时广泛阅读科学文献,并同著名学者如惠更斯、许德、波义耳、胡克等人通信,这使他掌握了当时最先进的数理知识.1682 年他发表了第一篇科学著作,提出彗星周期性运动思想,破除了关于彗星的种种迷信观念.1683 年他回到巴塞尔大学,先讲授实验力学,后在 1687 年开始任巴塞尔大学数学教授,直到 1705 年 8 月 16 日去世.在此期间,他教过他的弟弟约翰·伯努利数学,他的学生中还有赫尔曼、侄子尼古劳第一·伯努利及大名鼎鼎的欧拉的父亲保罗·欧拉(Paul Euler,1670—1745).

雅各布·伯努利在巴塞尔大学期间,才开始接触到莱布尼茨 1684 年的论文,并于 1687 年间向作者讨教.从 1690 年起,他们

建立了经常的通信联系,讨论微积分、几何、力学等种种课题.雅各布·伯努利和约翰·伯努利在1690年首先提议用“积分”这个术语代替莱布尼茨所用的“求和”,而且最早出现在雅各布·伯努利1690年发表的论文之中.雅各布·伯努利对分析的最大贡献是在1691—1704年间关于无穷级数的研究.他还对许多重要曲线,特别是悬链线及对数螺线的性质进行探讨.他引进椭圆积分,解出一些常微分方程,并解出最速降线问题.他去世后,于1713年才出版的著作《猜测术》是概率论的奠基性著作.

雅各布·伯努利的弟弟约翰·伯努利1667年8月6日生于瑞士巴塞尔.他没有顺从父亲的意愿去经商.1683年进入巴塞尔大学哲学院学习,1685年毕业并取得艺术硕士学位.其后进入医学院学习,1690年取得医学硕士学位,1694年获得医学博士学位,但他从未行医开业.在这期间,他在哥哥雅各布·伯努利的指导下学习数学,从1687年起兄弟两人一起钻研莱布尼茨的无穷小演算.约翰·伯努利自己认为是他首先完全弄懂莱布尼茨的微分法的.1690年约翰·伯努利已经是微积分的独立研究者了.由于黄金定理(实际上来自雅各布·伯努利)能巧妙地定出曲线的曲率半径,使他成为莱布尼茨微积分派的代表人物.1690年他游学巴黎时,同巴黎科学院院士瓦里涅昂及洛比达侯爵结识,并在1691—1692年间向洛比达授课.按照他们之间的协议,洛比达把约翰·伯努利的讲义用自己的名字出版,这就是第一部微分学著作《关于曲线研究的无穷小分析》(*Analyse des infiniment petits pour l'intellegence des lignes courbes*)(1696),其后多次重印,影响了几代数学家.其中刊载的洛比达法则也是属于约翰·伯努利的.约翰·伯努利在教课中第一次把莱布尼茨的微积分系统地加以论述,他的《积分法数学讲义》(*Lections mathematicae de*

methodo integralium)于 1742 年问世,微分法部分的笔记直到 1922 年才被发现.约翰·伯努利自己从 1693 年起也开始同莱布尼茨通信,他们一共交换了 275 封信,加上他同另外 100 多位数学家的通信,共达 2 500 多封,现正陆续整理出版.1695 年约翰·伯努利被任命为荷兰格罗宁根大学数学教授,他教的数学及实验物理课都非常成功,许多大学都发出了邀请.1703 年巴塞尔大学为他提供了薪金不高的希腊语教授席位,他为找到更好的位置,故意拖延不去.1705 年 8月在听到他哥哥去世的消息后,才拒绝了其他地方的一切邀请,返回故乡.同年 11 月,他被任命为巴塞尔大学数学教授,直到 1748 年 1 月 1 日去世.

在 1690—1740 年间整整半个世纪的时间里,约翰·伯努利是莱布尼茨与欧拉之间的欧洲大陆数学分析的主要代表人物,但当时研究的仍然是特殊问题,采用数学家提出问题向其他数学家挑战的方式.在 1690—1700 年间,莱布尼茨、雅各布·伯努利、约翰·伯努利以及牛顿等都参与了提问和竞答,因此约翰·伯努利同他哥哥的关系显著恶化.1700 年以后,约翰·伯努利进一步卷入了牛顿和莱布尼茨关于微积分优先权的争论,成为莱布尼茨的拥护者.

在伯努利家族第二代中,尼古劳第一·伯努利(Nikolaus Ⅰ,1687—1759)对级数论及概率论有贡献,特别是对级数的收敛和发散极为关注.他还在偏微分法中证明偏微分可交换性定理.尼古劳第二·伯努利(Nikolaus Ⅱ,1695—1726)对概率论有贡献.在伯努利家族第二代中,最伟大的科学家、数学家是丹尼尔·伯努利(Daniel,1700—1782),1725—1733 年他在圣彼得堡科学院同欧拉共事,在水力学、弦振动理论、声学及气体理论中成功地运用了分析方法,被认为是数学物理的奠基人.

3.1.2　一元微积分

在莱布尼茨发表了两篇微积分论文之后,雅各布·伯努利就于 1687 年开始同莱布尼茨通信,其后在 1693 年约翰·伯努利也同莱布尼茨通信.约翰·伯努利在 1691—1692 年编写了两本微积分教科书,是莱布尼茨工作的精确化及系统化,但长期没有出版(1742 年出版一部分).1691 年约翰·伯努利曾到巴黎教导法国侯爵洛比达,他于 1694 年发现"洛比达法则",并被写进洛比达于 1696 年出版的第一本微积分教科书《关于曲线研究的无穷小分析》中.

《关于曲线研究的无穷小分析》共分 10 节,主要是微分法则,并且应用于求切线、极大极小、拐点及尖点、渐开线、焦散曲线等,最后特别提到其方法可扩张到超越曲线上.

约翰·伯努利的《积分法数学讲义》(1742)是当时积分法的总结.首先是莱布尼茨一般积分法及积分法则,其次包括曲线求积、曲线求弧长以及微分方程求解,最后讨论焦散曲线、等时降线以及悬链线等有关的力学及物理学问题.

这两部著作说明,在伯努利时代初期,微积分已经有了一般方法,并且在许多问题上得到了应用.

光线族的焦散曲线是光线族的包络,首先由车恩豪斯引进,而约翰·伯努利从 1691 年开始系统研究,并得出一些焦散曲线的方程.同时,莱布尼茨给出求一族平面曲线包络的一般方法.

在微分法方面,雅各布·伯努利对许多特殊曲线如悬链线、抛物螺线、对数螺线等的各种微分性质进行了研究.

悬链线问题是非常有名的.悬链线是指把一条柔软的绳子的两端固定后自由悬垂所呈的曲线形状,这是在微积分历史上

提出的第一个比较难的问题.雅各布·伯努利于1690年5月在《博学者学报》上提出这个问题,公开向各国数学家挑战,但这个问题的历史并不短.1636年伽利略曾认为是抛物线.1646年,17岁的惠更斯证明伽利略错了,它不可能是抛物线,但是他还不清楚这是什么曲线.差不多半个世纪之后,这个老问题又被提出来,有三位数学家提出了解答:一位是惠更斯,一位是莱布尼茨,再一位是约翰·伯努利,他们都得出了正确的解答——悬链线,并正确描述了它的性质.他们的有关解答发表在《博学者学报》1691年6月号上,但都没有公开他们的方法.从他们的通信及历史文献来看,惠更斯用的是阿基米德的古典方法,而莱布尼茨和约翰·伯努利用的是微分法.由于微分法更直接,所以,这一次竞赛可以说标志着新的微分法战胜了古典方法.

约翰·伯努利的方法更为简单,这已在他给洛比达的积分法讲义中完全叙述出来.实际上,他得出方程

$$\mathrm{d}y=\frac{a}{s}\mathrm{d}x,$$

其中 s 表示弧长,经过变换可得

$$\mathrm{d}y=\frac{a\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

积分应得

$$x=\frac{1}{2}a\left(\mathrm{e}^{\frac{y}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{y}{a}}\right)-a.$$

由于约翰·伯努利还没有对数函数及指数函数的观念,最后一步他是通过几何方法画出曲线而得到的.这表明,在伯努利时代,分析还不能完全摆脱几何的束缚.

尽管牛顿和莱布尼茨已经为积分奠定了基础,但积分问题远比微分困难.其后200多年间,数学家们对积分及其推广——

微分方程有着广泛的研究. 伯努利兄弟在 1690 年首先引进“积分”的概念来取代莱布尼茨的“求和”. 约翰·伯努利发展了积分的计算方法,特别是用部分分式法对有理分式进行积分. 1697 年他运用分部积分法证明

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots$$

1695 年雅各布·伯努利首先提出伯努利微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

不久莱布尼茨、雅各布·伯努利及约翰·伯努利都获得了解法. 约翰·伯努利在一阶齐次常微分方程的积分方面首先应用了积分因子,对当时数学家所关心的、来源于等角轨线的问题,他也给出了解答(1698). 另外一个重要贡献是莱布尼茨及约翰·伯努利提出用偏微分来处理曲线族问题,不过,为了把它们当成秘密武器向其他数学家挑战,他们保密了 20 年. 这在当时是一种普遍现象.

在 18 世纪的英国,微积分占据数学研究的主流. 英国的数学由于对微积分优先权的争论,仍坚持沿着牛顿开辟的道路发展. 18 世纪上半叶,英国的数学也对微积分的发展做出了自己的贡献. 科兹协助牛顿修订出版《自然哲学的数学原理》第 2 版(1713),他本人也是数学家,特别是他首次得到(1714)所谓欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

而对于棣莫弗的著名公式

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

他似乎并没有明显写出,不过由他的著作可以推测,科兹可能早在 1707 年就已知道. 在 1707 年的《哲学汇刊》上,科兹写出

$$\frac{1}{2}(\sin n\theta+\sqrt{-1}\cos n\theta)^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2}(\sin n\theta-\sqrt{-1}\cos n\theta)^{\frac{1}{n}}=\sin\theta.$$

在《分析杂著》中,他写出

$$(\cos\theta\pm\mathrm{i}\ \sin\theta)^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{2k\pi\pm\theta}{n}\pm\mathrm{i}\ \sin\frac{2k\pi\pm\theta}{n}.$$

在这本书中,科兹还讨论了虚数,并将圆的扇形公式推广为等边双曲线的扇形公式,这样他接近得到双曲函数.1739 年科兹还能正确地求出 $a+\sqrt{-b}$的 n 次根,他很可能早在 1730 年之前就已经知道斯特灵公式

$$n!\ \approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n},$$

以及斯特灵级数.

泰勒在 1715 年出版了《增量的直接和逆方法》(*Methodus incrementorum directa et inversa*),其中提出了著名的泰勒级数

$$f(x+a)=f(a)+f'(a)x+f''(a)\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{x^{n}}{n!}+\cdots$$

不过,泰勒级数早已为格利高里及约翰·伯努利所知道,但泰勒并不晓得,泰勒本人则是在 1712 年 7 月 26 日致马钦(John Machin,1680—1751)的信中宣布的.他说,他的发现是在柴尔德(Child)咖啡馆的一次谈话中想到的,当时谈的是用“艾萨克·牛顿爵士的级数”解“开普勒问题”以及“哈雷博士的求多项式的根”.

1730 年斯特灵出版了《微分方法》(*Methodus differentialis*),发展了级数求和理论及有限差分方法.为了回答巴克莱(George Berkeley,1685—1753)在《分析学家》(1734)中对流数法的攻击,许多数学家发展了牛顿的流数方法,如辛普森在 1737 年出版了《流数新论》,特别是麦克劳林在 1742 年出版了《流数论》,完全

按照牛顿后来的办法,用古典几何的方法来阐述流数方法,其中也包括一些新发现,如麦克劳林级数,尽管它是泰勒级数的特例.《流数论》的特点在于从公理出发,仿照欧几里得的方式来推演,以求保持古典几何式的严密性.为此,麦克劳林完全不用无穷和无穷小的概念,后来拉格朗日对此也大为称赞.他在用流数法解决力学、物理学及天文学问题时,仍采用综合几何的方法,这不能不说是非常高明的,但与先进的普遍的分析方法显然背道而驰,尽管麦克劳林在位势论方面取得一定成就,但他的方法很难推广.

在伯努利时代,无穷级数法也在欧洲大陆得到发展.

由几何方法向分析方法过渡的关键一步就是无穷级数,牛顿和莱布尼茨都掌握了这个工具.牛顿早在1665年就发现了二项级数,1669年开始考虑更一般的无穷级数,例如求双曲线

$$y=\frac{a}{b+x}$$

下的面积.牛顿先用长除法得出展开式

$$y=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\cdots$$

然后逐项积分,得出相当于莫卡托在1668年提出的结果

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

对于求圆面积,牛顿用开根法求出

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

的无穷级数,然后如法炮制.

实际上,牛顿有意识地把代数(他称之为分析)规则运用到无穷多项的情形,即对隐函数情形

$$f(x,y)=0,$$

把 y 表为 x 的幂级数,这是牛顿在“后书”中用字谜写的.现在这种方法被称为牛顿平行四边形法,实际上是未定系数法.牛顿并没有提供证明,它是在几十年后由克拉梅和凯斯特纳给出的.

牛顿还提出“级数反演法”,它由棣莫弗在1698年的论文中完全地加以阐述.例如,对于双曲线下的面积

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

即对数函数,反演以后得出

$$x = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \cdots$$

这就是指数函数.同样可得出 $\arcsin x$, $\arctan x$, $\sin x$, $\cos x$ 等的展开式,并可求出旋轮线及割圆曲线下的面积,当时所缺乏的主要是函数的观念.

牛顿还进一步提出用无穷级数法解微分方程.

莱布尼茨在1673年也独立得出 $\sin x$, $\cos x$ 及 $\arctan x$ 的展开式,并在1674年得出

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

在听说牛顿同样的工作以后,莱布尼茨通过奥尔登堡于1676年告诉牛顿这些结果以及其他一些结果.对于牛顿在“后书”中的字谜,莱布尼茨当然解不开,不过他自己还是摸索出一般的未定系数法,并用来求积分以及进一步解微分方程.例如,对于

$$y = \int \frac{a\mathrm{d}x}{a + x},$$

他采用微分方程形式

$$a\mathrm{d}y + x\mathrm{d}y - a\mathrm{d}x = 0,$$

用

$$y = bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

或

$$x = ly + my^2 + ny^3 + \cdots$$

代入,即得

$$y = x - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \cdots$$

或

$$x = y + \frac{y^2}{2a} + \frac{y^3}{6a^2} + \cdots$$

莱布尼茨认为,他的方法"更方便、更普遍".的确,它用不着级数反演的复杂步骤.

1694 年,约翰·伯努利宣布他的新方法改进了莱布尼茨的未定系数法.实际上,他引进了"万有级数"(series universalissima),一般用来表示所有求积、求长以及其他微分的积分,即

$$\int n\mathrm{d}z = nz - \frac{z^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} + \frac{z^3}{2\cdot3}\cdot\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}z^2} - \frac{z^4}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{\mathrm{d}^3n}{\mathrm{d}z^3} + \cdots$$

实际上,这个伯努利级数等价于泰勒级数,但不完全一样,约翰·伯努利是重复应用分部积分法而得到这个公式的.

在积分技术上,约翰·伯努利也做出了主要贡献,他首先引入一些变元代换方法来化简积分.例如,利用

$$x = a\,\frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2},$$

可把积分

$$\int \frac{a^2}{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

化为

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{2at},$$

从而变成可积的形式.他还在 1702 年引入部分分式方法

$$\int \frac{a^2}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right) dx,$$

使得许多分式函数可求得积分.

3.1.3 多元微积分

比起一元微积分来,对多元微积分的历史研究是一个受到忽视的领域.直到最近,对从 1690 年到 1750 年半个多世纪的前史才有了比较详尽的研究.从逻辑上讲,偏导数的概念依赖于比较明确的函数观念,而这个观念直到欧拉(1748)才正式用表达式确定下来.因此,此前的微分法需要无穷小量以及由它产生的微分概念,相应的多元微积分概念就是偏微分.但是,由于后来偏导数概念的引进,偏微分的概念在完成了自己的历史使命后,就从文献中消失了,但一元函数的微分及多元函数的全微分仍然保留了下来,这种现象在法文文献中很明显,在法文文献中把偏微分方程称为偏导数方程(equations auxdérivées partielles),而把常微分方程称为微分方程(equations différentielles),这些用法不仅合理,而且符合历史事实.

当时,数学家们采用不同的符号来表示偏导数.最早是欧拉在 1755 年的《微分法导引》中,对一元函数及多元函数不加区别地用

$$\left(\frac{du}{dx}\right),\left(\frac{du}{dy}\right),\cdots,\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right),\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right),\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) \qquad ①$$

来表示偏导数.后来,拉克鲁瓦在他的教科书中去掉括号,这种记号一直为法国数学家(如埃尔米特等)沿用到 19 世纪末.拉格朗日在他的教科中分别用

$$u', u_1, \cdots, u'', u'_1, u_{11}$$

来表示①中的偏导数,显然这种记号很容易混淆,后来没有人沿用.

现在通用的数学符号

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \cdots$$

是雅可比在 1841 年首先使用的,然后被德国人所使用,后来在 19 世纪末为毕卡(Charles Emile Picard, 1856—1941)、若尔当(Camille Jordan, 1838—1922)、达尔布(Gaston Darboux, 1842—1917)等人所引用,遂成为标准的用法.不过,德国数学史家史台克尔(Paul Gustav Stäckel, 1862—1919)指出,雅可比的记号在 1786 年已为勒让德首先使用过.柯西在 1844 年用的记号是偏微分

$$\mathrm{d}_x u = D_x(u)\mathrm{d}x,$$

他还使用过 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y(u)$ 等记号,后来都被放弃了.不过这反映了历史的顺序.

1692 年,莱布尼茨在《博学者学报》上发表了一篇题为《无穷分析的新应用》的论文.两年后,1694 年他又发表了题为《微分法的新应用》的论文.这两篇论文都讨论了同一问题:对任一个曲线族,求出曲线族的包络.在这里,所谓包络是指一条曲线,其上每一点均与曲线族中的一条曲线相切.

包络的概念并非新的,1644 年托里切利在研究外弹道学时,就引入了这个概念.托里切利证明,在同一垂直平面上,以不同仰角射击的炮弹的轨线都是抛物线,这一族弹道抛物线都与一条固定的抛物线相切,这条固定的抛物线被称为"安全抛物线",因为它决定了炮弹的射程,它就是弹道抛物线族的包络.

惠更斯在1678年向巴黎科学院通报了他的光的波动说,他的理论后来以《光论》(*Traite de Lumiere*)为题出版,其中他提出了惠更斯原理:波阵面上的每一点都是发出子波的中心,新的波阵面就是这些子波波阵面的包络.由此,他得出了包络的作图法,并以此来解释光的传播过程.

莱布尼茨工作的创造性在于应用微分法给出包络的一般算法,即对于曲线族

$$V(x,y,\alpha)=0,$$

求出偏微分系数

$$\frac{\partial V(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}=0,$$

然后消去 α,得出 x,y 的关系式,即包络线的方程.

莱布尼茨的方法虽然很简单,但是实际上有着概念上的突破.原来微分法只适用于曲线,现在他把它应用于曲线族.当时曲线的观念反映的是两个坐标之间的关系,而曲线族的概念与此十分不同.莱布尼茨在论文中,一开始就极为小心地定义曲线族,他称之为"按顺序位置给出的无穷多曲线"(infinitae curvae ordinatim positione datae),这个概念推广了通常微积分中按顺序位置给出的无穷多个纵坐标.然后,他大胆地把微分法用于"参数",也称之为"参模"(moduli),这样他就得出了包络方程.1692年冬,约翰·伯努利利用莱布尼茨的方法求出"安全抛物线"的方程,并告诉了洛比达.洛比达将其收入他的《关于曲线研究的无穷小分析》(1696)中.

但是,莱布尼茨的这两篇论文并没有引起人们太多的注意,甚至莱布尼茨本人后来也没有怎么提,原因是多方面的,对参数微分似乎是特殊的做法,而对究竟什么时候这样做合法却不得

而知.另外,正如雅各布·伯努利所指出的,包络问题是一个特殊问题,通过经典的重根论证即可解决,而无须用什么新方法.这样,偏微分的苗头一冒头就又缩了回去.

曲线族问题再一次引起重视是1696年约翰·伯努利提出的最速降线问题,这个问题及其解决标志着变分法的诞生,对此我们将在以后叙述.1697年所有大数学家都给出了自己的解答.牛顿、莱布尼茨、雅各布·伯努利及约翰·伯努利都得出了正确的解答:旋轮线.在这个问题结束时,不仅直接导致对一些变分问题(如等周问题)的研究,而且还导致对曲线族的研究.就在1697年的解答发表后不久,伯努利兄弟就开始研究曲线族的问题.他们两人还意识到需要用新方法来讨论超越曲线族的问题.实际上,在约翰·伯努利解决最速降线问题的论文的结尾,他就提出了超越曲线族的正交轨线问题,这是由等时曲线问题引出的.另外一组问题也导致了偏微分法的创立,这就是雅各布·伯努利提出的“最捷路径问题”(problema de celerrimo appulsu).

正是由于这些曲线族的切线问题以及一般曲线族的问题,使莱布尼茨再次运用他过去的偏微分方法,而且他认识到不管曲线的超越性有多大,他的方法也适用.约翰·伯努利也得出了类似的结果.更重要的是,他们惊奇地发现了一个新定理,即微分与积分可交换定理

$$\mathrm{d}a\int_{x_0}^{x}P(x,a)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}aP(x,a)\mathrm{d}x.$$

而且他们的新算法都用到了这个公式,他们已经意识到有两种(偏)微分 d_aS 与 d_xS,约翰·伯努利还考虑过新的二阶微分 $\mathrm{d}_a\mathrm{d}_xS$.不过,可交换性定理

$$\mathrm{d}_a\mathrm{d}_xS=\mathrm{d}_x\mathrm{d}_aS$$

直到 1719 年才由尼古劳第一·伯努利得到.

1698 年雅各布·伯努利提出了自己解决正交轨线问题的方法,他认为对代数曲线不成问题,而对超越曲线却很困难.他也用微分与积分可交换公式来解对数曲线族的正交轨线问题.他虽然没有得到莱布尼茨及约翰·伯努利的一般方法,但在当时,这个问题看来也算解决了.其后 15 年间,一直没有再引起大家的注意.而莱布尼茨的"由曲线到曲线"的新微分法也就没有公之于世.

从 1699 年到 1714 年是牛顿与莱布尼茨关于微积分优先权展开激烈争论的时期.莱布尼茨对于英国皇家学会的不公正裁决一直耿耿于怀.1714 年末,他在写给约翰·伯努利的一封信中说,他想找出一些问题难倒英国数学家.于是,约翰·伯努利把 17 世纪末的一些问题找了出来,最后莱布尼茨选中了正交轨线问题,并于 1715 年 12 月向英国数学家挑战.虽然他要求给出普遍适用的方法,但举的例子却是双曲线族.约翰·伯努利马上意识到莱布尼茨犯了错误,他告诉了莱布尼茨,并把他的儿子尼克劳第二·伯努利的解法通知了他.

英国数学家的反应也出乎莱布尼茨的预料.1716 年初,牛顿很快发现它可化为一个二阶微分方程问题.凯尔很容易就解决了双曲线族的问题,他的方法和莱布尼茨的基本一样.其他英国数学家,如斯特灵、帕贝尔顿(Henry Pemberton,1694—1771)以及马钦,都得到了解答.

约翰·伯努利的学生赫尔曼在 1717 年发表的论文中,批评了牛顿的方法.他说,这个问题只需化为一阶偏微分方程即可,实际上他的方法就是莱布尼茨于 1694 年提出的算法.

1716 年 3 月,莱布尼茨再次以广义旋轮线的正交轨线问题

向英国数学家挑战,但也没有难倒他们.1717年泰勒及赫尔曼给出了解法,1718年尼古劳第二·伯努利给出了两种解法,1719年尼古劳第一·伯努利给出了另一种解法,而最有意义的则在于尼克劳第一·伯努利发现了混合二阶偏微分的可交换性,他真正系统地论述了偏微分方法.1720年尼古劳第二·伯努利综述了所有方法,给正交轨线问题打上了休止符,同时也结束了偏微分方法的第一时期.

偏微分方法的第二时期主要是18世纪30—40年代.数学史研究显示,法国数学家方丹(Alexis Fontaine de Bertins,1704—1771)是这个时期的主角,他在1732—1734年以及其后发表的一系列论文中,发展了多元微分法.他的方法也来自曲线族的问题,但他讨论的问题是原来并不属于这个范畴的“最速降线”及“等时曲线”问题,他的方法是在流数之外又加上微分d,因而他的方法被称为“流数—微分法”,也就是除了微分之外,明显地出现了“微分系数”,这就是隐含的偏导数.1737年他还得出了两个独立变元的齐性函数定理,即:如果F是两个独立变元x,y的n次齐次表达式,也就是

$$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n F(x,y),$$

且

$$\mathrm{d}F=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y,$$

则微分系数A,B满足方程

$$nF=A_x+B_y.$$

1738年方丹得出三个变元的全微分方程

$$\mathrm{d}x+\alpha(x,y,p)\mathrm{d}y+\pi(x,y,p)\mathrm{d}p=0$$

的可积性条件.次年,克莱洛得出

$$\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$$

是正合积分的条件.

多元微积分的系统化理论的主要建立者是欧拉.早在 1730 年,他已经有了偏微分方法的系统理论,而在 1740 年他对无穷小演算已有系统的计划.不过,这两份材料是以手稿的形式后来在《欧拉全集》中发表的.其间,他还写了一些论文,但都是在 1740 年以后才正式发表.

在欧拉 1730 年的手稿《论微分》(*De differentiell*)中,他虽没有明显使用函数一词,但已有二变元变量及其表达式和它们的微分的概念.因此,他第一次脱离曲线族来定义偏微分,然后得出偏微分顺序交换公式及齐性函数定理.实际上,1740 年他已有三变元全微分方程是常微分方程的推广的观念,而且知道系数也必须有三个变元.不过,他还没有偏微分方程的概念,因为他缺少函数的观念,这个观念在 18 世纪 40 年代由欧拉及达兰贝尔得到,并顺理成章地得出了偏导数的观念.1744 年达兰贝尔已得出偏导数的运算,1747 年他得出偏微分方程及其解法.

多元函数的微分法的一个中心定理是

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}. \qquad ②$$

从欧拉起直到 19 世纪 60 年代,所有证明都有一些毛病,它们依赖于这样一个"引理":若函数 $F(x,a)$对 a 的无穷小值也是无穷小,则对这些无穷小的 a 值,有

$$F(x,a)=F_x(x,a).$$

1867 年芬兰数学家林德洛夫(Lorentz Leonard Lindëlof, 1827—1908)举出一个反例

$$F(x,a)=a\sin\left(\frac{x}{a}\right).$$

由此产生了一个问题：是否$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial a}$及$\frac{\partial^2 F}{\partial a\partial x}$存在，它们就相等呢？1873 年施瓦茨(Hermann Amandus Schwarz，1843—1921)对此给出一个反例

$$f(x,y)=x^2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-y^2\arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$

于是，施瓦茨在$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$存在且连续的假定之下，证明了等式②. 其后，对这个假定稍稍有些放松.

对于多元函数的积分，在牛顿的《自然哲学的数学原理》中已经出现，但它是用几何方法求解的. 对于特殊的区域，有些二元函数积分可用累次积分算出来. 1770 年欧拉对由弧围成的有界区域上的二重定积分给出了用累次积分计算的方法. 1773 年拉格朗日讨论了三重积分，并考虑了通过坐标变换使积分化简的问题. 大约同时，拉普拉斯等人也在考虑球坐标变换的问题. 在 19 世纪，各种不同的用坐标变换来化简三重积分的计算方法先后出现.

3.2　欧拉时代

欧拉无疑是 18 世纪最伟大的数学家，他的影响所及达半个多世纪(1730—1790). 欧拉时代最主要的特征就是把几何的分析转变成代数的分析，在这个转变过程中，函数及其各种无穷表示——无穷级数、无穷乘积、无穷连分式、三角级数等，占据分析的中心地位. 表面上这是一种形式的转变，实际上这是数学潮流的一次大变革. 这可以由欧拉及其同时代人的著作看出来. 现代学生很难读懂笛卡尔、牛顿、莱布尼茨的著作，但是读欧拉的著作却会感到十分亲切. 欧拉还以一种新的普遍性来代替以前的

特殊性,17 世纪到 18 世纪初关于特殊曲线的特殊性质的研究,已被一般的函数及其运算所取代.尽管欧拉没有开创什么新领域,但是这种普遍性已经带来分析在几何、力学、天体力学及物理学上的重要应用,求解微分方程成为其中的中心问题.代数及分析的胜利使人们不再纠缠于分析的严密性,正如达兰贝尔所说,"前进,你就会有信心".而严密性问题最后留给了拉格朗日去考虑.

3.2.1 欧拉

欧拉,1707 年 4 月 19 日生于瑞士巴塞尔.欧拉的父亲保罗·欧拉曾在巴塞尔大学学习神学,曾听过雅各布·伯努利的课.1708 年,保罗·欧拉在巴塞尔附近的黎恩任教区牧师,全家迁往黎恩.1713 年欧拉进入巴塞尔拉丁学校接受初等教育,1720 年进入巴塞尔大学哲学系,1723 年获得硕士学位.他父亲打算让欧拉继承自己的事业,成为一名神职人员,于是 1723 年 10 月欧拉在神学系注册.但是欧拉对神学的课程并不特别热衷,而表现出对科学的兴趣,特别是听约翰·伯努利每天午后两小时的课程:

1720—1721,几何学;

1721—1722,理论及实用算术;

1722—1724,几何学及其应用选讲;

1724—1725,天文学.

雅各布·伯努利在 1705 年去世之后,他的弟弟约翰·伯努利继承了他在巴塞尔大学的数学教授职位.约翰·伯努利的两个儿子尼古劳第二·伯努利和丹尼尔·伯努利也继承了这个科学家族的传统.欧拉是他们的好朋友,而且是约翰·伯努利的得意门生.欧拉

在晚年时,经常回忆起过去自己是如何努力学习的,他每星期六去见自己的导师,提出他所遇到的难题,但是他从不用一些自己还没有深思熟虑过的普通问题去打扰老师.1725年,18岁的欧拉开始进行科学研究,写出第一篇论文《在有阻力介质中等时曲线的构造》,1726年在《博学者学报》上发表.

振兴俄国的彼得大帝(1672—1725)建立了圣彼得堡城,打开了向西方学习的门户.他效法西方,计划建立科学院.1725年他去世之后,他的遗孀叶卡婕林娜一世(Katharina I,1684—1727,1725—1727年在位)完成了他的遗愿.同年请约翰·伯努利的两个儿子尼古劳第二·伯努利和丹尼尔·伯努利去圣彼得堡科学院任教授.尼古劳第二·伯努利不幸于第二年去世,可能是因患阑尾炎.在他们的推荐下,1726年欧拉也得到聘请书.当时欧拉虽然还不满20岁,却已经由于一篇造船的论文而荣获巴黎科学院的大奖.可是,到那个时候,他还从未见到过一艘在海里航行的船.他虽小有名气,可是在家乡巴塞尔大学找工作却未能成功.于是,他于1727年4月启程,沿莱茵河北上到迈因茨,经法兰克福到卢卑克,再经海路于同年5月24日到圣彼得堡,这就开始了他的第一时期在圣彼得堡的生活.

当时,圣彼得堡科学院是一个得到大量资助的研究机构,它给研究人员提供大量资金和收藏丰富的图书馆.院士们享有广泛的研究自由,他们的主要义务就是在圣彼得堡科学院的出版物上发表论著,以保持圣彼得堡科学院在国际科学界的声誉和地位.同时,他们也是帝王和行政当局的科学顾问.

1727年5月,欧拉先到俄国海军中工作,不久之后,他就成为圣彼得堡科学院的一名有薪水的成员——“助研”,1731年成为圣彼得堡科学院院士及物理学教授.当他的朋友丹尼尔·伯努

利于 1733 年回巴塞尔之后,欧拉继任了他的数学教授职位,薪水多了,买了房子,并于 1734 年娶画家格塞尔(Georg Gsell,1673—1740)的女儿卡塔林娜(Katharina,1707—1773)为妻.他们生了 13 个儿女,但欧拉去世时,只有 3 个还健在.长子约翰·阿尔伯利希特(Johann Albrecht Euler,1734—1800)长期以来是欧拉的助手之一,他本人也是圣彼得堡科学院的主要院士之一.

在圣彼得堡,欧拉进行了大量的研究工作,主要是分析、数论及力学.他写了近百篇论文,发表了 55 篇,还写了他的第一部著作《力学》(2 卷),于 1736 年出版.由于过分劳累,他的右眼于 1735 年失明,但他仍然努力研究,而且参与许多行政事务,如制定度量衡,准备到堪察加考察,编制俄国地图以及设计拱桥.1740 年安娜女皇(Anna Ivanovna,1693—1740,1730—1740 年在位)去世后,圣彼得堡科学院被一些投机钻营、不学无术的人把持着,这使欧拉感到很压抑.因此,1741 年普鲁士国王腓特烈大王请他到柏林科学院工作时,他没怎么犹豫就同意了.

1741 年,欧拉从波罗的海经过三个星期的航行,于同年 7 月到达柏林,从此开始了他的第二时期(1741—1766)的科学生涯.他在柏林科学院主持数学学部的工作,但仍兼任圣彼得堡科学院院士,薪水也照拿.这样,他在这个阶段发表的 300 多篇论文中,有一半被送往圣彼得堡发表.在这个阶段,他还写了一系列专著,包括《变分法》(1744)、《轨道计算》(1745)、《弹道学》(1745)、《航海科学》(1749)等,其中影响最大的是《无穷分析引论》(1748)、《微分法导引》(1755)、《刚体运动理论》(1765).在这期间,他给德国的一位小公主授课,在此基础上写了《给一位德国公主的信》,内容涉及物理、哲学、音乐、逻辑、伦理学、神学等等,获得了极大的成功.

在这个阶段,他同许多著名科学家竞争各国科学院的大奖,研究了许多力学、天文学问题,发展了行星及月球理论,奠定了流体力学及刚体动力学的基础,他还改进过机械装置及光学仪器.

1759 年,莫培督去世之后,欧拉负责柏林科学院的工作,直接受腓特烈大王的监督.这时腓特烈早就不喜欢欧拉了,他喜欢像伏尔泰那样才华横溢的哲学家,并有意请达兰贝尔主持柏林科学院.在 1765—1766 年间,欧拉曾因经费问题与腓特烈发生激烈冲突.在俄国新上台的叶卡婕林娜二世(Katharina Ⅱ,1729—1796,1762—1796 年在位)的邀请下,欧拉立即从柏林又回到圣彼得堡.

欧拉在途中受到像王公一样的接待,在华沙期间还受到波兰国王的亲自款待.到了俄国之后,女王送给他一套带有全副摆设的房子,还专门请一个御厨伺候他.他的孩子们也得到了很高的地位,这使欧拉得到极大的满足.不过,他还是有个人的不幸.在柏林,他失去了 8 个孩子;在圣彼得堡,他的另一只眼也失明了.凭着他非凡的记忆力及无限的热情和勇气,在年轻助手的帮助下,他的工作量反而成倍地增长.虽然 1771 年圣彼得堡的大火完全烧毁了他的房屋及手稿,他仍然作出了许多重要成果.在这期间,欧拉又获得两次巴黎科学院大奖.这使他又燃起了希望,他的眼睛动了手术,恢复了视力,可是为时不久,他又陷入了完全失明之中.

欧拉的失明反而使他成为传奇式人物.女王再次赏赐给他的宅子成为从各地来的川流不息的人群朝拜的对象,其中包括普鲁士国王的继承人.他们都惊异地发现,欧拉还像年轻时那样仍在热情地研究数学,那些不懂数学的人也对他百科全书般的

知识赞叹不已.不管是古代文学,还是各个时期、各个民族的历史,或是医药和化学,他都能如数家珍般地侃侃而谈.

晚年,欧拉的妻子去世,两个女儿也死了,他的听力下降,不得不少管圣彼得堡科学院的工作.但是,他的数学工作从来没有停止过,他仍在研究流体静力学、流体动力学,并考察风的起因,特别是季风及印度洋上空气旋的生成.他还研究地球的形状以及声音在介质中的传播.有趣的是,欧拉的最后一项数学工作是对卫星轨道的预测,他正是在考虑这个问题时,于 1783 年 9 月 18 日午后去世的.没想到 200 年后的空间时代仍会用他的公式.在一块石板上,他写满了计算公式,最后,他写完"我死了"后,粉笔从手里掉下来了.随着计算的结束,他的生命也终止了.

欧拉是有史以来最多产的数学家.他生前发表过 560 种著作,加上未发表的,共有近千种,此外还有大量的通信.他的著作数量按时间分列如下:

年份	种数	约占著作总数的百分比
1725—1734	35	4.4%
1735—1744	80	10.1%
1745—1754	150	19.0%
1755—1764	110	13.9%
1765—1774	145	18.4%
1775—1783	270	34.2%

从 1911 年起,瑞士就组织欧拉全集的出版事宜,但至今尚未完成.欧拉的全集共分四个系列:

(1)数学,共 29 卷(30 分卷)已出齐.

(2)力学及天文学,共 31 卷已出齐.

(3)物理学及杂著,共 12 卷已出齐,其中包括哲学、音乐等.

(4)信件及手稿,计划出15卷,尚未出齐.

欧拉的数学著作约占他的全部著作的60%.总的来说,他是一位分析大家,他发展了牛顿和莱布尼茨所创立的微积分,深入研究了积分方法、无穷级数、微分方程及变分法.他把微积分用于几何学而创立了微分几何学,用于力学而创立了分析力学,并把分析方法用于所有物理学、天文学问题上面.虽然他没有开辟新的数学分支,但是没有哪位数学家能够像他那样熟练地运用已有成果并发明许许多多方法及公式而得出大量新结果.他不仅搞研究工作,还写了力学、代数、分析、几何等方面的教科书,这些教科书叙述清楚,例子丰富,在100多年中成为标准的入门读物,这对于数学方法尤其是分析的普及起到了重要的作用.其中特别是《代数全书》(*Vollständige Anleitung zur niederen und höheren Algebra*),第一部分讲述各种计算方法、比和比例,第二部分讲述代数方程的求解和不定分析.它于1770年在圣彼得堡出版,后被译成拉丁文、法文、英文、荷兰文及俄文,多次再版,成为后来代数学教科书的典范.

欧拉对整个数学领域均做出了巨大贡献,除了在数论、代数学及几何学方面的巨大成就之外,他在数学上的最大业绩是分析.他的《全集》中,数学部分共有30分卷,其中17卷是分析.他在分析上的成就可以从三方面来论述:

①他把古典结果系统化、代数化,构成了完整的数学领域.他的体系、框架,除了小的修正及补充之外,一直很少有大的变动.他几乎摆脱掉前辈数学家所仰赖的几何直观以及几何公理系统.他的著作现在看来也不使人感到陌生,而牛顿、莱布尼茨等人的著作,除了历史学家之外,已经很难读懂了.

②他奠定了许多数学分析分支的基础,特别是变分法、微分

方程论、复变函数论及特殊函数论.

③在从牛顿—莱布尼茨的英雄时代到柯西—黎曼—外尔斯特拉斯的严谨的分析时代的过渡时期,他做出了许多特殊的贡献,包括特殊的算法、特殊的技巧、特殊的记号……数量之多,不胜枚举.其中特别应该提到的是:无穷级数的展开及求和方法、B 函数及 Γ 函数的引进以及椭圆积分的加法公式.

3.2.2 欧拉的三部主要著作

欧拉在分析方面的主要著作,集中于下列三部书中:

《无穷分析引论》(*Introductio in analysin infinitorum*)Ⅰ,Ⅱ,1745 年写作,1748 年出版;

《微分法导引》(*Institutiones calculi differentialis*),1748 年写作,1755 年出版;

《积分法导引》(*Institutiones calculi integralis*)Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,1763 年写作,1768—1770 年出版.

其中第一部著作常被译成《无穷小分析引论》,并当成微积分(无穷小演算)的著作.这是完全错误的,实际上其中没有微积分.该书第Ⅰ卷共有 18 章,是所谓"代数分析",讲的是函数及其表示,特别是展成幂级数.到 19 世纪末,它往往被归入初等分析范畴,甚至被归入代数学,而不属于高等分析即无穷小演算(微积分及函数论).该书一开始就对常量、变量加以证明,然后定义"函数",并把函数分类为代数函数及超越函数,前者分为有理函数(整函数和分函数)及无理函数,后者包括指数函数、对数函数、三角函数等.其后,他指出分函数、无理函数及超越函数不能展成有限多次式,所以应表为无穷多项幂级数.特别是他在第 6 ~9 章中论及指数函数、对数函数和三角函数的关系以及它们

的展开式,并导出欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

这是首次通过解析式定义这些函数.在该书中,他还得出

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

等复杂公式,并在《微分法导引》一书中建立起 $\zeta(x)$与伯努利数之间的一般关系.在第 18 章中奠定了连分式理论的基础.他证明了怎样从级数得到它的连分数表示,以及反过来由连分数得出级数来.

《无穷分析引论》第Ⅱ卷共有 22 章,实际上是一部系统的关于曲线的解析几何学的论著,另有 6 个附录,主要讨论曲面.书中对二次曲线、三次曲线、四次曲线和二次曲面作了分类,而且还包含一点微分几何学的内容,如切线、曲率,但并没有涉及微分而只用代数方法.

必须指出的是,欧拉的解析几何学既与笛卡尔的《几何学》相距甚远,也与以后的标准解析几何学的内容大相径庭.笛卡尔用代数方法解几何作图问题以及一些微积分问题,由于用到的完全是代数方法,因此只能处理代数曲线.在欧拉时代,微积分方法已经成熟,但欧拉还是用代数方法去研究代数曲线的解析性质,包括切线、次切线、渐近线、曲率等,也并不显得不漂亮.其中关键在于当时以函数为中心的微分几何并未成熟,而用代数方法处理代数曲线却绰绰有余.因此,他在本书第Ⅱ卷的 22 章中,前 20 章都讨论代数曲线.但是,他的观点早已超过前人,除了按次数对曲线进行分类之外,还讨论了坐标变换、曲线的交

截、奇点以及相似性、仿射性等问题.这些无论是从对象上还是从问题上,都超出后来解析几何的内容,预示着后来代数几何、计数几何以及变换几何的广泛领域,真正显示了代数分析的威力以及几何学的广阔前景.

欧拉的《微分法导引》及《积分法导引》是微积分的入门书,德文译本索性将其译成“教程”(Lehrbuch),其中有许多近代数学的记号,这两部著作长期以来是后来微积分著作的原型.在《微分法导引》中,主要讨论单变元和多变元函数的求导、求极值方法,包括级数变换、级数反演、内插方法以及伯努利数的递归公式等等.该书还论述了泰勒定理及其各种应用、欧拉求和公式等.该书还研究了求快速收敛级数的方法,例如,在1小时之内能准确计算π值小数点后20位的级数就是由莱布尼茨级数导出的:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right).$$

在《积分法导引》中,不仅包括通常意义下狭义的积分法,而且包括当时分析所包含的许多领域,特别是常微分方程、偏微分方程、特殊函数及变分法,其中对不定积分的叙述相当完整,而且还包含对许多特殊定积分的求值,特别是欧拉用带参数积分表示的B函数及Γ函数.他还系统地叙述了解微分方程的方法,并提出了许多用级数解常微分方程的例子.他引进了超几何微分方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=0,$$

并给出其级数解.在该书中,欧拉首次建立了微分方程基本理论,并区别开"线性"、"正合"、"齐次"方程.另外,该书中还有全微分方程、变分法、椭圆积分、对数积分等材料.

3.2.3 微积分技术的进步

(1)欧拉的积分技术.

欧拉在他的著作中求出了大量的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 的原函数不是初等函数.他用过各种各样的技巧,其中包括变换成第一类及第二类欧拉积分 $\mathrm{B}(p,q)$ 及 $\Gamma(x)$ 或者超几何积分

$$\int_0^1 t^\lambda(1-t)^\mu(1-xt)^\upsilon\mathrm{d}t,$$

另一个一般想法是,对于两个函数 P,R,以及整数 $n\geqslant 1$,得出递归公式

$$(n\alpha+a)\int_0^1 PR^n\mathrm{d}x=(n\beta+b)\int_0^1 PR^{n+1}\mathrm{d}x+(n\gamma+c)\int_0^1 PR^{n+2}\mathrm{d}x.$$

(2)欧拉的求和公式.

1730年以后,欧拉开始研究一般的求和公式,对于 $(0,\infty)$ 上的解析函数 y,求和

$$S_n(y)=y(1)+y(2)+\cdots+y(n).$$

令 $y=z'$,应用泰勒公式

$$z(h-1)=z(h)-\frac{1}{1!}z'(h)+\frac{1}{2!}z''(h)-\cdots$$

相继用 $1,2,\cdots,n$ 代入 h,得出

$$\int y(x)\mathrm{d}x=z(n)-z(0)$$

$$= S_n(y) - \frac{1}{2!}S_n(y') + \frac{1}{3!}S_n(y'') - \cdots$$

于是,他得出

$$S_n(y) = \int y(x)\mathrm{d}x + C + C_1 y(n) + C_2 y'(n) + C_3 y''(n) + \cdots$$

几年之后,他求出:对于系数 $C_1, C_2, \cdots$,有

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots)\left(1 - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 - \cdots\right) = 1,$$

即

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots = \frac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_n x^{2n}}{(2n)!}.$$

借助于求和公式,欧拉与马洛各自独立发现了下面的公式

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{\mathrm{B}_1}{2n^2} + \frac{\mathrm{B}_2}{4n^4} - \cdots$$

其中 $\gamma = 0.577\,2\cdots$是著名的欧拉常数.

(3)Γ 函数与 B 函数.

关于 $n!$ 的渐近展开及插值问题,在欧拉之前已有研究,但是欧拉早在 1729 年已引入其插值函数 $\Gamma(x+1)$,它是用无穷乘积来表示的,即

$$\Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-x}(n+1)^x}{n+x},$$

后来得出其积分表示

$$\Gamma(x+1) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^x \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} u^x \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u,$$

这是他在 1730 年 1 月 8 日告诉哥德巴赫的. 但是 Γ 函数直到 1814 年才由勒让德命名并引入 Γ 这个记号,同时他还把上述最后的积分称为第二类欧拉积分.

所谓第一类欧拉积分

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$

早在1649年已见于沃利斯的著作(1863年发表)中,1676年牛顿在信中也研究过它,斯特灵在1730年的著作中也用过.欧拉在《积分法导引》中把它和Γ函数联系起来,得出

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

这个漂亮公式.欧拉在1772年把$B(p,q)$推广到p,q为非整数值情形,他对于$p+q=1$,证明了

$$B(p,q)=B(q,p),$$

其一般情形是勒让德在《积分练习》(1814)中证明的,记号B是比内(Jacques Philippe Marie Binet,1786—1856)在1839年给出的.

关于Γ函数,欧拉得出了极为重要的互补公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

由此推出Γ函数值的第一个特殊结果,即除了n为正整数时

$$\Gamma(n+1)=n!,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

对于其他分数值,欧拉得出了下面的公式

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}},$$

其后勒让德曾作了推广,最后由高斯得出了一般公式

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}n^{-na}\Gamma(na).$$

欧拉还得出了另外一个与欧拉常数有关的公式

$$\log\Gamma(a+1)=-\gamma a+\frac{a^2}{2}\zeta(2)-\frac{a^3}{3}\zeta(3)+\frac{a^4}{4}\zeta(4)-\cdots$$

3.3 拉格朗日时代

拉格朗日时代(1780—1820)可看做是欧拉时代的自然延续,它是从欧拉微积分成型到柯西数学分析形成的一个过渡时期.这个时期的特点是:

(1)分析完全建立在以函数为中心的基础上,不仅完全摆脱掉17世纪几何式或力学式的思想方法,而且还试图摆脱莱布尼茨的微分、牛顿的流数甚至极限的观念.在这个整理的过程中,拉格朗日首先意识到要建立一个稳固的基础,他第一个提出代数化的纲领,但在分析基础上仍差得很远.

(2)欧拉时代已经成熟的分析技术成为这个时期的有力武器.正是在这个时期,力学及物理学得到分析化及数学化,形成了影响后来发展的解析力学及数学物理学.

(3)这个时期在数学上是一个相对沉寂的时期,只是法国,无论在政治上、体制上,还是在学术研究上,都处于大变革的时代.在其他地方,只有高斯一人在一个较为孤立的环境下默默耕耘.

3.3.1 拉格朗日

拉格朗日,1736年1月25日生于意大利的都灵,他的父亲是法国血统,在当地有相当的地位和财富,但后来因为搞投机买卖而把家产用尽,因此,拉格朗日就没有财产可继承了.他后来讲,这是件好事,“如果我继承了财产,我可能就不会搞数学了”.拉格朗日在都灵念书时,主要学习古典语文,而数学是靠他自学而得的.他父亲原本打算让他学法律,不过,他在数学、物理方面表现出了才能,并且由于读过英国天文学家、数学家哈雷(Ed-

mond Halley,1656—1742)的一篇论文而引起了他对数学的兴趣.1754年他已经发现牛顿的二项式定理与函数高阶导数公式之间的类似,他写信给欧拉,但没有得到答复.不久,他就发现前人已得到过这个结果.不过他并没有泄气,继续钻研,到第二年,一切事情开始发生变化.1755年9月他被任命在都灵的一所炮兵学校教授数学和力学,同时他开始研究欧拉的著作,并且得到了一些结果.于是,他再次写信给欧拉说,"我读了您的伟大著作,发现一个解决极大极小问题的比较简单的办法",实际上这就开创了古典的变分法理论.欧拉的回信大大超过了拉格朗日的期望.欧拉说,他似乎已经把极大极小理论搞得十分完整,并对他的深入研究深感钦佩.在欧拉的多次推荐之下,拉格朗日被选为柏林科学院通讯院士及国外院士.柏林科学院院长莫培督认为拉格朗日是他的最小作用原理的捍卫者,因此也积极安排拉格朗日到柏林科学院工作.但由于七年战争以及1759年莫培督去世,这个计划成为泡影.其后的10年,也就是1756—1766年,是拉格朗日勤奋思考的10年.在这10年中,他研究了许多力学问题和物理学问题.1757年,他还同一些志同道合的人士组成了科学会,这就是都灵科学院的前身.这个科学会的主要任务之一是出版《都灵杂志》,其上发表了拉格朗日的许多文章.

1766年欧拉在离开柏林到圣彼得堡时,推荐拉格朗日到柏林科学院继承他的职位.腓特烈大王亲自写信给他说,"欧洲最伟大的国王希望欧洲最伟大的数学家能在他的宫廷里工作".于是,拉格朗日在1766年8月离开都灵去柏林.由于耐不住在不熟悉的环境中独身生活,1767年9月他同一位在都灵的表妹结婚.在妻子的精心照料下,他过了20年平静而富有创造性的生活.在这20年中,他写了近200篇论文,还完成了他的巨著《解

析力学》.这段时间里,拉格朗日前期的主要工作是数论和代数,后一阶段主要是分析和力学.1786年腓特烈大王去世,普鲁士的新国王对科学没有兴趣而且不喜欢外国的科学家,于是拉格朗日决定离开德国.这时,法国国王路易十六(Louis XVI,1754—1793)邀请他到法国去,而且他在法国的朋友也希望他到法国来,于是他在1787年5月离开柏林,从此一直定居在巴黎.这时,他已经对数学研究不太感兴趣了,而且对数学的未来很悲观.早在1781年,他在给达兰贝尔的信中说,似乎数学的"矿脉已经太深了,除非发现新的支脉,否则就该废弃掉了".他本人一度转向研究化学.不久,法国大革命爆发,他的朋友拉瓦锡(Antoine-Laurent Lavoisior,1743—1794)也被送上了断头台,他的保护人路易十六和王后也在1793年被处死,但革命政府对他还是很照顾的.他的妻子在1783年去世后,他的同事天文学家勒·莫尼埃(Pierre Charles Le Monnier,1715—1799)在1792年把女儿嫁给了他.在这位结婚时还不满20岁的妻子的精心照顾下,他在动荡的大革命时代度过了自己的余生.他不无兴趣地观察这次事变,但幸运的是,他没有受到什么冲击,连1793年驱逐所有外国出生的人的法令对他也是例外.1795年巴黎综合工科学校成立后,他成为该校的教授,直到1799年拿破仑雾月政变.

拉格朗日到法国后靠巴黎科学院的年金为生.1790年他被任命为度量衡委员会主席,1793年8月革命当局取消巴黎科学院,度量衡委员会委员拉瓦锡等也被清洗,但拉格朗日仍受到保护.1795年6月正式建立经度局,他仍是委员.同年年底巴黎科学院恢复,他任几何学部主席.1799年拿破仑执政后,更是执行优待学者的政策,拉格朗日成为上院议员及荣誉骑士团骑士.1808年他被晋封为伯爵,1813年被授勋,这时他已患病,不久于

同年4月11日去世.去世后,他的遗体被送到万神殿,并举行了隆重的悼念仪式.拿破仑下令把他的论文收集在一起交付巴黎科学院.

同欧拉一样,拉格朗日是18世纪最伟大的数学家.他对当时所有的数学部门都做出了杰出的贡献,特别是用分析方法解决力学、天文学、物理学的问题.他还在纯数学方面,如数论、代数、分析等,都有划时代的成就.他的研究工作大致可分为三个时期:

第一时期被称为都灵时期(1754—1766),主要是分析及其应用,突出的贡献是变分法.

第二时期被称为柏林时期(1766—1787),前10年最重要的成就是数论、代数方程论及代数方程的数值解,后10年仍继续对分析和力学的研究.

第三时期被称为巴黎时期(1787—1813),他研究了更广泛的领域,如哲学、历史、宗教、语言、医药、植物学和化学.他出版了许多大部头的著作,成为后世学习的楷模.1788年出版了《解析力学》,1797年出版了《解析函数论》,1806年正式出版了他的讲义《函数演算讲义》等.另外,他还在1798年出版了《论任意阶数值方程的解法》,晚年他还对他的所有专著进行了细心的补充及修订.

拉格朗日的贡献涉及到当时纯粹数学与应用数学的所有领域,他不像欧拉和高斯那样建立起一般的系统理论,他的贡献在于发展一般的方法以及证明一般的定理.

在数论方面:

(1)证明了加法数论的第一个定理——四平方和定理,即任何正整数最多可表为四个平方之和.

(2)开辟了二次型的算术理论.

(3)解决了不定分析的基本问题,完全解决了配尔(John Pell,1611—1685)方程的可解性问题,并提供了用连分数求基本解的方法.他进而解决了二元二次不定方程的求解问题.

在代数方面:

(1)用统一的方法讨论二次、三次、四次代数方程,提出了预解式概念.

(2)提出置换理论,开辟了代数方程论的未来道路.

(3)给出了代数方程的一般数值方法.

在分析方面:

(1)系统建立了幂级数方法.

(2)建立了系统的变分方法,首次得出变分观念,并将变分法推广到具有变端点与两个变元的重积分情形以及含有高阶导数的情形.

(3)常微分方程,把欧拉常系数齐次线性方程的结果推广到变系数情形,引进伴随方程概念、降阶方法以及常数变易法,首先认识奇解的意义,并得出了求解方法.

(4)一阶偏微分方程,系统建立了一阶线性偏微分方程理论和解法,对二变元一阶非线性偏微分方程,提出了把它化为解常微分方程组的拉格朗日方法.

(5)分析方法,引入导函数概念,首次得出了泰勒展开的余项公式及中间值定理,并得出了拉格朗日插值公式及拉格朗日乘子法.

(6)数值计算,发展了许多近似计算方法.

在解析力学、天体力学与数学物理学方面:

(1)把力学建立在数学分析的基础上,引进了拉格朗日函数及拉格朗日方程,至今仍是力学及物理学的基础.

(2)建立并完善摄动理论,求解狭义三体问题,改进了轨道计算方法.

拉格朗日的《全集》共14卷,于1867—1892年出版.

3.3.2 拉普拉斯

拉普拉斯,1749年3月23日生于法国诺曼底地区卡尔瓦多斯省博蒙恩-奥热.他的父母可能是贫苦农民.由于他发迹之后对他早年的生活讳莫如深,因此对于他在巴黎以前的生活现在所知甚少.他可能作为旁听生在家乡的军事学校听过课,并显示出了数学才能,后来还在该校教过课.1767年,拉普拉斯带着当地一些大人物的推荐信,只身来到巴黎拜访达兰贝尔,但没有受到达兰贝尔的重视.于是,他写了一封讨论力学原理的信,这才受到达兰贝尔的赏识,并由此被任命为巴黎军事学校的数学教授.

从1768年起,拉普拉斯积极从事科研工作.他的研究方向主要有两个,一是天体力学,即用牛顿定律建立起太阳系行星运动的模型;二是概率论,用概率来解释自然和社会的一切事物.他为这两个方向奋斗终生.在完成艰巨的研究工作的过程中,拉普拉斯大大丰富和发展了数学分析的工具.

这时,他同当时的大科学家达兰贝尔、拉格朗日、蒙日等通信,并在巴黎科学院的《论文集》(*Memoire*)上发表论文.1773年,他进入巴黎科学院,成为力学助理研究员.由于在1772—1779年间发表了一系列数学分析特别是积分法的论文,他获得了当时最伟大的分析专家之一的名声.当然,他还不能同欧拉及拉格朗日相提并论.拉普拉斯把数学看成解决实际问题的工具,他经常把别人的概念及方法拿来修改后为我所用,但他没有达到拉格朗日在数学方面的造诣和水平.

从 1780 年起,拉普拉斯的研究领域进一步扩展到物理学及化学.他同拉瓦锡合作进行了一系列物理学及化学方面的研究,包括蒸发与生热过程以及氢气燃烧,从而完成了确定水的组成等重要实验.由此,他进入科学界的核心,并参与政府的一些委员会,他于 1785 年被选为巴黎科学院力学学部院士.

1784 年,他接替贝祖(Etienne Bezout,1739—1783)成为巴黎军事学校的考官.次年,他考的应试生中就包括后来成为他的主宰的拿破仑.

法国大革命时期的风风雨雨,拉普拉斯似乎都顺利地通过了.他的朋友拉瓦锡被送上了断头台,他却被召去计算弹道、制造硝石以及建立新的度量衡体制,并建立共和国历法.1794 年建立了巴黎综合工科学校的前身及巴黎高等师范学校后,他被任命为教授,并积极参加组建工作.1795 年重建巴黎科学院时,他仍被选为院士.

拿破仑政变后,拉普拉斯更是红得发紫,1799 年他被任命为内政部长,但是他没当多久就让位给拿破仑的弟弟吕西安·波拿巴(Lucien Bonaparte,1775—1840).正如拿破仑后来回忆说,“尽管他是第一流的几何学家,但作为行政官员,他表现得实在平庸.从他所完成的第一个任务,我们就看出我们找错了人”.尽管如此,他还是得到了提拔.1799 年拉普拉斯进入元老院当上议员,1803 年任副议长,1804 年他对拿破仑建立帝国未加反对,反而趁此机会劝拿破仑取消共和国历法.1806 年 7 月 1 日旧历法得到恢复,同年他被封为帝国伯爵.拿破仑倒台时,他签署了废黜皇帝的法令.这样,波旁王朝复辟后,他不但保住了自己的地位,而且进入贵族院,被王朝晋升为侯爵.路易十八还任命他为改组巴黎综合工科学校委员会的主席.

19世纪初,拉普拉斯在自己的阿居埃庄园中同化学家贝托莱(Claude Louis Berthollet,1748—1822)以及许多学生组成了一个非正式的学会——阿居埃学会(Société d'Arcueil),他们发展了拉普拉斯学派的物理学.

1827年3月5日,他因病在阿居埃庄园中去世.

拉普拉斯的工作大致可分为四个时期:

(1)1768—1778年,他开展了关于天体力学及概率论的研究工作,其中特别发展了许多分析方法,例如1773年提出的用于求解二阶线性双曲型偏微分方程的瀑布法.

(2)1778—1789年,这是他成果累累的时期.他的主要理论及数学方法都是在这个时期形成的,他发展了函数生成方法、行列式的拉普拉斯展开、常数变易法、虚变换及拉普拉斯变换等方法,他还研究了位势理论.在这个时期,他出版的著名的著作是:《行星运动及行星椭球形状理论》(*Theorie du mouvement et de la figure elliptique des planétes*)(1784)和《球状体吸引及行星形状理论》(*Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planétes*).这个时期他还在物理学、化学方面有许多工作.

(3)1789—1805年,在这个革命动荡时期,他出版了他的大部头著作,其中最著名的是:《世界体系论》(*Exposition du Système du monde*)共2卷,1796年出版,以后多次再版,其中建立了关于太阳系生成的康德—拉普拉斯星云假说.《天体力学》(*Mécanique céleste*)共5卷,其中前3卷及第4卷前一部分于1799—1805年出版,第4卷卷后一部分及第5卷于1823—1825年出版,第2版于1829—1839年出版,这是一部划时代的力作,其中应用数学分析的方法,系统提出并部分解决了天体力学中的基本问题:

①三体问题乃至多体问题;

②摄动问题及太阳系的稳定性问题;

③行星运动特别是月球运动“异常”问题;

④行星形状问题.

这些问题在19世纪一直是天体力学家及数学家所热衷解决的问题.而且他还像庞加莱一样由此创造了一系列数学理论及方法.

(4)1805—1827年,拉普拉斯的主要兴趣转向物理学和微观机制,并由此影响了一批数学物理学家.他建立了物质的颗粒模型,并以此为基础研究热学、光学、声学及毛细现象,从而开拓了数学物理学的新领域.

1810年以后,拉普拉斯的兴趣转向概率论,他的名著《概率的解析理论》(*Théorie analytique des probabilities*)(1812)是对古典概率论的总结.他关于概率的哲学思考,反映在他1795年给巴黎高等师范学校的讲课中,1814年以《概率的哲学论述》(*Essai philosophique sur les probabilities*)出版,同时作为引言收入《概率的解析理论》第2版中.他还将概率广泛应用于测量、误差理论以及司法审判中.他对与概率论有关的数学也有贡献,特别是用重积分和极坐标变换得出

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

以及用分部积分法得出渐近级数

$$\int_x^{\infty} e^{-x^2} dx \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots\right),$$

这个公式成为后来造表的依据.拉普拉斯还把这个函数进行连分式展开,它见于《天体力学》第1卷中.

拉普拉斯的著作已收集于《拉普拉斯全集》(*Oeuvres de Laplace*)之中,共14卷,于1878—1912年出版.

从历史上看,拉普拉斯是最有影响的大科学家之一.不过,由于他没有系统的数学著作,数学对他来说只是一种工具,他只去创新方法而不去追求严格,因此纯粹数学史家往往忽略他的贡献.但是,他的数学技术也构成了拉格朗日时代的数学分析的有机组成部分,如无穷级数、无穷连分式、拉普拉斯变换、行列式理论等,特别是他在求解微分方程以及位势理论方面,有着更深远的影响.

3.3.3　勒让德

勒让德,1752年9月18日出生在法国巴黎的一个小康人家,少年时进入马萨林学院学习,当时这所学院具有很高的数学物理教学水平.1770年,他18岁时已就他的学位论文进行答辩.后在神父马立(Joseph-Francois Marie,1738—1801)的支持下研究数学.他早期的一些成果发表在马立的《力学论》(1774)中.由于家里有财产,他可以全心全意地投入到研究工作中去.不过在1775—1780年间,他也曾在巴黎军事学校教数学.1782年,他参加了柏林科学院的大奖竞赛,竞赛的题目是外弹道学方面的,即在考虑空气阻力的情况下,求不同发射角的炮弹或枪弹的轨迹.他递交的论文得了奖,并在柏林发表,这引起了拉格朗日的注意.同时,他还向巴黎科学院递交了有关数论、概率论及力学方面的论文,这引起了拉普拉斯等人的注意.1783年他被选进巴黎科学院任力学助理研究员.1784年他向巴黎科学院宣读了《行星形状的研究》的论文,其中首次提出所谓勒让德多项式.在这个阶段,他的论文一篇接着一篇,涉及从数论到天体力学的广泛领域.1786年他提出了变分法中的“勒让德条件”,另外还写了两篇求椭圆弧长的文章,奠定了椭圆积分论的基础.1787年,

巴黎科学院指派他参加测地的工作,他因此得出了球面三角形的勒让德定理.同年,他开始研究偏微分方程,并提出了勒让德变换的概念.

1789年7月14日,巴黎群众攻陷巴士底狱,轰轰烈烈的法国大革命开始了."共和国不需要科学家",许多学者被送上了断头台,巴黎科学院也在1793年8月被撤消.革命还把他的"一小笔"财产吞没了,刚刚娶了一位19岁妻子的勒让德需要养家糊口,他面临极为困难的局面.幸好他的妻子非常能干,帮他安排好家务,使他还能继续工作.

在雅克宾党专政期间,他成为公共教育委员会的高级职员,并受命编写教科书.1794年出版的《几何学原理》作为法国中等教育的教科书,用了近一个世纪.同时,他还进行数学用表的计算,靠熟练的计算技术挣钱补贴家用.

1799年拿破仑上台之后,勒让德继拉普拉斯之后任巴黎综合工科学校的数学考官,直到1815年拿破仑失败.这期间,6 000法郎的年薪使他有了安定的生活.

1795年8月,法国成立了以48人为核心的国家研究院,他不是核心成员,但于同年12月被选为巴黎科学院几何学部院士.拿破仑称帝之后,对学者礼遇优厚,研究工作可以正常进行.1813年他继拉格朗日之后任经度局委员.由于他在政治上并不活跃,所以在1815年王政复辟之后仍能安稳地保持他在巴黎科学院及经度局的职位,直到1833年1月9日在巴黎去世.

勒让德在数学上的主要贡献有六个方面:数论、椭圆函数、初等几何、位势理论、变分法及概率论.但是,由于他与天才的高斯处于同一时代,晚年又受到阿贝尔、雅可比等年轻天才的挑战,因而他的贡献相比之下黯然失色.时至今日,他的全集及选

集尚未编辑出版,除了初等几何教科书之外,其他著作也只有一些历史意义,到19世纪后期基本上已无人问津.

勒让德在数论方面的工作虽不算太多,却代表着由费尔马、欧拉、拉格朗日到高斯的转变时期.他前期的主要著作是《不定分析的研究》(*Recherches d'Analyse Indéterminée*),其中证明了二次不定方程的可解性与不可解性,这是他的一项主要贡献,在1785年呈递给巴黎科学院,并于1788年出版.这本书分为四个部分:

第一部分是模 p 的高次同余式,只是对欧拉的结果的简单推论.

第二部分是把整系数多项式分解为因子多项式,因子多项式的系数属于有理数域或有理数域的二次扩张.

第三部分讨论了拉格朗日关于方程 $ax^2+by^2+cz^2=0$ 的解法,其中勒让德得到了一个新的重要结果:

定理 设 a,b,c 为整数,符号不完全相同,且 a,b 没有平方因子,则方程

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

有不全为0的整数解 (x,y,z) 的充分必要条件是 $-bc,-ca,-ab$ 分别是模 $|a|$,模 $|b|$,模 $|c|$ 的二次剩余.

第四部分是应用上述定理,试图证明二次互反律.另外,他还研究了怎样把整数(以及二元二次型)表示为三个平方之和.

在法国大革命时期,他把这篇论文大大加以扩展,编成一本书,书名为《数论》(*Essai sur la Théorie des Numbres*),于1798年出版.他在这本书中,除了把自己的上述成果写进第三部分之外,还包括了欧拉和拉格朗日的所有发现以及许多具体的数值结果的表.正如他在序言中所说,这本书“仅仅大致表明数论的当前

状况”.

1801 年高斯的《算术研究》大大改变了数论的面貌,勒让德的《数论》第 1 版很快被高斯的著作所超过,于是他进行了许多改进.在 1808 年出版第 2 版时,他尽量使自己的叙述更加严格,1816年和1825年还写了两个补篇.最后,1830 年 5 月《数论》第 3 版分两卷出版,加进了不少高斯的新想法.不过,他的书中的缺点受到年轻的雅可比的批评,勒让德立即写文章进行改正,并由衷承认雅可比高明,希望对原著加以补全.终因他的年纪太大了,这个愿望没能实现.他的研究很快就被德国大数学家高斯、雅可比、狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet,1805—1859)及库默尔(Ernst Eduard Kummer,1810—1893)盖过去了.

勒让德继承了费尔马、欧拉、拉格朗日的题目和方法,做了一些过渡性的工作.例如,他采用欧拉和拉格朗日的连分数算法,对配尔方程加以系统研究,并列出解的表.在二次型方面,他对拉格朗日的工作进行了一些补充.他证明,非 $8k+7$ 型的奇数均可写成三个平方之和.在这个结果的基础上,柯西于 1812 年最后证明了费尔马所断言的关于多边形数的定理.勒让德还证明了当 $n=5$ 时的费尔马大定理(1823).

1785 年,他自以为证明了:每个算术级数 $an+b(n=0,1,2,\cdots,a,b$ 互素)中存在无穷多个素数.这是解析数论中的第一个重要定理,直到 1837 年才由狄利克雷给出了严格的证明.

他在数论上真正重要的发现应该说是关于素数分布的研究.勒让德最早认为,素数分布的形式是

$$1/(A_1x^{m_1}+A_2x^{m_2}+\cdots)(m_1>m_2>\cdots),$$

后来写成 $1/(A\log x+B)$的形式,其中 A,B 是常数.他还研究了 10^6 以下素数的分布,并在 1808 年得出经验公式

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1.08366},$$

这个公式也不如高斯的结果高明.

勒让德在数论方面的另一个成果是完成了兰伯特关于 π 是无理数的证明,并进而证明 π^2 也是无理数,证明中应用了无穷连分数.

勒让德在椭圆函数论方面的研究总结在两大卷《椭圆函数及欧拉积分论》(*Traité des fonctions elliptiques et integrals Eulériennes*)(1825—1826)中.但他始终没有从椭圆积分反演得出椭圆函数.阿贝尔和雅可比在1826—1827年迈出了这最关键的一步(阿贝尔在1823年已有这个思想).勒让德通过雅可比的来信知道了阿贝尔和雅可比的工作,他在1828年2月9日写给雅可比的信中说:"我很满意地看到两位年轻的数学家如此成功地开辟了分析的一个分支,它很久以来是我喜爱的领域,但在我自己的国家里却没有受到应有的重视."他在《椭圆函数及欧拉积分论》第3卷(1832)中介绍了他们的工作.不久他就去世了.其后,德国数学家几乎垄断了椭圆函数的研究.当勒让德的同胞埃尔米特开始研究时,又反过来受到雅可比的鼓励了.

勒让德几乎一生都在断断续续地研究初等几何学,他在他的《几何学原理》的每个新版中都加入附录,主要是为了证明平行公设,实际上是提出了更明显的公理.在第1版(1794)中,他用"存在不全同的相似三角形"证明平行公设.他还用平行公设证明"三角形三个内角之和不能大于两个直角",不过,他的所有证明均有漏洞.1833年他证明了一个重要定理:若一个三角形的内角和是两直角,则所有三角形的内角和也如此.他试图用这个定理来证明平行公设.

勒让德的另一项重要工作是同高斯分别独立发现了最小二乘法，而且是他首先发表的(1805).不过，至今最小二乘法一直同高斯的名字紧紧联系在一起.

至今与勒让德的名字密不可分的是勒让德多项式及勒让德函数.这是最早系统求解的数理方程，对偏微分方程求解、特殊函数、正交展开等有着重要意义.高斯在位势理论上也有巨大贡献，但不是在这个方面，因此没有抹去勒让德成就的最后一点光辉.另一个以勒让德命名的术语是勒让德变换，他虽然没能发现椭圆函数，但在椭圆积分方面仍有巨大贡献.勒让德变换在19世纪的椭圆函数论中也有重要作用.而变分法中的勒让德条件也很重要.这样来看，勒让德还是他那个时代发展数学分析的代表人物之一.

3.3.4 19世纪初的微积分

经过欧拉、拉格朗日、拉普拉斯及勒让德等人的努力，到19世纪初，微积分已经摆脱掉原来的几何的或力学的语言，形成了以函数为中心、以代数运算为基础的数学分析系统.无穷的代数方法原则上已成为可解决积分、微分方程的工具.实际上，早在1694年雅各布·伯努利就认识到，许多积分不可能表为初等函数及其代数运算的组合，因此，近似计算与数值方法也就应运而生了.此外，一系列的变换方法，包括积分变换方法也成功地得到了应用.因此，数学分析推动了几何学、力学、物理学等学科的快速发展.

欧拉和拉格朗日是18世纪欧洲最伟大的两位数学家.拉格朗日作为晚辈，无疑受到欧拉的很大影响，这种影响主要表现在：拉格朗日在搞一个题目之前，总要先看看欧拉做到什么地

方,然后再从欧拉的地方起步,运用自己非凡的独创性得出漂亮而完整的结果.这从数论中四平方和定理的完全证明到变分法的系统研究,都可以看出这个特点.拉格朗日不仅在许多领域取得了远为深刻的成就(如二次型理论、代数方程论、置换理论、分析力学、三体问题等等),而且比欧拉更加重视概念及基础.他晚年时几乎完全集中于建立微积分的严密基础,他的结果集中反映在他晚年的两部著作中,这两部著作都是他在巴黎综合工科学校的讲义,一是1797年出版的《解析函数论》(*Théorie des fonctions analytiques*),二是1801年发表的《函数演算教程》(*Lessons sur le calcul des fonctions*).《解析函数论》正如它的副标题所反映出来的一样,试图建立微积分的严格基础,这个副标题是"包含着微分法的基本原则,既不用无穷小或正在消失的量,也不用极限或流数的任何概念,而归结为有限量的代数分析".他的目的是把微积分归结为代数,但是他的代数不仅包含多项式,而且特别包含作为多项式的推广的幂级数.欧拉认为,可以把函数$f(x+h)$展成h的整数幂或分数幂,而只有当$f(x)$中含根式时才会出现分数幂.拉格朗日把这种情形当做例外而不去管它,因此他得出了泰勒展开的余项公式,并在该书中首先得出了微分中值定理.虽然拉格朗日意识到收敛与发散的区别,但是他没有进行细致的研究,尤其是他没有考虑到一般函数未必可微,更谈不上多次可导.因此,拉格朗日的理论虽然漂亮,而且受到了赞赏,但最终为柯西更严密的理论所取代.

最后,从19世纪末起,以专著或教科书的形式出版的微积分系统论著开始出现,其中最著名的是拉克鲁瓦的《微积分通论》(*Traite de calcul differentiel et de calcul integral*)(第1版共2卷,1797,1798;第2版共3卷,1810,1814,1819).

第6章 初等数论

顾名思义,数学是数的科学,也就是数的理论,但是数学的内容远远超出数论的范围,而通常所说的数论实际上也与数的理论的本义有一定的差距.古希腊已经开始区别计算技术(logistica)和数论(arithmetica),后者常常被译为算术,实际上算术应该是前者的正确译名.数论应该包含两个方面,一方面是带有哲学及基础色彩的理论或学说,也就是研究“什么是数,什么应该是数”、“量能否归结为数”之类的问题,例如,正整数及正分数是否还应该扩大、是否还能扩大,负数是否合理,无理数、虚数、复数以及代数数、超越数等是否应该同整数、分数一样来对待.另一方面是研究不定方程的求解问题.现代意义下的数论主要是研究数的性质和表示,尤其是特殊的数,如素数、完全数、亲和数等,以及求解不定方程.在历史上,欧几里得的《几何原本》研究广义的数论,而丢番图的《算术》只研究后面一部分,而且其中还包括对代数方程的研究,直到费尔马才把数论的内容确定为近代的形式.因此,费尔马被尊称为近代数论之父.

1 费尔马

费尔马在1601年8月20日受洗礼.他的家庭是法国南部

图鲁兹附近的波芒的中产阶级,母系家族是所谓“穿袍贵族”,其中许多人曾任法官.费尔马也学过法律,1631年以前他曾在波尔多做法官.1631年5月,费尔马成为图鲁兹地方高等立法议会议员,并移居图鲁兹.同年6月,他同表妹结婚,他们生有二子三女.长子萨缪尔也是法官及图鲁兹议会议员.1665年1月12日,费尔马在卡斯特去世.

费尔马的数学研究完全是业余进行的,他对数学的兴趣大约开始于17世纪20年代后期.这时,他在波尔多的法官朋友借给他韦达的著作,他很仔细地研究过,并写出了他最早的解析几何著作.他在图鲁兹的同事卡尔卡维(Pierre de Carcavi,约1600—1684)于1636年移居巴黎后,接触到马桑周围的科学集体,从此费尔马同马桑等人开始书信来往,这对他研究数论无疑是直接的刺激.

费尔马接受过扎实的古典教育训练,他能用拉丁文、希腊文、意大利文及西班牙文写诗,受到当时的文人墨客的称赞.他热衷于收集古代文献手稿及古希腊典籍,当时也想到意大利去旅游.在17世纪30—40年代,他的朋友去过意大利,但他始终没能成行.他也很想到巴黎和其他地方会见他的朋友,但一直未能如愿.这样看来,他的假期大都是在乡下度过的.

1637年左右,费尔马得到了丢番图的《算术》以及巴歇的著作.他在那本《算术》上写下了许许多多旁注,其中特别有名的是所谓费尔马大定理.这个问题以及其他旁注大大推动了后来数论的发展.他得到许多零散的结果,特别是费尔马小定理以及无穷递降法,使他获得近代数论之父的美名.

费尔马不仅是近代数论之父,而且在开创解析几何学和微积分方面也有重要贡献.费尔马和笛卡尔从不同的角度创造了

解析几何学.费尔马在1643年企图扩展解析几何学方法去研究空间中的旋转体,在1650年还建立了有三个未知数的方程,并用来研究空间中曲面的轨迹.

费尔马独立发展了求切线、求极大极小以及求积的方法,不过,他没有意识到它们之间的关系,也没有建立起基本概念.由于方法的不同,他同笛卡尔在1638年进行了争论,甚至发展成人身攻击.

由于费尔马的结果流传不广,他对17世纪数学发展的影响不算太大.1654年,他同年轻的帕斯卡开始通信,想吸引帕斯卡一起搞数论,但是帕斯卡对宗教及物理学的兴趣更大.他们曾一起讨论过赌博问题,这促进了一门新学科——概率论的产生.至于数论,费尔马是在孤立的情况下单枪匹马去搞的.由于他并不打算发表这些结果,所以直到他去世后,他的儿子才把他的结果整理后公之于世,这已经是1679年的事了.

2 初等数论

17—18世纪的初等数论,主要来自于费尔马的研究,他的只言片语引导欧拉进行证明,从而大大发展了初等数论,其中一些结果由拉格朗日完成.最后,勒让德补充了一些结果,并把以前的零散结果加以总结.

2.1 费尔马的数论

费尔马在数论方面的贡献决定了19世纪之前数论的方向.正是由于他的研究,整数论才成为一门独立的学科.虽然丢番图的《算术》是他的研究的出发点,他也受了不少影响,但是他的研

究至少有两方面的特色.他用算术观点来处理算术问题,而不像以前受几何学观点的束缚.同样,他只研究整数解,而不像丢番图那样也考虑有理数解.这两种数虽然在有些情形下没什么差别,但在近代数论的许多问题中却有原则性差别,他对整数的研究导致后来数论发展的几个方向.

(1)素数的判定及性质.

关于素数的形式,当时最突出的是马桑素数.费尔马在1640年6月给马桑的信中讲:如果 n 不是素数,则 2^n-1 也不是素数,因此,2^n-1 型的素数只可能具有 2^p-1 的形式,其中 p 是素数.可是反过来,2^p-1 型的数一般不是素数,而是复合数.费尔马说,它的素因子只具有 $2mp+1$ 的形式.另外,他还知道,除非 m 是2的方幂,否则 2^m+1 不可能是素数.从1640年起,他多次声称,反过来,$2^{2^n}+1$ 是素数(后来被称为费尔马数).当 $n=0,1,2,3,4$ 时,的确 $2^{2^n}+1$ 是素数 3,5,17,257,65 537;可是当 $n=5$ 时,欧拉在1732年证明 $2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297$ 有素因子641,因此不是素数.以后发现,后来一些这类的数都不是素数,因此有人认为以后没有费尔马素数了!尽管如此,费尔马素数仍对几何作图有着重要的意义.

关于素数,一个最重要的定理是费尔马小定理,这是费尔马在1640年给弗瑞尼科(Bernard Frenicle de Bessy,约1605—1675)的信中讲的,即:如果 p 是素数,且 a 与 p 互素,则 $a^{p-1}-1$ 可以被 p 整除.

(2)关于素数的表示.

除了2以外,素数都可以表为 $4n+1$ 或 $4n+3$ 的形式.费尔马在1640年底给马桑的信中讲:形如 $4n+1$ 的素数可以惟一表

示为两个平方数之和,如 17 = 16 + 1,29 = 25 + 4 等. 他说,他能用无穷递降法加以证明,并且在 1659 年把这个证明的要点告诉了卡尔卡维. 同时他断言,形如 $4n+3$ 的素数不能表示为两个平方数之和. 不仅如此,他还进行了推广:$4n+1$ 型素数的平方也只能以一种方式表示为两个平方数之和,但这种素数的三次方或四次方就能以两种方式表示为两个平方数之和,如 $5^3 = 125 = 4 + 121 = 25 + 100$,其五次方和六次方就能以三种方式表示为两个平方数之和,如此类推.

费尔马还得出了许多其他类型的定理,他断言:$8n+1$ 及 $8n+3$ 型的素数可以表示为 x^2+2y^2;$6n+1$ 型的素数可以表示为 x^2+3y^2;奇素数均能以一种方式表示为两个平方数之差.

(3)一般数的表示.

费尔马从素数的表示进而研究四平方和问题. 四平方和问题是数论中第一个一般性的重要问题. 巴歇在他出版的丢番图的《算术》中加上评注,他说,丢番图多次猜想到:每个正整数都能表示为四个整数的平方之和. 这就是著名的四平方和问题. 他补充道,他从 1 到 325 验证过这个猜想,但是不能给出一个一般的证明. 笛卡尔也研究过这个问题,但是他后来承认,这个问题太难了,他想不出什么办法来解决它. 费尔马在巴歇的译本中说,他已经证明了一个一般的定理,由此可推出四平方和猜想. 他多次许诺发表证明细节,不过同往常一样没能实现.

实际上,1638 年左右费尔马在他的书上提出了更为一般的重要定理:每个正整数或者本身是一个三角形数,或者是两个或三个三角形数之和;每个正整数或者本身是一个正方形数,或者是两个、三个或四个正方形数之和;每个正整数或者本身是一个五边形数,或者是两个、三个、四个或五个五边形数之和,如此等

等.费尔马声称,他用无穷递降法证明了它们,实际上很可能言过其实.后来,费尔马在1654年写给帕斯卡的一封信中谈到,为了证明这个一般性的定理,必须证明下面几个命题:

①每个形如 $4n+1$ 的素数等于两个整数的平方之和.

②给定形如 $4n+1$ 的素数,能找到一个普遍的方法求出两个整数,使其平方和等于该素数.

③每个形如 $3n+1$ 的素数均具有 x^2+3y^2 的形式.

④每个形如 $8n+1$ 或 $8n+3$ 的素数均具有 x^2+2y^2 的形式.

⑤不存在边长为有理数的直角三角形,使得其面积为完全平方数.

在这些命题中,①曾在费尔马1640年底给马桑的信中提到过,后来他也说过他用无穷递降法证明了这个命题.实际上没有发现他的证明.②、③和④也有类似情况.他真正作出证明的只有⑤,是用无穷递降法证明的.

(4)配尔方程.

配尔方程是最古老的方程之一,极为重要.这个问题在希腊人和印度人中间有着漫长的历史,在以后的丢番图逼近理论及代数数论中也起着极为重要的作用.费尔马在1657年2月给弗瑞尼科的信中提出一个定理:如果 A 非完全平方,则 $x^2-Ay^2=1$ 有无穷多个解.后来,欧拉把这个方程错误地命名为配尔方程.这个定理之所以有名,是因为费尔马在这封信中向所有数学家提出挑战,要求他们求出全部整数解.布隆克尔勋爵给出了解,但没有证明解有无穷多个.英国数学家沃利斯在1657—1658年的信中及其《代数》中给出了解法.费尔马自己则说,他用无穷递降法解出了这个方程,而且还能断定 $x^2-Ay^2=B$ 在什么情

形下有解.

(5)费尔马大定理.

费尔马虽然不可能证明整个的费尔马大定理,但是,他以后经常提到,$n=3$,$n=4$ 两种情形可用无穷递降法证明.他很可能证明了 $n=4$ 的情形.

2.2 欧拉的数论

欧拉对数论的兴趣显然是由哥德巴赫引起的.1729 年 10 月,他们开始通信,到 1730 年 6 月,欧拉才开始认真研究起数论来.他开始读费尔马的著作,注意到四平方和猜想,并且花费了许多时间进行研究,但没能成功,但是他在其他方面取得了很大进展.

(1)证明及推广费尔马的许多定理.

首先,欧拉给出了关于费尔马小定理的三个证明(1741,1761,1763).在第三个证明中,他引进著名的欧拉 φ 函数,对费尔马小定理进行了推广.$\varphi(n)$表示小于 n 且与 n 互素的正整数的数目.因此,当 n 为素数 p 时,$\varphi(p)=p-1$.对于费尔马小定理(如果 a 与 p 互素,则 $a^{p-1}-1$ 可被 p 整除),欧拉进一步证明:如果 a 与 n 互素,则 $a^{\varphi(n)}-1$ 可被 n 整除.

费尔马证明:每个 $4m+1$ 型的素数能以惟一的方式表示为两个平方数之和.欧拉反过来证明其逆定理也成立.由此,他发现了一个新的有效方法,可用来判定一个大数 N 是素数还是合数(1751 年起).欧拉关于 mx^2+ny^2 形式的数的研究,是后来拉格朗日和高斯工作的基础.

1753 年,欧拉证明了费尔马大定理的一个特殊情形,即 $n=3$ 的情形,他的证明也采用了无穷递降法,还用到形如

$a+b\sqrt{-3}$的复数.

(2)发现二次互反律.

欧拉在1754—1755年间首先引入二次剩余的概念:如果存在x,使x^2-p能被q整除,就说p是q的二次剩余.他于1772年开始研究,并于1783年明确表述了二次互反律,这构成后来数论的关键课题.

(3)配尔方程.

1732年欧拉把

$$x^2-Dy^2=1$$

(其中D是一个整数,一般没有平方因子)这种类型的方程错误地叫做配尔方程,这大概是因为他错误地认为英国数学家配尔是一个老解法的发明者,其实配尔与这个方程毫无关系.

这个方程有着悠久的历史.公元前4—5世纪时,印度人在求$\sqrt{2}$的近似值前,曾得出不定方程

$$x^2-2y^2=1$$

的解(17,12)和(577,408).同时,毕达哥拉斯(Pythagoras,约前580—约前500)学派也得出

$$x^2-2y^2=\pm 1$$

的一个递推公式.同样,阿基米德也得出

$$x^2-3y^2=1$$

的解(1 351,780).欧拉的著名的分牛问题也是求解配尔方程,其中$D=410\ 286\ 423\ 278\ 424$.不过,从数学史的研究中可以看出,印度人在7世纪时已经得出了相当完整的结果.丢番图也研究过这类方程的许多特殊情形.费尔马也知道配尔方程的解法,沃利斯也完全知道怎样造出无穷多个解来.

关于配尔方程,已经有了非常完整的结果:如果D是一个

正整数并且不是完全平方数,则配尔方程

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

存在无穷多组整数解(x, y),且任何一组解都可以由某一特殊的解(称之为基本解)(x_0, y_0)生成出来.具体来讲,任何解(x, y)与基本解(x_0, y_0)的关系为

$$x + y\sqrt{D} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{D})^n,$$

其中 n 是任意整数.

这样一来,问题就变成求基本解(x_0, y_0)的问题.1759 年欧拉通过把$\sqrt{D}$展开成连分式而给出解配尔方程的方法.他的想法是,如果 x, y 满足方程,则 x/y 是$\sqrt{D}$的很好的近似值.但是,他不能证明他的方法总能求出解,并且所有解都能由$\sqrt{D}$的连分数展开给出来.直到 1766 年,拉格朗日才完全解决了这个问题.

举例来讲,$\sqrt{2}$的连分数展开为

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}},$$

由它的近似值$\frac{x}{y} = 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \cdots, (x, y)$都是

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1$$

的解,这正好与毕达哥拉斯学派所得到的结果不谋而合.

对于更一般的方程

$$x^2 - Dy^2 = k,$$

费尔马说他自己知道这个方程在什么情况下有解,并且说如果有解的话,他也能够解出来.但他照例没有给出具体证明.最后的结果是拉格朗日在 1766—1770 年间给出的.

(4)把解析方法用于数论研究.

欧拉引入 ζ 函数、分拆函数 $p(n)$，另外，他还引进了超越数的概念.

拉格朗日完成了欧拉的许多研究，特别是证明四平方和定理及开创二次型研究，这些结果总结在勒让德的《数论》(1798)一书中(详细内容参见本书第5章3.3.1及3.3.3两节).

第7章　19世纪的数学

19世纪的数学与前后两个世纪的数学有着很大的不同,它开始真正成为一门独立存在的自在的科学,有自己的对象及理论体系,不像过去那样只是依附于自然科学的工具和技术总汇.正因如此,19世纪数学打破过去对它的对象及方法所造成的种种限制,呈现出千姿百态的多样性,同时也因此在保守与革新和解放之间引起数学家的争论,最终涉及到基础问题的大讨论.在数学与社会的关系方面,它不再是偶然产生的个别数学家的工作总和,数学和数学家都更为社会化.具体来说,数学家日益职业化,培养过程日趋定型化,数学家共同体逐步形成,数学发展受到社会环境的影响也日益明显,数学家的生活和工作都受到大社会以及数学家、科学家小社会的制约,王公贵族的保护没有了,只有当社会有适宜的土壤时,好的数学家才能茁壮成长.19世纪初,各国数学发展很不平衡,发展道路差异很大.但到19世纪末,国际交流已相当频繁,数学发展日益趋同.

1　数学概况

19世纪数学与18世纪末以前的全部数学,在数量和质量上都不可同日而语.如果说,M·康托尔用4大卷写18世纪末以

前的全部数学,19世纪就应该用20大卷,而这只不过是刚刚涉及皮毛而已,真正的文献数量则是以前的10倍有余.从内容上讲,在丢东涅的《数学简史》中,18世纪的内容不到19世纪的5%,从实际成就来看,1:20的比例大体上差不多.

19世纪数学本身发生了可以说是革命性的变化,主要有下面四个特征:

(1)新题材、新领域、新分支大量涌现.

19世纪之前,数学大致是算术与数论、几何以及17—18世纪发展起来的代数、分析四大领域.到19世纪,数论已经由问题汇编发展成初具规模的对象理论.从方法上来分,形成初等数论及解析数论;从对象上来分,引进代数数论、超越数论、二次型及高次型算术理论;从演算对象来看,不定方程扩大成庞大领域,出现丢番图逼近理论、几何数论、连分数算术理论等新兴学科.

几何学从综合几何中复兴,出现射影几何、反演几何、非欧几何以及各种特殊对象的几何——线几何、圆几何、球几何等.由于解析方法的引进,解析几何在19世纪已经完备和定型化,从中发展出代数几何学与微分几何学这两大领域,成为20世纪几何学的基础.但是,曲线及曲面几何仍是主要对象.拓扑学和运动几何学也有所发展,几何学的研究文献数量在19世纪中仍超过数论、代数和分析的总和.

代数学仍然以方程求解和方程论为中心,出现了伽罗华理论以及置换群、抽象群和群表示理论.求解问题并不因伽罗华理论而告终,它沿着几个方向继续发展,特别是用超越函数解代数方程以及用数值方法求解.方程的群的研究到19世纪末仍是重要课题.除了方程以外,线性代数与双线性代数、行列式与矩阵、四元数与超复系等都为代数带来多样化.不变式论被第二次称

为近世代数学,而真正的近世代数——抽象代数,也开始出现在各种新的对象及理论当中.

19世纪常被称为分析或函数论的世纪,但这是19世纪末的数学家的观点.当然实分析的多样化发展,特别是微分方程的求解引出大量的特殊函数,而从实到复的过渡引出复分析的有力工具,特别是椭圆函数及阿贝尔函数是19世纪分析的中心,但到外尔斯特拉斯,解析函数论只是大量特殊函数的一个简要概括.一般的解析函数论直到20世纪上半叶才有较大的发展,而它们却植根于特殊函数的多样性之中.例如,整函数基本定理——毕卡大定理,在1879年是用椭圆模函数证明的.

20世纪数学的主流——结构数学大都源于这种多样性,20世纪的数理逻辑及数学基础也来源于19世纪的先驱,从布尔到G·康托尔(Georg Cantor,1845—1918).可以说,正是由于19世纪数学题材的多样性,造就了现代数学的丰富内容.

(2)数学对象及方法的扩大.

数学与自然科学不同,并不以客观实在为对象.以前,数学对象受制于哲学观念及古老的规定,到19世纪,数学家在思想上逐渐打破了这种陈旧的框框.无疑,每一次打破都引起一场风波、一场辩论.但主流是数学对象的扩大化最终取得胜利.几何学最明显,19世纪突破三维欧几里得几何的限制,出现了各种各样的"非欧几何学",一是不遵守平行公设的通常非欧几何,二是不遵守三维限制的高维几何学,三是不遵守阿基米德公理的非阿基米德几何,四是复数的几何学,如此等等.在观念上也有重大突破,空间不一定由点构成,从而出现直线几何学、圆几何学等.几何图形也不一定非装在大空间里,出现流形的概念以及内蕴几何学或自然几何学;在几何学中还可以引入无穷远点、无

穷远线等理想元素,形成新的几何对象,最后研究一层一层的结构,其中最基础的是点集及抽象集合.

19 世纪人们一开始还是习惯于具体的、特殊的对象,避开抽象的、一般的对象.但随着认识的深入,才逐步考虑那些奇异的甚至病态的对象,如处处连续但不可微的函数、填满正方形的曲线等.但到头来,数学的深化不能不把它们接纳进来.到 20 世纪,更成为研究测度、布朗运动、分形、混沌等的基础.

(3)层次化的出现与严密性的考虑.

18 世纪以前的数学家大都是解问题的能手,而解问题大都是用特殊技术、特殊方法去解决特殊对象的一些特殊问题.到 19 世纪,数学家开始逐步考虑更高层次的理论问题,如求解方程,要考虑根与系数的关系问题,最后到微分方程的解的存在性与惟一性问题.研究题材的转变不仅是对过去盲目求解失败的经验总结,也是为寻找新的求解方法从理论上扫清道路.思想方法的改变也带来对方法的严密性的追求.

19 世纪分析方法代替几何方法在数学中占据统治地位之后,分析的有效性不成问题,但其严密性却受到挑战.因此,整个 19 世纪不断对这个问题进行探索,最终由外尔斯特拉斯等人解决,但是留下的无穷集合论问题却产生了无穷的麻烦.

(4)统一性的追求.

19 世纪数学分支的爆炸性增长,使得数学专业化日益严重,形成相互隔离的局面.19 世纪初,数学家已经被分为分析学家和几何学家,前者也包括数论及代数学家.到 1870 年以后,由于群的概念的成熟,一些大数学家,特别是若尔当、克莱因、S·李(Marius Sophus Lie, 1842—1899)、庞加莱(Jules Henri Poincare, 1854—1912)等人,尝试以群的观念来统一数学,取得了相当的

成功.群的概念不仅联系着代数方程,而且也用于微分方程、函数论,特别是几何,从而涵盖了大部分当时的数学.另一方面,19世纪数学中四大领域外的四大分支:代数数论、代数函数论、代数几何学与代数不变式论,直接导向当时的理想理论,也就是后来的交换环论以及部分域论.这些部分统一性的抽象化最终导致20世纪结构数学的萌芽.

20世纪初,数学出现了大转型,由此形成的结构数学及元数学都可以在19世纪追溯到其来源.抽象代数中的群论、环论、域论是对19世纪数学中许多具体对象、具体结果的抽象化,拓扑学中的维数问题、曲线理论等都在分析中早已碰到.曲面及更高维流形的拓扑已经在高斯、黎曼的著作中初见端倪.意大利数学家的著作中出现的函数集合及函数空间,实际上是泛函分析的最早实例.以集合论和逻辑作为数学的基础的尝试,最终导致数理逻辑的产生.现代数学正是在19世纪数学的多样性的基础上追求统一的结果.

2 数学与社会

19世纪,数学已不再是少数人的工作,而成为众多数学家的研究成果.数学家作为社会集体开始涌现.随着基础教育的普及和大学数学教学的改进,培养数学家的道路基本定型化.到19世纪末,绝大多数数学家是在大学毕业并取得博士学位后成为数学家的.当时已有足够的职位提供给优秀的数学家.数学家也是以其论文来显示其能力的.19世纪共有950种以上的期刊全部或部分刊载数学论文.在数学发达的国家,这对数学的发展是一个极为重要的阵地.各地的科学院仍具有学术权威,它们的

刊物也是发表论文的场所.尤其是巴黎科学院、柏林科学院等每隔两三年就设置某个问题的大奖,这对数学起着重要的促进作用.各国的科学促进会和数学会也对数学交流起着有益的作用.由于这些条件的改善,19世纪数学家的人数大量增加,名垂青史的可达500人以上,其中重要数学家近百人.不过,由于各国条件的不同,差异还是相当大的.现把各国数学的发展情况简单介绍如下.

2.1　法国

19世纪的法国是名副其实的数学大国,但是法国数学却有着其不同于一般的特点:

(1)法国的近代数学有着几百年的历史传统,19世纪法国无可争辩地是欧洲数学的中心.法语也逐步取代拉丁语而成为国际科学语言.但巴黎对其他国家的数学却缺少了解.

(2)法国的教育体制,特别是培养数学家的途径,形成法国数学重视数学分析及其在几何、力学、物理、天文和工程上的应用的特色.这个分析传统一直贯穿到20世纪初.

(3)法国数学过分集中,特别是巴黎.巴黎为数学家提供的职位很少,又集中于少数大学及大学校.著名的数学家可以在各学校身兼数职,因此数学家人数不多.法国在19世纪只出现了三四十位尖子数学家,不像德国那样有着上千人的庞大队伍.

(4)整个19世纪,法国社会动荡,科学及数学的发展受政治及社会的冲击很大.

从18世纪末起,法国政治动荡,社会及经济也发生巨大变化,这对科学及数学的发展不能不产生巨大影响,几乎所有数学家都感受到强烈的冲击.

1789年7月14日巴黎群众攻陷巴士底狱,揭开法国大革命的序幕.1792年8月君主政体被推翻,法兰西第一共和国(1792—1804)建立.1793年初法国国王路易十六被送上断头台,出现雅克宾党专政,巴黎科学院被解散.1794年热月政变后,建立了督政府,开始整顿教育及科学事业,其中最突出的是设立巴黎高等师范学校(l'Ecole normale supérieure,主要培养中学师资)以及中央公共工程学校(l'Ecole Centrale des Travaux publics),后者次年改名为巴黎综合工科学校(École polytechnique,直译为多科技术学校).1795年重建法兰西研究院(Institut de France),其中包括巴黎科学院.1799年11月,拿破仑发动政变,自任第一执政,实际上进入了拿破仑独裁统治时期.由于拿破仑的重视,科学技术有很大的发展,科学家也得到很高的荣誉,拉格朗日、拉普拉斯等均被封为贵族.1804年5月,拿破仑称帝,是为第一帝国.1814年4月,拿破仑被第六次反法联军击败,第一次退位,被流放到厄尔巴岛,波旁王朝第一次复辟.1815年3月,拿破仑带领一部分军队回到巴黎,建立百日皇朝,同年6月18日在比利时滑铁卢被第七次反法联军击溃,6月22日再次退位,拿破仑被流放到圣海仑娜岛,第一帝国告终.路易十八(Louis XVIII,1755—1824)复辟,成为法国国王,他在1824年死后,其弟查理十世(Charles X,1757—1836)即位,是为复辟时期(1815—1830).(因此拥护波旁王朝及国王的人应被称为保王党,如柯西,如果把他们说成是拥护共和及拿破仑的保皇派,则大错特错了.)1830年革命后,波旁王朝支派奥尔良公爵后裔路易·菲利浦(Louis Philippe,1773—1850)即王位,是为七月王朝.1848年2月巴黎发生革命,推翻七月王朝,成立共和国,是为第二共和国(1848—1852).1851年12月拿破仑三世(Louis Napoleon,1808—

1873)政变,次年称帝,是为第二帝国(1852—1870),其间发展经济、对外扩张,科学技术有一定进步.1870 年 7 月,普法战争开始,拿破仑三世在色当战败被俘,帝国崩溃.1870 年 9 月巴黎起义,宣布共和,是为第三共和国(1870—1940).其间经济及科学技术虽有一定发展,但已落后于德国、英国以及后来的美国.

19 世纪法国数学率先建立起独特的培养人才的制度,大多数尖子数学家是巴黎综合工科学校的毕业生.到 1870 年以后,巴黎高等师范学校成为法国数学家的摇篮.

在法国大革命前,已经建立了若干与军队和工程有关的大学校,其中有:

1720 年,建立炮兵学校(École d'Artillerie);

1748 年,建立桥梁道路学校(École des Pontes et Chaussées);

1749 年,建立兵工学校(École de Génie);

1783 年,建立矿山学校(École de Mines).

而 1794 年建立的巴黎综合工科学校,其最初目的是为进入上述这些大学校进行基础训练的学校,实际上后来是通往上述大学校的惟一途径.考入巴黎综合工科学校极难,学生不仅在中学毕业后要读一两年的“预科数学”(Mathematiques speciales),它完全是集中的数学教育,而且还要通过极难的入学考试,每年从大批的应试者中录取 150 名学生.巴黎综合工科学校的课程主要是数学力学课程,其中数学分析及其应用、画法几何学、算术、力学各占四分之一,共 1 000 多学时,可见其强度之大.学生毕业后进入军事或工程的大学校,主要从事实践活动,然后成为军官或工程师.他们的职业在法国有着很高的社会地位,许多人在这些岗位上利用业余时间搞些数学.其中也有少数尖子回到母校或到大学中去教书,成为职业数学家,柯西、刘维尔(Joseph Liouville,

1809—1882)、若尔当和庞加莱等都有这样的履历,甚至在他们的晚年,工程师的头衔都还保留着.由于他们的教育背景,数学分析及数学物理是他们的强项,这形成了19世纪法国数学的一个传统.从柯西到庞加莱,理论和应用是紧密联系在一起的.由于教学的需要,他们才研究基础;由于解决实际问题的需要,他们才发展强有力的方法.总之,他们一般不搞无源之水、无本之木式的纯粹数学.

巴黎高等师范学校的毕业生的出路主要是教中学,其中有些也搞一些数学研究.较早由巴黎高等师范学校毕业的数学家有布瑞奥(Charles Auguste Briot,1817—1882)与布盖(Jean-Claude Bouquet,1819—1885),自从达尔布1860年选择进巴黎高等师范学校而不进巴黎综合工科学校之后,巴黎高等师范学校产生的数学家日益增多.到20世纪,绝大多数法国数学家是巴黎高等师范学校的毕业生,特别是布尔巴基学派的成员则更是如此.

由于这两所大学校并不授予学位,数学家往往提出论文到大学去申请博士学位.在巴黎,主要是巴黎大学理学院(la faculté des sciences),它常以所在地区索尔邦(Sorbonne)而知名.外省的学生则常常通过上大学学习数学.在巴黎,法兰西学院(Collège de France)的教授是显赫的职位,他们的讲课学生可以自由听讲.法国的其他地区也有大学,如蒙彼里埃、里尔、图鲁兹、格勒诺伯尔、里昂、波尔多、莱恩、贝臧松等地,但在19世纪,这些地方并没有产生多少有影响的数学家.

19世纪初,最有影响的数学家集体集中在法国,而长期以来,法国的数学中心一直在巴黎.100多年来经过五六代数学家的努力,法国数学在国际上始终保持着领先地位.

第一代数学家是以拉格朗日、拉普拉斯、勒让德为首的分析

学派,他们都是利用分析工具解决力学、天文学、物理学的问题,并相应发展了数学分析,尤其是求解微分方程的方法.这个传统一直延续到19世纪末20世纪初,以庞加莱为其杰出代表.同时,蒙日发展了综合几何学和解析几何学(包括无穷小几何学),奠定了19世纪上半叶几何学发展的基础,他的学派在19世纪初非常活跃.

第二代数学家包括从傅立叶、波瓦松(Denis Poisson,1781—1840)到斯图姆及刘维尔,最突出的人物是柯西,他们发展了强有力的分析工具来解决各种数学物理学问题,从而创立了数学物理学,特别是傅立叶分析及复分析.与之相对的是庞塞莱和沙勒(Michel Chasles,1793—1880)对射影几何学的奠基性工作.另外,伽罗华和柯西在方程论方面的工作对后来的发展影响巨大.

第三代数学家的代表人物是埃尔米特、贝特朗(Joseph Louis Fransois Bertrand,1822—1900)、若尔当及达尔布,他们的研究更为纯粹,更为专门,更具有多样性.他们都是19世纪下半叶的领袖人物,有着广泛的国际影响.在一些新的领域中,他们是无可争议的权威.如埃尔米特在数论、代数及函数论方面,若尔当在变换群理论和分析方面,达尔布在微分几何及偏微分方程方面,都有着持久的影响.但在继承法国分析传统上,这一代法国数学家已开始落后于德国数学家了.

第四代数学家活跃在跨世纪时期(1880—1910),这一时期又恢复了法国昔日的光荣,最突出的数学家是庞加莱,他对整个数学部门都做出了自己的贡献,同时为后人开拓了许多新领域,特别是自守函数论、组合拓扑学及微分方程定性理论.他在一切领域都有创新——从数论到天体力学,特别在分析领域产生巨大突破.同时代的毕卡、班勒卫(Paul Painlevé,1863—1933)和阿

达马也都是有国际声誉的大数学家.他们在19世纪末20世纪初恢复了法国数学的领袖地位.

20世纪初以保莱尔(Emile Borel,1871—1956)、拜尔(René Louis Baire,1874—1932)、勒贝格(Henri Léon Lebesgue,1875—1941)为首的第五代数学家开创了实变函数论及复变函数论的方向,同时也使数学局限在函数论的狭窄领域.与他们同时代的几何大家嘉当(Élie Cartan,1869—1951)和概率论大师列维(Paul Levy,1886—1971)在20世纪30年代以后才显示出他们的巨大影响.他们都是20世纪伟大的数学家.这些都显示出法国作为数学大国所具有的天才立国的特色.

2.2 德国

19世纪德国数学的发展,正如德国政治、经济、科学和技术的发展一样,同法国是截然不同的,这与德国的历史有着密切关系.30年战争(1618—1648)之后,在遭到严重破坏的德国的领土上,出现了几百个主权国家,每一个都具有自己的文化特色,这种地区割据局面甚至延续到19世纪中期.拿破仑战争以后,德意志联邦共有39个主权国家,其中较大的有普鲁士、汉诺威、萨克逊、巴伐利亚等王国.1866年普鲁士王国兼并汉诺威王国,从这时起,格廷根大学才归普鲁士文化部管辖.1871年普鲁士王国最终统一德国,是为第二帝国,它延续到1918年,由于第一次世界大战的失败而告终,这是德国科学技术及经济飞速发展和无比强大的时期.希特勒的"第三帝国"无非是妄图继承这个伟大时期.即使在统一以后,原先各国仍对文化教育事业有相当的自主权,因而地区发展的不平衡性仍然一直存在着.

19世纪德国数学的发展主要有以下几个特点.

(1)德国数学的发展几乎完全集中到大学,特别是新建及改建的大学中.19世纪以前,德国有科学院,特别是柏林科学院集中当时的精英从事科研工作.但是其中领头科学家都是外国人.到了拿破仑时代,德意志民族主义思想大大发扬.1809年,威廉·冯·洪堡(Wilhelm von Humboldt,1767—1835)就提出德意志科学(Deutsche Wissenschaft)概念,并说科学院与之无缘.他力主建立新式大学,把科研工作从科学院转移到大学中.其结果是柏林大学(1810)和布雷斯劳(1818)等新式大学的建立和改造.现在看来,这些想法和做法对于德国科学和数学的发展有着决定性意义.

(2)德国的大学多而分散,这就为数学家提供了足够多的职位.数学家在各地的流动也促进了地区之间的交流,而多中心有助于新思想的形成和传播,不致因学术垄断而阻碍科学的发展.1789年德国已有35所大学,拿破仑时代停办不少,例如高斯就读过的海尔姆斯台德大学.其后又建立了许多大学.这些新式大学增加了数学教学内容,少部分大学教授也开始进行研究,甚至以数学为专业.特别是普鲁士王国在1806—1810年的教学改革之后,师资培养由神学院过渡到哲学院而趋于世俗化,这一方面提高了中学师资的水平,另一方面也提高了哲学院教授的社会地位.他们在科学领域中的权威,使他们成为在德国很受尊敬的"学者"(Gelehrte)阶层,他们的物质待遇也相当优厚,这就形成了庞大的科学家(包括数学家)队伍.19世纪,取得学位、在大学任教、有研究成果的德国数学家超过其他所有国家的数学家的总和.从学术水准看,第一流的数学家人数也大抵如此.

(3)中学教学的改进以及中学师资水准的提高为科学家准备了大批后备队伍.19世纪初,数学就成为普鲁士中学的三门

主科之一,而中学师资都要在大学毕业后经过统一资格考试,许多大数学家都经过教中学的阶段,甚至长期任中学教师.在大学中,对于教学的研究也很受重视,许多大学教授对于中学教学极为关注,甚至亲自领导改革运动,如克莱因.在这方面,特别应该提到谢尔巴赫(Karl Heinrich Schellbach,1804—1892),他和狄利克雷及雅可比交往甚密,一起完成了数学教学及科研这两方面的改革,推动德国走向百年数学大国之路.谢尔巴赫从1843年起,40多年间一直是柏林数学教师的惟一考官.1855年德国建立数学教育讨论班,帮助新毕业大学生从事教学实践.1860年在谢尔巴赫的影响下,柏林大学也建立起数学讨论班.

(4)德国的应用数学得到发展.虽然高斯、雅可比等人对应用数学也做出了巨大的贡献,但他们更看重纯粹数学,正如雅可比所说,那是“为了人类智慧的荣耀”,这就形成大学中纯粹数学的优势地位.后来,从两个方向扭转了这个趋势,一是技术学院逐步建立起来,属于应用数学的席位越来越多;二是由于克莱因的提倡,通过企业界的赞助和政府的支持,在大学中也陆续设置一些应用数学的席位.另外在19世纪早期,许多大学教师也在技术学院等学校兼课,这对于提高技术院校的应用数学水平作用很大.以柏林技术大学为例,1770年已建成矿山学校,1827年更名为职业学校(Gewerbe Institute),1866年改称职业学院(Gewerbe Akademie),1879年改称技术高校(学院),1946年又改称技术大学,其中设有一般科学系,也包括数学,不过在19世纪没有授予博士学位的权利(到1924年才获准).它们是发展数学的一支重要力量.

(5)由于地区分散,统一的科学院的建立是20世纪的事,但也只是采用马克斯·普朗克学会的名义.19世纪所建立的一个

全国性组织,是1822年建立的自然研究者与医生协会,每年轮流在各地召开年会进行交流,但无常设组织.1890年在G·康托尔等人的倡议下,才正式成立德国数学家联合会,次年发行年报,其上登载的许多综述性论文,如希尔伯特的《数论报告》(1897),有很大的影响.德国数学家在19世纪末的一项伟业是发行一套《数学科学百科全书》(1898—1935),共6大部23卷,总结了到20世纪初整个数学的发展.

从19世纪20年代起,德国的数学家几乎完全是从大学哲学院里培养出来的,大学生在整个学习期间至少有一学期要到其他大学去,毕业后也往往要到好大学去进修,其中首选的是柏林大学.

柏林大学建立于1810年,它是一所新型大学,但是初期的数学教授并没有什么名气.第一位数学教授叫特拉雷斯(Johann Georg Tralles,1763—1822),他是在格廷根上的大学,在应用数学上有些贡献,并在1804年被选入柏林科学院.可是,他的讲课枯燥无味,毫无启发性.传说他上第一节课时,整整在黑板上写了一个钟头的公式,然后鞠躬下台,离开教室.第二次上课时,原来的五个学生只剩下三个,第三次只剩下两个,最后因为听课的学生人数不够,干脆取消了这门课.当时柏林大学除了特拉雷斯的正教授职位之外,还有几个副教授的编制,但是副教授的薪水还不足以糊口,所以他们都想改行.甚至到19世纪中期,许多大数学家还得靠兼课来弥补收入之不足.他们往往到当地中学、军事学院和职业学院教书,一周之内往往要上20多个课时.在19世纪的头25年,德国数学的水平是相当低的,没有一个大学能开出高等数学的课程,取得数学方面的博士学位的寥寥无几,至于能取得授课资格的人就更少了.第一个在柏林大学取得讲师资

格的是卢贝(Samuel Ferdinand Lubbe,1786—1846),可是他的博士论文实在太差,连他的导师特拉雷斯都说论文写得很不清楚,有的地方还有错.这位卢贝一直在文科中学执教了20多年.由此可以看出,当时在德国搞数学的是没什么出路的.

1822年,特拉雷斯去伦敦出差时突然去世,似乎给柏林大学提供了一个提高数学水平的好机会,数学正教授的遗缺想请高斯来替补,不过高斯不愿离开格廷根;天文学家贝塞尔(Friedrich Wilhelm Bessel,1784—1846)曾被提名,但是当时的哲学院院长、哲学家黑格尔(Georg Wilhelm Friedrich Hegel,1770—1831)错误地怀疑天文学家是否能讲授高等数学,因此贝塞尔未被考虑.直到1824年,迪尔克森(Enno Heeren Dirksen,1792—1850)被任命为特拉雷斯的接班人.迪尔克森比他的前任的水平要高,因他曾在格廷根跟着高斯学习过,不过由于他还在军事学院兼课,他就不可能全心全意地在大学教课了.同年,马丁·欧姆(发现欧姆定律的欧姆(Georg Simon Ohm,1789—1854)的弟弟)尽管在系里遭到许多人的反对,仍然被任命为数学副教授.1824年8月,普鲁士国王给柏林大学新设置一个应用数学正教授的职位,并任命欧尔特曼斯(Jabbo Oltmanns,1783—1833)就任此职.欧尔特曼斯曾留学巴黎,受到了亚历山大·冯·洪堡(Friedrich Wilhelm Heinrich Alexander von Humboldt,1769—1859)的赏识和推荐,1810年他被选入柏林科学院,同时让他就任柏林大学教授,但是他当时没有答应,回老家去了.后来因为生活无着,在亚历山大·冯·洪堡的帮助下谋得这个职位.不过在任应用数学正教授期间,他不但没有做出什么贡献,而且变成了一个酒鬼,于1833年去世.这为马丁·欧姆成为正教授铺平了道路.马丁·欧姆是自学成才的人,他正式听的数学课是在埃尔兰根大学听的

一门叫做组合算法的课.以前他通过讲师资格考试时,成绩很不理想,而且对黑格尔所提出的问题的回答也是相当混乱,不过还算是通过了.然而,这次由于系里的教授对他评语不佳,他没能成为欧尔特曼斯的接班人.但是他在普鲁士文化部里有一位有影响的支持者,他终于在部长阿尔滕斯坦(Karl Altenstein,1770—1840)向国王的推荐下,而于 1839 年成为正教授.马丁·欧姆并不是一位深刻的数学家,不过他讲的课有很多听众.但是由于他讲课经常不停地重复,而且深入不下去,受到他的同事的轻视,他成为了惟一一位没有被选入柏林科学院的数学正教授.

柏林大学数学水平的真正提高来自于狄利克雷.他可以说是德国第一位职业数学家,同现在的职业数学家区别不大,也就是说,在大学里教授高等数学甚至能开出当时科学前沿的课程、培养博士研究生,而且是当时第一流的数学家,他对数学做出了许多开创性的贡献.不过,由于他没有博士学位,也没有取得授课资格,他的提升遇到很大困难.虽然他在 1839 年已成为正教授,但直到 1851 年才取得授课资格,这时他才具有教授的全部权利.

对柏林乃至对整个德国数学的发展贡献最大的组织者除了亚历山大·冯·洪堡之外,就是克莱尔(August Leopold Crelle,1780—1855).克莱尔是一位工程师,虽然他对数学也做了一些研究工作,但主要是以伟大的科学组织者而闻名后世.1826 年,他创办了德国第一个专业的数学杂志《纯粹与应用数学杂志》,这个杂志经常被引用为《克莱尔杂志》.由于这个杂志的出现,使得当时许多年轻的数学家得以通过发表论文而展示他们的才华.阿贝尔、雅可比和史坦纳(Jacob Steiner,1796—1863)等人的许多重要论文就发表在最初几卷上,这些论文对后来的数学工

作影响甚大.克莱尔同亚历山大·冯·洪堡一样,对于改造普鲁士的教育体系很感兴趣.在亚历山大·冯·洪堡的支持和影响下,克莱尔被任命为普鲁士王国文化部的数学顾问,1827年柏林科学院数学学部的书记约翰·恩克(Johann Franz Encke,1791—1865)提名克莱尔为柏林科学院院士,这个提名当时也得到了学部其他成员的支持而通过,从而更加强了克莱尔对科学院的影响.这样克莱尔就以科学院院士的身份和他所创办的杂志的影响,直接与当时数学最先进的法国以及其他国家的数学家建立了直接的联系,从而大大推动了德国数学,特别是普鲁士王国数学的发展.1831年柏林大学已经拥有像狄利克雷和史坦纳这样的副教授了,不过由于名额的限制,数学教授的职位仍然不能扩大,当时一些年轻的数学家不得不到外地去谋职.虽然狄利克雷当时尽力使闵定(Ernst Ferdinand Adolf Minding,1806—1885)通过柏林科学院找到一个高级职位,他也只能够在柏林兼了许多年的差,直到1843年.后来他不得不到俄国的道尔帕特大学(属爱沙尼亚)当教授去了.

1855—1856年,库默尔、克洛耐克和外尔斯特拉斯到柏林大学任教,使柏林大学成为当时的数学中心.外尔斯特拉斯的教学影响了成百上千人,可以说真正建立了一个影响达半个世纪的"柏林学派",其声名所及,远远超过德国国内.

对德国数学的教学和科研体制有着最大影响的是雅可比.雅可比是犹太人,但是当时普鲁士已经实行犹太人解放令,犹太人身份不成为在学术地位上提升的障碍.1824年,雅可比已经取得柏林大学的讲师资格,在当时看来没有机会晋升,有人建议他去哥尼斯堡大学.当他在1826年5月到那里时,那里已是人才荟萃.贝塞尔是天文学教授,诺意曼(Franz Ernst Neumann,

1798—1895)和杜夫(Heinrich Wilhelm Dove,1803—1879)在那里教物理.受他们的影响,雅可比对应用数学产生了兴趣,从而开创了德国的理论数学和应用数学相结合的方向.1827年雅可比被任命为副教授,1832年他被任命为正教授.1841年,他仿照语言学和历史学的教学方法,创立了数学讨论班这样一种形式.在讨论班上,他介绍自己的最新科研成果,这样使讨论班成为培养数学家的一种有效的形式.讨论班的形式在半个世纪内迅速地普及到德国的各个大学,使得德国数学家的培养在世界各国中遥遥领先.另外,雅可比的讲课也开始大大超出以前只限于初等数学和微积分的水平,大大提高了数学的教学水平.雅可比可以说是在纯粹数学和应用数学方面都做出重大贡献的数学家,而且他能把许多数学学科联系起来,开创了许多新方向.最突出的就是他在椭圆函数方面的研究,这是19世纪数学研究的一大热门,不仅在理论上有重要的价值,而且在解决从数论到物理的许多问题上,都是十分有力的工具.他不仅影响了德国数学,而且影响了几代欧洲数学家,例如19世纪下半叶最有影响的法国数学家埃尔米特几乎完全是沿着雅可比的道路发展数学理论的.

格廷根大学虽有高斯、狄利克雷和黎曼三位大数学家,但还不能说建立了足以与柏林大学相抗衡的学派,而第一个尝试来自克莱布什(Rudolf Friedrich Alfred Clebsch,1833—1872),他是继黎曼之后,在代数几何、代数不变式论方面的领袖人物.他博学多才,善于教学及组织,学生众多,他和诺意曼的儿子小诺意曼(Carl Gottfried Neumann,1868—1925)共同创办的《数学年刊》(*Mathematische Annalen*)(1868—　　)成为仅次于《克莱尔杂志》的德国专业数学期刊,为柏林之外的学者提供了一个发表论文的阵地.遗憾的是,他英年早逝,未成大业.此后,格廷根落入施

瓦茨等人手中,直到克莱因于1886年任格廷根大学教授.1892年施瓦茨去柏林大学,1895年希尔伯特到格廷根任教,以克莱因—希尔伯特为轴心的格廷根学派才正式建成.在1890—1930年间,格廷根无可争议地是世界数学的中心,德国数学达到了它的极盛时代.

除了上述三所大学之外,莱比锡大学在19世纪最后20年先是克莱因,后来是S·李任教授,有很大影响.慕尼黑大学、波恩大学等也有优秀教授执教,出了不少人才.正是由于地区分散且人数众多,又肯向外国学习,才使得德国数学在纯粹数学与应用数学的所有领域都能得到发展,而且还有许多自己独创的领域,如代数数论、代数函数论等,成为一个名副其实的数学大国.

2.3 意大利

意大利的统一使意大利获得了新生,也使意大利数学获得了新生.意大利的统一从19世纪20年代开始,经过所谓意大利三杰——马志尼(Giuseppe Mazzini,1805—1872)、加富尔(Camillo Benso Cavour,1810—1861)和加里波弟(Giuseppe Garibaldi,1807—1882)通过不同途径的努力而实现.1859年撒丁王国与法国对奥地利的战争统一了伦巴底,1860年又统一了巴马和莫得那、托斯卡纳、罗曼那,同时,加里波弟占领了两西西里王国,后被并入撒丁王国.1861年3月正式建立意大利王国.其后于1866年通过普奥战争得到了威尼提亚,最后于1870年进驻教皇辖地.至此,意大利领土上的2000万人口完全统一于撒丁国王的统治之下.在整个为统一而斗争期间,特别是同奥地利的斗争过程中,意大利近代数学的开创者们都积极参与了政治斗争.他们在统一之后,也成为了统一意大利的政治领导人.贝蒂(Enrico Betti,

1823—1892)的朋友、比萨的物理学家马提乌奇(Carlo Matteucci, 1811—1868)成为教育部长,布廖斯奇(Francesco Brioschi, 1824—1897)成为教育部执行委员会成员(1870—1882),同时他还是国会参议员(1865年起),贝蒂本人也是参议员.后来,许多数学家,如贝尔特拉米(Eugenio Beltrami, 1835—1900)、克雷莫纳(Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona, 1830—1903)、迪尼(Ulisse Dini, 1845—1918)、沃尔泰拉(Vito Volterra, 1860—1940)等,都曾被任命为公共教育高等委员会成员.1859年意大利制定了新的法律,从此设立了许多高等数学的教授席位.意大利的大学同德国一样较为分散,十几所大学都出过杰出人才.19世纪后半叶,最好的大学是罗马大学,它有分析、几何及力学等多个教授席位,占有较大的优势.例如,克雷莫纳从1877年起,沃尔泰拉从1900年起都在该大学任教,培养了许多人才.另外,比萨大学、都灵大学、博洛尼亚大学、帕都亚大学、帕维亚大学等都有著名教授任教.那不勒斯大学、巴勒莫大学等也具有相当的实力.

除了大学之外,意大利还建立了一些技术学院.1863年在伦巴底工业资本家的资助下,布廖斯奇在米兰建立一所工程学校——米兰高等技术学院(Istituto Tecnico Superiore),为意大利北部工业化培养工程师,特别是铁路工程师.布廖斯奇任校长(1863—1897),卡索拉蒂(Felice Casorati, 1835—1890)及克雷莫纳(1867—1873年任职)也在该校任教过.

克雷莫纳于1873年在罗马建立一所新的综合工科学校,并在1873—1877年间任校长.另外在博洛尼亚也有一所技术学院.

同法国一样,意大利也有一所著名的高等师范学校,这就是比萨的高等师范学校,它虽然不像巴黎高等师范学校那么著名,

但在意大利也培养了不少数学家.

意大利统一的数学会直到1922年才成立,各地也成立了一些数学会,著名的有巴勒莫数学会(1884),它们的会报同大学学报一样,是发表论文的主要期刊.巴塔里尼(Giuseppe Battaglini,1826—1894)在1863年专为大学生创办了《数学杂志》.

同德国和法国的情形一样,意大利的数学也得益于专业杂志的创办,继德国《克莱尔杂志》和法国《刘维尔杂志》之后,托托里尼(Barnaba Tortolini,1808—1874)于1858年创办了《纯粹和应用数学年鉴》(*Annali di mathematica pura ed applicata*),后来布廖斯奇担任主编.

意大利关于教育方面的改革也使数学得到了很大的发展.1867年,在许多数学家的推动下,中学教育得到了改革.这个改革突出的一点就是使教育同宗教分离,使教育脱离天主教的统治,并且在第一代意大利数学家的努力下结束了大学必须进行神学的测验,从而使科学得到相应的解放.不过在当时,意大利大学的教学水平还不高,他们刚刚编辑自己的教科书,也翻译德、法等国的教科书.1856年,贝蒂翻译出版了法国数学家贝特朗的《初等代数手册》(*Trattato dialgebra elementare*),该书在意大利广为流传,多次再版.1861年,贝蒂和布廖斯奇合编《欧几里得几何原理》的新版.1862年,他们合办一个公司,其目的就是给中学提供教科书,并传播有用的知识.

意大利数学家还自己编写新教材,特别是高等代数、解析几何与微积分,很快他们的大学基础数学教育就达到国际先进水平.

意大利在19世纪末20世纪初并非政治大国,也不是经济大国,科学技术也不先进.但是从国家统一后,意大利经过二三

十年的努力，已经成为一个公认的数学大国．从第一届国际数学家大会(1897)开始，到在罗马举行的规模空前的第八届国际数学家大会(1928)，意大利的数学家在会上都叙述过这段不平凡的发展历史．

据沃尔泰拉讲，意大利数学作为一个国家的科学存在来源于 1858 年贝蒂、布廖斯奇及卡索拉蒂到德国和法国的学术访问．在此之前，他们主要追随法国应用数学的传统，的确也出现过一些知名的数学家，如鲍登尼(Antonio Maria Bordoni，1789—1860)、摩索梯(Ottaviano Fabrizio Mossotti，1791—1863)、普拉纳(Giovanni Plana，1781—1864)、基奥(Felice Chio，1813—1871)等．但是，现在他们的名字连历史学家也感到陌生．而贝蒂等三位分析专家访问德国，才使他们大开眼界，19 世纪中期新兴的纯粹数学早已使数学天地"换了人间"．而意大利振兴自己数学的时机也正在于抓住新兴领域迎头赶上．他们开始去研究当时还方兴未艾的伽罗华理论、置换群论、不变式论、椭圆函数论、复分析、射影几何、非欧几何、代数几何以及微分几何，从而一下子就跨上了新台阶．他们也没有忽略法国的分析及力学传统．正是这种兼收并蓄，使意大利经过 20 多年的发展，在许多领域遥遥领先，真正做到了"青出于蓝而胜于蓝"．在 19 世纪末 20 世纪初，意大利数学家至少在代数几何学、微分几何学(特别是张量分析)、泛函分析(应该说是意大利的独创)等领域绝对领先，而在数学基础(皮亚诺学派)、分析(分析基础、积分方程、发散级数、求和理论)、多复变函数论、综合几何学等领域也建立了足以与数学大国相抗衡的有影响的学派．

意大利数学的复兴大约经历了两三代人的时间，每一代人都可划分为分析和几何两大部分：

第一代分析家是贝蒂、布廖斯奇、卡索拉蒂等人.贝蒂本人是伽罗华理论的引进者,是黎曼拓扑思想的开拓者,也对弹性理论的发展有贡献.布廖斯奇对五次方程及椭圆模函数和群的关系有贡献.卡索拉蒂独立于外尔斯特拉斯证明了一些解析函数论的基本定理.

第二代分析家已在国际上享有盛名,其中最重要的是沃尔泰拉,他和平凯莱(Salvatore Pincherle,1853—1936)是泛函分析的先驱,沃尔泰拉还是积分方程论的开创者以及近代生物数学的先驱.在实变函数论方面,迪尼的《实变量函数论基础》(1878)是这方面的第一本著作,被译成德文,很受重视.他本人在傅立叶级数、微分几何等方面也有许多成就.阿斯科利(Giulio Ascoli,1843—1896)和阿尔泽拉(Cesare Arzelà,1847—1912)得出了等度收敛函数列基本定理.毛瑞拉(Giacinto Morera,1856—1909)证明了复分析中的毛瑞拉定理.切萨洛(Ernesto Cesàro,1859—1906)得出了切萨洛求和法.而这时期最主要的分析基础研究则是皮亚诺及其学派的工作.皮亚诺在数理逻辑方面直接影响了罗素,开创了数理逻辑的新天地.他的常微分方程存在性定理至今已是经典的结果.

第三代分析家对20世纪初分析的大发展有决定性的贡献.其中最著名的有维塔利(Giuseppe Vitali,1875—1932)、斯科扎(Gaetana Scorza,1876—1939)、富比尼(Guido Fubini,1879—1943)、列维(Eugenio Elia Levi,1883—1917)、托耐利(Leonida Tonelli,1885—1946)、皮科内(Mauro Picone,1885—1977)、特里科米(Francesco Giacomo Tricomi,1897—1978)等,他们的名字都同某些数学分支或定理联系在一起.

第一代几何学家有克雷莫纳、巴塔里尼等人,而最著名的是

贝尔特拉米,他对非欧几何与微分几何做出了决定性贡献.

第二代、第三代几何学家有微分几何学家比安奇(Luigi Bianchi,1856—1928)、里奇(Gregorio Ricci-Curbastro,1853—1925)和他的学生列维-奇维塔(Tullio Levi-Civita,1873—1941).里奇是绝对微分法的创立者,列维-奇维塔引进平行移动的观念,预示了联络这一现代微分几何核心观念.而卡斯泰努沃(Giudo Castel-nuovo,1865—1952)、恩瑞克斯(Federigo Enriques,1871—1946)和塞梵瑞(Francesco Severi,1879—1961)则是意大利代数几何学的三杰.在综合几何学和几何学基础方面,有塞格利(Corrado Segre,1863—1924)、皮埃利(Mario Pieri,1860—1913)、沃隆涅斯(Giuseppe Veronese,1854—1917)等.

值得一提的是,在这些数学家背后,还有几十位甚至上百位意大利数学家,在这方面与德国的情况类似.另一方面,意大利的大数学家往往不只是一个狭窄领域的专家,他们有的不仅在分析与微分方程方面,而且在几何与力学方面均有贡献.

20世纪20年代,法西斯上台,加上第二次世界大战,意大利数学趋于衰落,直到20世纪60年代才再次振兴.

2.4　英国

19世纪的英国经过产业革命之后,成为世界的工厂.当然,工程技术也走在前面.与此相伴的是,与技术相关的科学也是极为先进的.在19世纪初,英国的化学、热学、电磁学,甚至地质学、生物科学(当时称自然史),都处于世界领先地位,并在19世纪中一直保持领先地位.奇怪的是,19世纪上半世纪甚至整个19世纪,英国的数学却是相当落后的.普普通通的数学家不过二三十人,杰出的数学家不超过10人,而且其中有些人更以力

学家或物理学家而著称,如哈密尔顿等.究其原因,恐怕英国人的保守倾向、经验主义哲学及实用主义态度使他们的纯粹数学难以发展.他们难得向其他国家学习,特别是对于欧洲大陆的纯粹数学.对于革命性的东西,他们很少参与,更不用说提出了.伽罗华理论、非欧几何、分析的严密化等很难传到那里,而对革新的反对,他们往往能坚持到最后.德·摩根(Augustus de Morgan,1806—1871)到19世纪中期还反对使用负数,卡洛尔(Lewis Carroll,本名 Charles Lutwidge Dodgson,1832—1898)到19世纪末还反对非欧几何,就是明显的例子.

18世纪英国数学家顽固地坚持牛顿的直观的和几何的传统,使得英国数学大大落后于欧洲大陆.到19世纪初,英国数学家对自己的落后状况已经有所察觉,其中,一些先进人物开始来改变这种状况.剑桥数学家伍德豪斯(Robert Woodhouse,1773—1827)写了《分析计算原理》(*Principles of Analytical Calculation*,1803),其中就倡导使用欧洲大陆的微积分记号以及更严格地处理微积分演算.他的态度影响了他三个年轻的学生:皮科克(George Peacock,1791—1858)、巴贝奇(Charles Babbage,1792—1871)和赫歇尔(John Frederick William Herschel,1792—1871),他们在1812年组成分析学会(The Analytical Society),提倡用d来代替长期在英国使用的"·",并且通过翻译和介绍,传播欧洲大陆的先进数学成果.他们在1819年创立了剑桥哲学会(Cambridge Philosophical Society),它实际上是分析学会的继续和发展.从某种意义上来讲,也是对伦敦皇家学会的对抗.因为这时的伦敦皇家学会已经完全不注意数学和数学家了.剑桥哲学会对改变英国数学的落后状况起了很大作用,英国数学开始走上复兴的道路.正如先进的欧洲大陆一样,英国也是通过办专业杂志来

发展数学的.1837年剑桥哲学会创办了《剑桥数学杂志》(*Cambridge Mathematical Journal*),首任编辑是格利高里的曾孙小格利高里(Duncan Farquharson Gregory,1813—1844).有了这个杂志,年轻一代的英国数学家有机会发表他们的著作,例如德·摩根、汤姆逊(William Thomson,1824—1907)、凯雷(Arthur Cayley,1821—1895)、西尔维斯特、斯托克斯(George Gabriel Stokes,1819—1903)等都是在这个杂志上发表文章的.

英国的数学家,如果从他们的社会地位来分,可以分成两类,主要一类出身名门,是从剑桥大学培养起来的,另一类出身寒微,他们生活艰难,经历坎坷,一般自学成才.他们之所以能脱颖而出,与当时的社会环境也有关系.这类数学家中最主要的就是格林(George Green,1793—1841)和布尔,他们都是靠布朗亥德(E.F.Bromhead)的帮助而得以跻身于数学家行列的.布朗亥德虽然现在已无人知晓,但在当时却是个大人物,他是剑桥大学的毕业生、皇家学会会员,也是巴贝奇的密友,同赫歇尔、皮科克等也很熟识.他从一开始就是分析学会的积极参加者,他住在林肯郡,那时就帮助出身在林肯郡的布尔自学数学.

英国的数学教学体制比较陈旧,不仅教材落后,而且教法保守.即使在最好的大学——剑桥大学,整个19世纪都实行一种导师及考试制度.为了毕业时能获得艺术学士(Bachelor of Arts,这里艺术并非现在的意思,而是从四艺沿袭下来的)学位,必须通过初试(及格考试)及所谓数学荣誉学位考试(tripos),考试进行一周,荣誉学位分三级,获得最高级的称优胜者(wranglers),其中第一名(senior wrangler)、第二名(junior 或 second wrangler)都是极高的荣誉,他们往往也能获得再一次高等数学考试的奖——斯密司(Smith)奖.这种考试都是马拉松式的"笔头大赛",因此

学生上大学后,并不注意听教授和讲师讲课,而是跟着导师(coach,译成教练更合适)学习做题来应付考试.这种题海战术当然不是培养数学家的好方法,不过天才例外.不少数学家、物理学家的确是第一名或第二名优胜者,但是更多的优胜者最后也没有成为数学家.导师中也有不错的数学家,如罗斯(Edward John Routh,1813—1907).这样,英国的制度不像德国那样能够成批地培养数学家,但是,其体制却有不妨碍真正天才出头的好处.大学毕业后,有许多人成为研究员(fellows),一期可长达六七年,其间每年有200英镑的可观收入,愿意干什么就干什么,什么不干也没人管,这样,许多独创性的思想就可以产生出来.英国大学教授席位很少,而且是终身制,但讲师(包括导师)位置很多,随着大学教育的发展,数学家也不难找到职位.这样,交流虽少,天才的创造却不少.

这样的条件造就了一批杰出的数学物理学家和一批代数学家,其他领域就不那么出色了.英国数学物理学家相当出色,在国际上也决不逊色,其中包括哈密尔顿、汤姆逊、麦克斯韦、斯托克斯、艾里(George Biddell Airy,1801—1892)、台特(Pether Guthrie Tait,1831—1901)、瑞利(Lord Rayleigh,原名 John William Strutt,1842—1919)等人.

英国的代数学最早是皮科克、德·摩根、布尔等人对抽象代数观念的发展.19世纪中期,则是布尔创造的不变式论占统治地位的时期,英国的不变式论三杰是凯雷、西尔维斯特和萨尔孟(George Salmon,1819—1904);同时,行列式及矩阵论也发展起来.英国代数学第三领域是哈密尔顿的四元数论,克里福德(William Kington Clifford,1845—1879)以及凯雷等人的推广,预示着后来超复数系理论.斯密司(Henry John Stephen Smith,1826—

1883)可以说是 19 世纪英国惟一杰出的数论专家,而克尔克曼(Thomas Penyngton Kirkman,1806—1895)是 20 世纪组合论的一位先驱.台特则是纽结理论的奠基者.

至今英国没有全国性的数学会.伦敦数学会于 1865 年成立,是伦敦大学学院的两个学生创办的,当年发行《会报》(*Proceedings*),至今仍继续出版.爱丁堡数学会于 1883 年成立,1884 年《会报》开始出版(出版的是第 2 卷,而第 1 卷迟至 1894 年才出版).

英国仿照德国的先例于 1831 年建立"不列颠科学促进协会",对科学的交流和普及有重大作用.许多数学家,如皮科克、斯密司、凯雷等人的成果就是首先在年会上报告并出版而得到传播的.19 世纪最重要的科学杂志是《哲学杂志》(*The Philosophical Magazine*),1798 年创刊,到 1825 年由出版社经办,成为最早的非科学组织的学术刊物之一,其上刊载数学物理学方面的论文,对英国科学的发展起过重要作用.

19 世纪末,英国数学普遍衰微,但高尔顿(Franeis Galton,1822—1911)和皮尔逊(Karl Pearson,1857—1936)开创了数理统计,至今英国在这个领域仍居于世界领先地位.

2.5　俄国

俄国在 15 世纪末摆脱蒙古人的统治,得到统一.16—17 世纪,文化仍很落后,数学落后于西欧 200 多年.第一本印刷的数学书直到 1682 年才出版.彼得大帝锐意改革,俄国从此走上近代化道路,开始建立学校,设置数学课程,翻译外国书籍,特别是 1725 年建立科学院,请进国外学者,创办科学期刊.俄国成为欧拉的第二祖国.欧拉去世后,许多人传播欧拉的思想,欧拉编写

的教科书得到广泛的应用,这些都为俄国数学在19世纪的兴起打下了基础.

19世纪俄国数学的发展是围绕几个大学进行的,其中最主要的是1819年建立的彼得堡大学和1755年建立的莫斯科大学.19世纪俄国最伟大的几何学家罗巴切夫斯基(Nicholas Ivanovic Lobachevsky,1792—1856)基本上是在喀山大学比较孤立的情况下进行研究工作的.他的非欧几何学也经历了较长的传播过程.19世纪初建立的道尔帕特(今爱沙尼亚塔尔图)大学、维尔纽(今属立陶宛)大学以及1888年建立的托木斯克大学都有德国数学家任教.

乌克兰的哈尔科夫大学经过奥西波夫斯基(Timophy Fedorovic Osipovsky,1765—1832)的努力,改进了大学数学教育.他编著的《数学教程》Ⅰ—Ⅲ卷(1801,1802,1823)第一次包括高等数学的内容.奥斯特洛格拉德斯基(Mihail Vasilievic Ostrogradsky,1801—1862)于1816—1821年在这所大学学习,其后于1822—1827年在巴黎学习,当时巴黎是世界惟一的数学中心,且正处于数学分析及数学物理的黄金时代,奥斯特洛格拉德斯基在法国学派的影响下,首次做出了具有国际水平的贡献.

19世纪俄国出现的可以称得上数学中心或学派的是切贝舍夫(Pafnuty Lvovich Chebyshev,1821—1894)建立的彼得堡学派.他是一位真正的天才人物,他的贡献横跨纯粹数学和应用数学各个领域,在生前就得到欧洲数学界的一致赞赏.虽然他也曾6次出国,并且同法国数学界有着密切的关系,但是他的成就大都体现出自己的独创性,因此他的学派是一个真正有俄国特色的学派,尤其是在数论、概率论与函数逼近论三大领域,不仅取得重大突破,而且这个传统一直延续到今天,仍保持着世界领先的

地位.他在数论方面的学生科尔金(Aleksandr Nicolaevich Korkin, 1837—1908)和左洛塔廖夫(Egor Ivanovich Zorotarev, 1847—1878)在二次型理论上有重要贡献.他的学生马尔科夫(Andrei Andreevich Markov, 1856—1922)和李雅普诺夫(Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857—1918)在概率论上有决定性贡献,李雅普诺夫还开创了微分方程的稳定性理论,而且他们都不只是某一狭窄领域的专家.

19世纪末,莫斯科数学学派开始崛起.1864年莫斯科数学会成立.其后,特别是在叶果洛夫(Dmitri Fedorovich Egorov, 1869—1931)及鲁金(Nikolai Nikolaevich Lusin, 1883—1950)的努力下,抓住世纪之交数学大转型的时机,系统地引进和发展新数学,于20世纪20年代在莫斯科形成强有力的数学集体,奠定了原苏联数学大国的地位.

2.6　其他各国

19世纪的数学大国只有法、德、意、英、俄五国,其他国家也产生过数学家,甚至极其伟大的数学家,但是,他们不是在上述大国中取得公认的成就,就是在自己国家的不发达的环境中默默无闻.这恰恰说明,即使是天才,社会环境对数学家成长的影响也是很大的!

(1)德语区:奥匈帝国和瑞士.

19世纪的欧洲强国有英、法、德、俄以及奥匈帝国.前三个国家经济发达,科技先进;俄国经济落后,但是有一批思想先进的知识分子,并产生一些创造性强的科学家,它们都是数学大国.惟独奥匈帝国例外,它虽统治了现在的奥地利、匈牙利、波兰、捷克、斯洛伐克、罗马尼亚、塞尔维亚、克罗地亚、斯洛文尼亚

甚至乌克兰大部分地区，以及意大利和欧洲其他一些地方的领土，是一个名副其实的超级大国，但是在哈布斯堡王朝的专制统治下，经济不振，科技落后，思想保守，不思改革，其必然结果是19世纪"世纪末"(fin de siecles)思想流行，第一次世界大战后垮台、解体.这样一来，反而使奥地利、匈牙利、波兰等地人才辈出，一批国际一流的哲学家、科学家、数学家应运而生，例如大数学家哥德尔(Kurt Gödel，1906—1978)及冯·诺伊曼(John von Neumann，1903—1957)就是时代的产物.而在19世纪，他们只是被动地受到德国数学的影响.

19世纪初，法国革命也对奥匈帝国有所震动，其结果就是仿照巴黎综合工科学校逐步建起综合工科学校，后又发展成技术学院或技术大学.1806年在布拉格，1811年在格拉茨，1815年在维也纳建成这样的学校，目的是面向应用.它们在教材中引入画法几何，在这种基础上发展数学，自然没有成功.因此19世纪上半世纪，在这片广袤的土地上，能够在数学史上留名的只有三个孤立的数学家：波耶(Janos Bolyai，1802—1860)，他以非欧几何的创立者而知名；波尔查诺(Bernard Bolzano，1781—1848)，他在分析基础方面的工作领先于柯西，但影响甚微；库利克(Jakub Filip Kulik，1793—1863)，他是因子表的计算家.

19世纪下半叶，情况开始有所改变，奥地利科学院在1848年终于建立起来，数学期刊《数学月报》(*Monatshefte für Mathematik*)到1890年才创刊.奥地利的数学家通常到德国、意大利或法国留学，然后取得本国教授职位，19世纪末他们也开始走上国际舞台.最著名的有维尔廷格(Wilhelm Wirtinger，1865—1945)和富特万格勒(Philipp Furtwängler，1869—1940)，前者在代数函数论上，后者在类域论上有重大贡献.陶贝尔(Alfred Tauber，

1866—1942)以陶贝尔型定理著称.到20世纪,这里出生的一些数学家已经在世界上居于领先地位了,如布拉施凯(Wilhelm Blaschke,1886—1962)、阿廷(Emil Artin,1898—1962)、拉东(Johann Radon,1887—1956)等,不胜枚举.

瑞士的苏黎世理工学院成为瑞士的数学家重镇,十几位德国大数学家,包括世纪之交柏林大学的三位掌门人施瓦茨、弗罗宾尼乌斯(Georg Ferdinand Frobenius, 1849—1917)、肖特基(Friedrich Hermann Schottky,1851—1935),以及戴德金、克里斯托菲尔(Elwin Bruno Christoffel,1829—1900)、胡尔维茨(Adolf Hurwitz,1859—1919)和20世纪最伟大的数学家之一的外尔,都在这里任教过.由此不难看出这种影响之巨大.迄今为止,已有3次国际数学家大会就是在这里召开的(1897,1932,1994).

伯尔尼产生了19世纪瑞士伟大的数学家施累夫利(Ludwig Schläfli,1814—1895),他的贡献主要是多维几何,影响至今不衰.

(2)北欧诸国.

北欧诸国对数学也有极大的贡献.挪威、丹麦、瑞典、芬兰及冰岛总人口不足3 000万,从19世纪起已是人才辈出,只是因为本国社会条件的限制,他们往往在国外才有发展的机会.丹麦和瑞典在其中占有领导地位,挪威从1534年到1814年在丹麦的统治之下,其后在瑞典的统治之下,到1905年独立.芬兰的民族及语言与其邻国迥异,从14世纪到1808年由瑞典统治,1640年在奥布(Åbo,现称土尔库)建立大学.18世纪俄国势力逐渐侵入芬兰,19世纪处于沙皇的统治之下,到1918年独立.

19世纪的挪威产生两位大数学家:阿贝尔和S·李.另外,西洛(Peter Ludvig Mejdell Sylow,1832—1918)在群论上的著名定理也名垂史册.挪威还有几位世界著名的应用数学家.丹麦数学的

发展类似于德国,围绕着大学进行.哥本哈根大学早在 1479 年已建立,但教学一直较为初等,更谈不上研究.丹麦科学院于 1742 年建立,直到 19 世纪,微积分才开始进入大学教学.19 世纪最著名的丹麦数学家是错玉顿(Hierongmus Georg Zeuthen, 1839—1920),他是计数几何的奠基者之一,也是著名的数学史家,而且编辑丹麦的专业数学期刊《数学杂志》(*Tidsskrift for Mathematik*)长达 20 年之久.

19 世纪后期北欧的数学大发展得力于伟大的组织者米塔格-莱夫勒(Magnus Gustaf Gösta Mittag-Leffler, 1846—1927).他是外尔斯特拉斯的学生,在传播柏林学派精神上不遗余力,恐怕今日北欧诸国分析大师辈出也得益于此.他于 1882 年创办《数学学报》(*Acta Mathematica*),由于发表庞加莱的论文以及 G·康托尔的集合论译文,很快便成为国际一流期刊,从此瑞典及北欧学者有了发表他们成果的地方,从而使人才脱颖而出.19 世纪和 20 世纪之交,国际数学界看到一批年轻的瑞典数学家.例如,弗瑞德霍姆(Eric Ivar Fredholm, 1866—1927)、本狄克逊(Ivar Otto Bendixson, 1861—1935),他们分别在积分方程和微分方程方面领导世界新潮流.科赫(Helge von Koch, 1870—1924)以他的曲线预示着当代大热门分形与分维理论,即使在当时也对曲线拓扑造成了冲击.贝克隆(Albert Victor Bäcklund, 1845—1922)以所谓贝克隆变换导致孤立子的出现而声誉日隆.弗拉格门(Lars Edvard Phragmén, 1863—1937)与芬兰数学家林德洛夫(Ernst Leonhard Lindelöf, 1870—1946)开创了复分析的新领域.另一位芬兰数学家梅林(Robert Hjalmar Mellin, 1854—1933)也因为梅林变换在分析及数论上的重要性而享有盛名.

应该看到,瑞典和丹麦的科学发展有着相当长的历史,从

16 世纪起，已有世界著名的天文学家、生物学家、化学家、物理学家，因此，只要环境允许，数学发展顺理成章．早在 1477 年，瑞典已建立乌普萨拉大学，1668 年建立隆德大学，而斯德哥尔摩大学则由 1881 年建成的技术大学改名而来，著名的俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅（Sophia Vasiléevna Kovalevskaya，1850—1891）从 1883 年起在此任教．瑞典王家科学院建于 1739 年，它因每年评定诺贝尔物理学奖、化学奖和经济学奖而在国际上享有盛名．

荷兰在 19 世纪产生过一些著名的物理学家、化学家和生物学家．荷兰于 1808 年在阿姆斯特丹成立科学院，1853 年重组为王家科学院，并出版《院报》（*Verslagen*），它在 19 世纪末是一个大期刊．阿姆斯特丹数学会在 1893 年创刊《数学著作简评》（*Revue Semestrielle des Publications Mathématiques*），这是一份小型文摘期刊．19 世纪最著名的荷兰数学家是斯蒂尔捷斯（Thomas Jan Stieltjes，1856—1894），他从 1885 年起就在法国，后在法国图鲁兹去世，是一位分析大家．考德威赫（Diederck Johannes Korteweg，1848—1941）、德·夫瑞斯（Jan de Vries ，1858—1939）也有较大的影响，以他们的名字命名的浅水波方程在 20 世纪 60 年代得到孤立子解，对非线性科学产生巨大冲击．考德威赫在 1881—1918 年执教于阿姆斯特丹大学，把荷兰的数学提高到现代的水平，他是 20 世纪初著名的拓扑学家，还是直觉主义的首创者布劳威尔（Luitzen Egbertus Jan Brouwer，1881—1966）的老师．从这时起，荷兰数学才在国际上再享盛名．

尼德兰南部历史复杂，先是由哈布斯堡王朝控制，后被法国占领，维也纳会议后划归荷兰，1830 年革命后独立，比利时王国正式诞生，但卢森堡分离出去，由于民族、语言、宗教的不同，国内矛盾不小，但仍维持至今．比利时从建国以来，经济及科技都

很发达,它有在1425年建立的卢汶大学和在1562年成立的杜埃大学.这块领地上出过不少人才,如绘图学家莫卡托(Gerardus Mercator,1512—1594),数学家范·罗门、圣·文森、塔凯(Andreas Tacquet,1612—1660)及斯吕思等.布鲁塞尔科学院于1772年建立,现在是王家科学院.比利时数学家凯特莱(Lambert-Adolphe-Jacques Quetelet,1796—1874)是19世纪最著名的统计学家.菲吕尔(Pierre Francois Verhulst,1804—1849)是人口学家,现在还有以他的名字命名的增长曲线,早在1841年他写出了最早的椭圆函数论专著之一.卡塔兰(Eugène Charles Catalan,1814—1894)写了不少数论著作,其中卡塔兰猜想尤为著名,这个猜想在2002年完全得证.19世纪末比利时最有国际声誉的大数学家是瓦莱-布桑(Charles Jean Gustave Nicolas de la Vallée-Poussin,1866—1962),他在1896年独立证明了素数定理,另外在函数逼近论方面有重大贡献.作为分析大师,他把比利时的数学提高到现代的水平.

20世纪的数学大国美国和日本,在100年前,它们的数学还是微不足道的.由于它们的学生到德国留学,它们的数学在学习先进的基础上才逐步发展起来,不过这已经是20世纪的事了.

第8章　实分析

数学分析是一个内容庞杂的领域，一开始它是指解特殊一类问题的特殊演算方法，如微分法、积分法、无穷级数法、变分法等，它与算术及代数方法的不同在于它涉及无穷.分析无非是无穷的代数或普遍的代数，当时的分析方法也同老的几何方法相对立.18世纪中期，欧拉把分析方法系统化，出现了函数，于是数学分析把函数论包含进来.19世纪，数学分析包括三大领域：实分析、复分析以及微分方程与变分法.实分析以实变量的实函数为中心，研究函数的表示、函数的演算、函数的性质等.在这个过程中发展了一些主要工具和技巧，如无穷表达式、积分变换、展开与逼近等.对于分析基础的问题也进行了充分的理论探讨，这就是分析的算术化.对于函数本身，也由初等函数和作为微分方程解的特殊函数过渡到对一般函数乃至病态函数的研究.这些都预示着19世纪末点集论、点集拓扑、测度与积分论以及泛函分析这些新兴领域的兴起.

1　无穷表达式

从微积分到数学分析的建立，无穷在其中起着关键的作用.希腊人惧怕无穷，而近代数学正是在突破这种禁忌的基础上建

立起来的，它主要表现在把无穷引入数学之中．实际上，无穷是通过两个方面进入数学的：一是在微积分中引进无穷大、无穷小，特别是无穷小量的引进，对于微积分的建立是至关重要的；二是把算术及代数运算无穷化，也就是把原来的有限多次运算推至无穷，通过无穷的操作，更具体地说是无穷的演算，得出无穷的表达式．这种向无穷的跨越不只是形式的推广，它在数学上所起的作用决不可低估．因为只有有了无穷表达式，才能把量还原成数，而且对于数学分析来说，只有有了无穷表达式，才能由具体的、特殊的函数向前跨越一步，得出一般函数的概念及其表达式．这样一来，当然大大扩大了数学的范围，从而得出具有普遍性的结果．

这种向无穷的大规模推进在 17—18 世纪带来了丰硕的成果．但是由于 18 世纪末批判精神的盛行，立刻就提出了这种做法的合法性问题．经历了一个世纪的努力，无穷小最终被外尔斯特拉斯从数学中驱赶出去，但无穷表达式却一直保留下来，不仅保留下来，而且成为包括外尔斯特拉斯在内的分析大家的有效工具，而这经历了一个多世纪的曲折而复杂的过程．

五种代数运算加、减、乘、除、开方形成了四种无穷表达式：

(1)无穷级数；

(2)无穷乘积；

(3)无穷连分数和连分式；

(4)无穷无理式．

这些无穷表达式可以分为算术表达式及代数表达式．算术表达式以数为元素，常常用来表示量(例如 π)或用来做逼近；代数表达式以变元(一个或多个)或其函数为元素，通常用来表示函数或用来做插值、逼近；另外，还有更复杂的无穷函数迭代表达式．

无穷表达式一开始只是形式地使用,到19世纪就产生了一系列问题:

(1)有限代数运算的运算法则对于无穷表达式是否满足?例如对于无穷级数,一般加法交换律并不成立.

(2)收敛与发散及其判据,这是19世纪数学的一个主要课题.

(3)计算无穷表达式,如求和、求积以及其他运算和性质.

(4)函数的无穷表达式以及函数本身的关系,例如函数的无穷展开及渐近展开.

这些问题在19世纪形成一些理论,如无穷级数论、连分式理论等,它们连同一些边缘学科(如函数逼近论等)形成了数学分析的基础.

1.1 无穷级数

无穷级数是最简单的无穷表达式,但是,它的历史却是混乱而零散的.这方面的原因很多,主要是由于把各个层次的问题混在了一起.最早无穷级数涉及哲学和逻辑的悖论,并没有推及一般的无穷级数.其次,无穷级数往往同微积分在一起加以叙述,而这时期无穷级数只是近似计算的工具,当时对于函数及函数表示或函数展开并没有清楚的概念,对于算术的无穷级数和代数的无穷级数在史书上似乎也不加区分.到18世纪,这方面有两大进步,一是求和法的进步,二是函数的形式展开.这时虽然开始意识到收敛与发散问题,但是并没有影响数学的发展.其原因在于,级数始终是计算技术而不是理论.直到19世纪,无穷级数的理论才正式出现.

(1)原始的极限观念.

无论是中国还是希腊,似乎都有原始的极限观念.中国古代的"一尺之棰"问题和芝诺悖论都涉及无穷级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

之和等于1.亚里士多德也认为这种公比小于1的几何级数有和.阿基米德求抛物线的弦截面积实质上是求无穷级数的和,即

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}.$$

但是,希腊人谨慎地避开无穷,他们的证明都是只利用有限,并且是严密的证明.

中世纪的神学家开始议论无穷,其中最杰出的思想家是奥雷姆,他有许多天才的思想,如坐标、第四维、曲率甚至分指数的概念,而最明确的是无穷.他明确指出,几何级数有两种可能性:当公比$\geqslant 1$时,无穷几何级数有无穷和;当公比<1时,则有有限和.在《欧几里得几何问题》(约1350)中,他以严格的方式证明无穷级数的项逐渐减少,但不是按比例的,其和也可以是无穷的,并且以调和级数为例.在另一本书《量及运动的几何理论》(约1350)中,他用几何方法证明

$$2=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{4^4}+\cdots$$

实际上他明确意识到"一块有限曲面可以弄成任意多长,而其面积保持不变",他的这些思想实在太先进了.与他同时期的一位计算专家休塞特(Richard Suiseth 或 Swineshead,14世纪中期)还用文字证明了上述公式.

无穷研究的这个神学阶段实际上对无穷研究推进了一大步,也就是证明无穷多有限量的和不一定是无穷的,即有限量也可分解为无穷个有限量之和.更进一步,$a_n\to 0$只是级数收敛的

必要条件而非充分条件,但这种认识以后仍不断被再发现.

(2)求和问题.

在17—18世纪,数学家打破对无穷的禁忌,逐渐应用无穷级数作为表示数量的工具,同时研究各种无穷级数的求和问题.一开始是求有限序列的和,并试图把它推广到无穷.最早知道的是等差级数及等比级数的求和公式,其次是门格里在1650年出版的《新算术求积法》(*Novae quadraturae arithmeticae*)中考虑图形数的倒数的求积,其中有

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots$$

而且得出了结果.后来,门格里第二次证明了调和级数的发散性,但是他求不出$\sum\frac{1}{k^2}$,$\sum\frac{1}{k^3}$等的和.1673年莱布尼茨去巴黎时,惠更斯由概率论出发,也要求$\sum\frac{1}{n(n+1)}$,莱布尼茨得到了解,并应用于微积分的发明.不过,调和级数一直困扰着他,莱布尼茨在1676年答复牛顿的"前书"时,宣布了他的级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

这是他用变换法于1673年得到的.当时奥尔登堡告诉他了门格里的结果和问题,但是他也算不出$\sum\frac{1}{k^2}$的结果.

伯努利兄弟,特别是雅各布·伯努利,从1689年到1740年发表了一系列关于级数的论文,重新发现门格里的一些结果,特别是调和级数的发散性,但他们只能求出

$$\sum \frac{1}{k^2-1},$$

而不能求出$\sum \frac{1}{k^2}$.对这个难题,雅各布·伯努利得出,对于

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$$

奇数项之和:偶数项之和 = $2^{n-1}:1$,这对 $n\geq 2$ 是对的.

对于这个难题,真正的突破是欧拉,在 1734—1735 年的一篇论文(1740 年出版)中,他最终证明了

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

约翰·伯努利听到这个消息后极为兴奋,他说,“要是我哥哥活着,这将使他最热望的心愿得以满足”.约翰·伯努利后来也给出一个证明,实际上同欧拉的方法一样,即把多项式根与系数的关系推广到幂级数.严格来讲,这种方法不能用,但结果还是正确的.同时欧拉还得到了一些类似的公式.

欧拉取得求和的成功也促使他形式地使用无穷级数,特别是用它形式地表示函数和微分方程的解.18 世纪下半叶到 19 世纪初,一般数学家对此并不介意.显然,他们间或也有收敛与发散的考虑,但是他们并不以为这不合理,因为一般来讲他们只用前几项进行计算,因此整个级数的收敛与发散不在考虑之内.直到 19 世纪初,数学家才认真考虑收敛与发散问题.

(3)无穷级数的收敛与发散.

应该说,在 19 世纪之前,许多数学家都谈论过收敛与发散,但第一个加以严密区别的是高斯.1812 年高斯引进了超几何级数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$,并指出在 $|x|<1$ 时收敛,$|x|>1$ 时发散.不过在实际计算中,他仍然沿袭取有限项做近似的做法.波瓦松也

认识到发散级数的危害，不过实际展开时仍照用不误.

1817年波尔查诺已有级数收敛的正确概念，但他的哲学著作影响不大，一般将这归于柯西.

1821年柯西在他的《分析教程》中，首次给出级数收敛的精确定义，同时给出一般的收敛判据，即对于无穷级数

$$C: a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

令 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则 C 收敛的充分必要条件为：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N, h \geqslant 0$ 时，均有

$$|s_{n+h} - s_n| < \varepsilon$$

成立.在他的影响下，出现了一系列级数的收敛判据：

1826　阿贝尔

1832　拉阿贝(Joseph Ludwig Raabe，1801—1859)

1839　杜阿美尔(Jean-Marie-Constant Duhamel，1797—1872)

1842　德·摩根

1842　贝特朗

1843　邦内(Pierre-Ossian Bonnet，1819—1892)

1845　库默尔

1867　迪尼

1873　杜布瓦-瑞蒙(Paul David Gustav du Bois-Reymond，1831—1889)

1890　普林斯海姆(Alfred Pringsheim，1850—1941)

至19世纪末，已得到最一般的收敛性判据.

19世纪末，无穷级数论又开辟了一个新的研究方向，这就是发散级数的复出.许多数学家已意识到排斥发散级数的代价太大，他们开始更合理地利用发散级数.从1880年起，许多数学家提出各种“求和法”，使发散级数可以有合理的值.从历史顺序

来看,有如下的求和法:

1880 弗罗宾尼乌斯

1882 荷尔德(Otto Ludwig Hölder,1859—1937)(H,r)求和法

1890 切萨洛(C,r)求和法

此后,求和法成为重要的分析工具.

1.2 无穷连分数

连分数的概念来源于欧几里得辗转相除法,而第一个一般的定义来自菲波那奇.实际上,这种连除法可追溯到公元前1600年的古埃及莱茵德纸草书.1572年邦别利提出一个求平方根的方法,完全等价于把它展成无穷连分数,即若求

$$\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r},$$

则

$$A-a^2=(\sqrt{A}+a)(\sqrt{A}-a)=r,$$

因此

$$\sqrt{A}=a+\frac{r}{a+\sqrt{A}}.$$

这样可得到一个递推公式,这就是无穷连分数.不过,邦别利只是把分数照平时的办法一步一步做下去,并没有提到连分数,特别是无穷连分数.因此,无穷连分数的发明者的桂冠落在卡塔尔迪身上,他不仅明确给出一个记号,而且首先得出近似分数的概念.如果用现在的记号来表示

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cdots}}},$$

可记作

$$b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\cdots$$

而把$\frac{p_n}{q_n}$记作第n次近似分数.

对于前面的开方问题,他得出

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{r|}{|2a}+\cdots+\frac{r|}{|2a},$$

并得出

$$\frac{p_{n+m}}{q_{n+m}}=\frac{q_np_m+p_np_{m-1}}{q_nq_m+p_nq_{m-1}}.$$

其后许多人用连分数计算π值.连分数一词来自沃利斯的《无穷算术》,其中谈到布隆克尔用到过由$\frac{4}{\pi}$的无穷乘积分式演变而来的连分数公式

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1|}{|2}+\frac{9|}{|2}+\frac{25|}{|2}+\frac{49|}{|2}+\cdots$$

但是,对于布隆克尔如何从沃利斯公式得到这个公式,却不得而知,因而成为数学家及数学史家研究的题目.1776年,欧拉证明布隆克尔连分数的倒数

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1|}{|1}+\frac{1^2|}{|2}+\frac{3^2|}{|2}+\cdots$$

等价于莱布尼茨级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

也就是连分数的逐次近似分数等于级数的部分和.而到1869年,西尔维斯特发现沃利斯的无穷乘积同下面的连分数有关:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2^{-1}}+\frac{1|}{|3^{-1}}+\cdots$$

到18世纪,连分数被用来解不定方程,现在已属于数论的范围.连分式的解析理论,有一部分也属于数论的范围,特别是丢番图逼近论和无理数及超越数理论.它们的方法可以是纯分析的,而主要部分则是把函数展成无穷连分式以及用连分式逼近,这一领域现在十分活跃,但一般数学史却轻易不谈.

欧拉对连分数理论做出了奠基性的贡献.早在1737年,他就证明连分数理论的一些基本结果:任一有理数均可展开成有穷连分数,而无理数则不能.周期无穷连分数必定是整系数二次方程的根.其逆定理直到1768年才为拉格朗日所证明.

欧拉还给出e的一些无穷连分数展开式

$$e = 2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \cdots$$

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \cdots$$

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \cdots$$

其中第一式在1714年也由科兹给出.

欧拉关于解析连分式论的重要工作是研究无穷级数与无穷连分数的相互变换式(1748).如果

$$C = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

其中

$$C_n = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

被称为第 n 次近似分数,则

$$C = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1\cdots a_n}{B_{n-1}B_n}.$$

反之,无穷级数可以变成无穷连分数,其近似分数为级数的部分和,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n=\frac{C_1|}{|1}+\frac{C_2|}{|C_1-C_2}+\cdots+\frac{C_{n-2}C_n|}{|C_{n-1}-C_n}+\cdots$$

正是这样,欧拉把连分式变成他的又一个有力的分析工具,他多次利用这个工具计算定积分和解微分方程,如黎卡提方程.

兰伯特在1761年(1768年发表)首先用无穷代数连分式展开函数.虽然欧拉早已有这种想法,但他没有明显写出来,也许他认为展开成无穷级数后这已不成问题.兰伯特得到

$$\tan x=\frac{1|}{|1/x}-\frac{1|}{|3/x}-\frac{1|}{|5/x}-\frac{1|}{|7/x}-\cdots$$

和

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1|}{|2/x}+\frac{1|}{|6/x}+\frac{1|}{|10/x}+\frac{1|}{|14/x}+\cdots$$

不过正如无穷级数一样,18世纪数学家对于收敛与发散不太在意.因此,直到19世纪中期,在无穷级数的收敛与发散理论已经相当成熟时,才有人开始研究无穷连分数的相应问题.德国数学家塞德尔(Philipp Ludwig von Seidel,1821—1896)在1846年,斯特恩(Moritz Abrabam Stern,1807—1894)在1848年首先给出正项无穷连分数

$$C=a_0+\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\cdots\quad(a_i>0)$$

收敛的充分且必要条件是无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

发散;而

$$C=b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\cdots\quad(a_i,b_i>0)\qquad①$$

收敛的充分且必要条件是

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2i-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2i}} b_{2i}$$

或

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2i}}{a_1 a_3 \cdots a_{2i+1}} b_{2i+1}$$

发散. 斯特恩在 1860 年, 史托尔茨(Otto Stolz, 1842—1905)在 1886 年证明, 如果级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$$

收敛, 则无穷连分数①发散. 塞德尔在 1855 年还指出, 形如

$$-\frac{1|}{|q_1} - \frac{1|}{|q_2} - \cdots \quad (q_n < 2, \lim_{n \to \infty} q_n = 2)$$

的无穷连分式中, 有些收敛, 有些发散. 1883 年丹麦数学家欧普曼(Ludwig Henrik Ferdinand Opperman, 1817—1883)证明,

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots$$

收敛的充分且必要条件是无穷乘积

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i)$$

发散. 史托尔茨在 1886 年给出

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots \quad (b_i > 0)$$

收敛的充分条件是

$$b_1 b_2 + b_2 b_3 + \cdots$$

发散; 撒尔舒茨(Louis Saalschütz, 1835—1913)给出的另一个充分条件是

$$\sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{b_2 b_3} + \cdots$$

发散. 而这两个条件都不是必要条件. 到 19 世纪和 20 世纪之交, 普林斯海姆对无穷连分式的收敛及发散的定义进一步精密

化,并给出了一般的判据.

2　函数及其表示

2.1　函数观念的发展

函数观念的引进经历了漫长的岁月,大致可由下面五个里程碑划分为五个阶段:

(1)函数概念的提出,这是 17 世纪末由莱布尼茨和约翰·伯努利提出来的.

(2)欧拉的可表示、可计算函数的概念(1748).

(3)狄利克雷的数值对应的函数观念(1837).

(4)戴德金的集合映射的观念(1888).

(5)布尔巴基的两集合的函数关系(1939).

一般认为,"函数(functio)"这个词首先见于莱布尼茨 1673 年的手稿中,手稿的标题是《逆切线法或用函数法》(*Methodus tangentium inversa seu de functionibus*),其后在 1679 年的一篇手稿中,他区别开代数曲线(他称之为解析曲线)及超越曲线. 在 1684 年和 1686 年发表的论文中,他把能用有限次方程表示的曲线称为代数曲线,而用无限次方程表示的曲线称为超越曲线. 1692 年和 1694 年在他出版的著作中首先出现这个词,不过概念也相当模糊. 这期间,他在同约翰·伯努利的通信中多次谈到函数的概念及表示符号(莱布尼茨称之为文字(characteristic)). 约翰·伯努利在 1694 年 9 月 2 日给他的信中曾把积分

$$\int n dz$$

展成无穷级数

$$nz-\frac{z^2}{2!}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}+\frac{z^3}{3!}\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}z^2}-\cdots$$

(这个公式莱布尼茨也知道),他补充说,“我把 n 理解为一个量,这个量由不定量和常量以某种方式构成”.而真正现在意义下的函数的语汇及内容应该说是由约翰·伯努利在 1718 年正式发表的.他的定义是:“一个变量的函数这里定义为由这个变量和一些常量以任何方式构成的量.”值得注意的是,这个定义中同时出现变量、函数(也是量)以及函数相依性观念.这个三位一体的东西直到 17 世纪末 18 世纪初才最终确定下来,无疑它的表示也给许多人带来困惑.在这之前,函数观念可追溯到古希腊甚至更早.从古代到中世纪到 17 世纪,函数的表现形式是普通文字陈述、运动学的表述、数列对应以及造表(主要是三角函数表和对数表)、曲线图象和解析表达式等.17 世纪许多数学家都是这样把函数观念通过这些隐含的渠道引进数学之中的,例如笛卡尔和费尔马是用几何表示曲线的概念来表示函数的,他们的解析公式是辅助性的东西,他们也都具有自然规律性的观念,而且隐隐约约有利用函数观念反映这种规律性的想法.在这方面,牛顿更进一步.在牛顿早期的著作(1665—1666)中,他已经把函数考虑为纯解析表示,而与任何几何图象不相干.不过,他后来的著作中仍免不了几何的表示或运动学的表示.在 1676 年 10 月 24 日给莱布尼茨的信中,他用纵坐标(ordinate)这个词来表示自变量的显式,而这明显是函数的观念.

从牛顿到约翰·伯努利,函数的观念都没能从几何及力学的外衣下摆脱出来,而且免不了模模糊糊.数学上真正明确的函数定义是欧拉在 1748 年出版的《无穷分析引论》中给出的,他的定

义几乎和约翰·伯努利的一样,只是把最后一个“量”字换成“解析表达式”(还有把“常量”变成“数或常量”).他的“解析表达式”表示是与代数运算或超越运算联系的由符号表示的量或数的表示式.代数运算包括加、减、乘、除、乘方、开方,还可加上代数方程求解.超越运算包括指数运算、对数运算以及“积分法大量提供的运算”,由此他把函数划分为代数函数和超越函数,明确后者可以展开成无穷级数,他认为这没有什么困难.这一下子使得函数概念变得明确,并从几何及力学中解放出来,从而开辟了数学分析的新时代.

欧拉的函数概念对后世有着极大的影响.他把函数分为两类,一类是连续函数,实际上是可用幂级数表示的解析函数;另一类是不连续函数.欧拉认为,不连续函数或曲线实际上由连续部分构成,因此,他也称之为混合或非正则函数或曲线(实际上在孤立点不可微),有时他也称之为机械曲线.但后来,他又把不连续函数类扩张到包括现在的不连续函数.

欧拉去世后,他对函数分类的观点遭到批判,主要是认为他对连续函数及混合函数的区分不合理,也就是可以举出函数,在不同区间有不同表示的函数可以用同一等式表示.第一个这种函数是法国人夏理在 1780 年给出的,后来柯西在 1844 年发表的论文中给出了最简单的例子,即

$$y=\begin{cases}x, x\geqslant 0;\\ -x, x<0.\end{cases}$$

这是不连续的,但如果用一个方程 $y=\sqrt{x^2}$(对整个 $-\infty<x<\infty$)表示,就是连续的.实际上从这时起,更严格的分析已经酝酿成熟了.

更为合理的函数定义是法国数学家孔多塞(Marie Jean

Antoine Caritat de Condorcet,1743—1794)在 1778—1782 年呈送给巴黎科学院的论文中给出的,他区分了三种函数:①有显式的函数;②隐函数;③由某些条件定义的函数(例如由微分方程).而且他对任何函数形式都导出泰勒级数.不过这个方法已由拉格朗日在 1774 年发表过.孔多塞的论文没有正式出版,但是校样在巴黎流传时,当时巴黎的数学家都读过.拉克鲁瓦在他的影响甚大的《微积分论》(1797)中传播了这个新定义.不过大量书籍及论文中用的还是欧拉的老定义,例如 1797 年拉格朗日的《解析函数论》(1813 年修订再版),甚至柯西 1821 年出版的《代数分析》也不例外.最先把函数推向更一般的对应关系而摆脱掉定义公式的是傅立叶.他在 1822 年出版的《热的解析理论》中说:"一般来讲,函数表示一系列的值,其中每一个值是任意的."这个定义太简短了,以致可以有不同的理解.不过在这部著作的影响下,很快使函数研究开展起来.其后罗巴切夫斯基在 1834 年研究三角级数时,提出了类似的更详细的定义,不过他要求逐步变化,实际上也就是要求连续性.真正确切的一般函数定义是狄利克雷给出的.他指出函数一般是连续的,但也可以是没有规则的,他还最先引进著名的狄利克雷函数,即

$$f(x)=\begin{cases}0,\text{当 } x \text{ 取有理值};\\1,\text{当 } x \text{ 取无理值}.\end{cases}$$

这是一种不连续函数,这种函数对 19 世纪的数学分析已经是足够一般的了,而进一步的推广是 19 世纪末戴德金、G·康托尔、保莱尔、拜尔、勒贝格等人建立在点集论基础上的更一般的函数论.

狄利克雷的函数定义在两个重要方面改进了欧拉的定义,一是他明确指出函数不一定非得具有解析表达式;二是他把不

连续函数纳入函数的范围，这两方面对后来分析的影响都是巨大的.但他的定义仍局限于实变量的实函数，以后才推广为复变量的复函数.对于定义域及值域的推广来自G·康托尔和戴德金.G·康托尔把函数看成对(a, b)的集合，其中$a \in A, b \in B$，A和B均是集合，这个定义当然很一般，但函数本身却消失了.戴德金在1888年出版的《数是什么，数应该是什么》中，把函数作为集合间的映射来定义，而映射是一种对应规则，在这个规则φ之下，集合(他称之为系统)S中的元素s对应于确定的对象$\varphi(s)$，但他对值域没有任何刻画.更明确的函数定义是布尔巴基在1939年出版的《集合论》中给出的："设E及F为两集合，它们可以相同也可以不同，E中一个变元x和F中一个变元y之间的一个关系称为一个函数关系，如果对于每个$x \in E$，在所考虑的与x的关系之下，都存在惟一$y \in F$.在这关系之下，对每一$x \in E$对应$y \in F$的操作称为函数."这是现在抽象数学中，大家所接受的函数定义，其中有取集值、算子值、矩阵值等等更复杂的情况，但是对于数学分析来讲，值域取为实数域或复数域就可以了.函数概念的明确定义及推广是数学发展的重大事件，18世纪以来，数学分析的主要进展都是围绕函数进行的.

对于函数的早期研究主要是它的表示及演算，后来对于其可积性、连续性、可微性及解析性等都有深入的研究.19世纪的主要力量集中于作为微分方程解的特殊函数，19世纪末开始转向研究越来越一般的函数类，而对函数空间的研究则构成20世纪泛函分析的主题.

2.2 幂级数

(1)初等函数的展开式.

作为多项式的推广,幂级数是第一个表示函数的工具,也是进行数值计算的手段.在 17 世纪中叶之前,人们知道的幂级数只有几何级数.据科学史研究,印度人在 15 世纪已知 $\arctan x$, $\sin x$, $\cos x$ 的展开式.但是近代数学中,关于级数的研究首先来自牛顿,他在 1665 年初发现一般的二项式定理,即指数 m 不限于正整数时,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3}x^3 + \cdots$$

然后通过逐项积分可得出当时知道的初等函数的展开式.但是第一个发表具体的幂级数结果的是莫卡托,他在 1668 年得出

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

由于牛顿没有及时发表而丧失了优先权,这促使他写成《论级数及流数方法》(1736)和《无穷多次方程的分析》,后者于 1669 年在少数人中间流传,其中有 $\arctan x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, e^x 的展开式.格利高里得知牛顿的结果之后,他说他自己还得出

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{12}x^5 + \cdots$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$$

但没有透露方法.牛顿在《论级数及流数方法》中还引进无穷级数反演的方法来得出反函数的展开式,但这个系统方法直到 1736 年才发表.莱布尼茨直到 1673 年才得出 $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$ 的展开式.但是他们的方法都有局限性.这是由于当时函数的概念并不清楚,无穷表达式只是为了计算对数表及三角"函数"表.向函数迈进的主要一步是欧拉对于对数及指数关系的研究.他在 1728 年得出自然对数底 e 及指数函数 e^z 的展开式

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

而到 1748 年,他正式定义三角函数,给出幂级数展开式,并由此推出其性质. 1770 年,兰伯特系统地引入了双曲函数.

(2)泰勒展开和余项公式.

为了得出一般函数的展开式,泰勒在 1715 年出版了《增量的直接和逆方法》(*Methodus incrementorum directa et inversa*),推导出他在 1712 年宣布的泰勒定理

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + \cdots$$

他的定理的出发点是牛顿和格利高里在 1670 年左右独立得到的牛顿—格利高里插值公式:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{b}\Delta f(a) + \frac{\frac{h}{b}\left(\frac{h}{b}-1\right)}{2}\Delta^2 f(a) + \cdots$$

其中 $f(x)$在 $a, a+b, a+2b, \cdots, a+nb$ 上的值已知,且

$$\begin{aligned}\Delta f(a) &= f(a+b) - f(a),\\ \Delta^2 f(a) &= \Delta f(a+b) - \Delta f(a)\\ &= f(a+2b) - 2f(a+b) + f(a),\\ &\cdots\end{aligned}$$

1742 年苏格兰数学家麦克劳林得出泰勒定理在 $a=0$ 时的特殊情形,实际上斯特灵早在 1717 年及 1730 年已得出同样的结果. 在 18 世纪,数学家形式地运用级数并结合微积分得出了许多数学、力学、物理学、天文学的结果,他们既不管收敛及发散,也不管余项如何. 拉格朗日在 1813 年给出带余项的泰勒定理

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + R_n,$$

$$R_n = f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

不过,他并未考虑收敛性问题.而拉格朗日中值定理,即

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),a<c<b,$$

这是他在1797年给出的,并用来推导一般情形.直到柯西才认真考虑级数的收敛问题.1829年,柯西在《微分法》中,给出另外的中值定理及余项公式,他的余项公式是

$$R_{n+1}=f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^n(1-\theta)}{n!}.$$

他的中值公式是,如果

$$B<\frac{F(b)-F(a)}{f(b)-f(a)}<A,$$

其中A,B为$\frac{F'(x)}{f'(x)}$的极值,则

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{f(x+h)-f(x)}=\frac{F'(x+\theta h)}{f'(x+\theta h)}.$$

其后,1858年德国数学家史洛米尔希(Oskar Xavier Schlömilch,1823—1901)得出了更一般的余项公式

$$R_{n+1}=f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!},$$

它以拉格朗日余项公式($p=n$)及柯西余项公式($p=1$)为其特殊情形.

(3)代数分析.

在欧拉时代,幂级数的功能已远远超出函数的表示和近似计算了,这时函数的微积分已经建立在幂级数的基础上.牛顿和莱布尼茨的微积分所处理的“函数”,没有超出代数函数的范围,包括有理函数及带根号的无理式,而所考虑的超越函数只有对数.到1740年左右,欧拉利用函数观念及幂级数表示才真正定

义了指数函数及三角函数.牛顿在1669年给出的 $\sin x$ 展开式是利用复杂的级数反演才得到的,而且不能马上得出 $\cos x$ 展开式.而欧拉则通过指数函数及三角函数的关系非常漂亮地一下子得出来,并通过幂级数表示扩大了函数的定义域,得出了角和、角差的三角公式以及三角函数的周期性质,使三角术的内容一下子提高了一大步.利用幂级数,就可把微积分推广到超越函数上,而且可以通过逐项微分和积分来计算"任意"超越函数的导数及原函数,从而得出其微分及积分.不过在欧拉和拉格朗日时代,很少有人考虑这样做是否合理,他们连收敛、发散都很少考虑,更不用说一致收敛的概念了.

(4)一致收敛.

柯西在1821年的《分析教程》中,对一个错误的论断给出一个"证明",处处收敛的连续函数级数的和也是连续函数.阿贝尔在1826年注意到"这个定理似乎有例外",他举出反例

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin mx}{m},$$

这个级数和在 $x=(2k+1)\pi$ 点处不连续.早些时候,阿贝尔对幂级数证明了重要定理:如果幂级数在 $x=a$ 处收敛,则它在 $|x|<|a|$ 处也收敛.外尔斯特拉斯在1841年研究过柯西的论文,并在1841年和1842年发表两篇论文,其中讨论了一致收敛幂级数的收敛性质,但他的论文直到1894年才发表,不过他的思想通过他的讲课而得到广泛传播.他给出的定义是在一个区间之内一致收敛,也就是大范围的定义:级数 $\sum U_n(x)$ 称为在区间 $[a,b]$ 上一致收敛,如果对任意小的 $\varepsilon>0$,存在一个 $n_0(\varepsilon)$,使得对 $n>n_0$ 以及所有 $x,a\leqslant x\leqslant b$,有

$$|r_n(x)|<\varepsilon.$$

现在这个定义已经是经典的了.其间塞德尔和斯托克斯被认为在1847—1848年间独立提出了一致收敛性的概念,但塞德尔的定义却是局部的,也就是只在一点的预先确定的小邻域.显然由外尔斯特拉斯的一致收敛可推出塞德尔的在区间上每点都局部一致收敛,但反过来也对,不过证明不容易,直到1880年才首先给出证明,证明中应用了所谓的海涅(Heinrich Eduard Heine, 1821—1881)—保莱尔定理.斯托克斯引进的一致收敛也是局部的,但与塞德尔的不同,现称拟一致收敛.级数$\sum U_n(x)$在区间$[a,b]$上一点S的邻域拟一致收敛,如果存在$\delta(S)>0$,使得对任意小的$\varepsilon>0$,任意$N, n_0(S,\delta,\varepsilon,N)>N, S-\delta(S)\leqslant x\leqslant S+\delta(S)$,有

$$|r_n(x)|<\varepsilon.$$

同样也可以对拟一致收敛在整个区间及在一点进行定义.其实他们只是认识到这是收敛连续函数的和是连续函数的条件.事实上,迪尼在1878年才证明级数$\sum U_n(x)$在S收敛是其和U在S连续的充分且必要条件.柯西本人也于1853年认识到这点,不过他没有提到其他人的名字,只是对自己以前不确切的结论加以补充.不过,当时他们都没有认识到级数逐项积分也需要一致收敛性.首先提到一致收敛与函数级数逐项微分及逐项积分的关系的是托梅(Ludwig Wilhelm Thomé, 1841—1910)在1866年的论文中给出的.1870年,海涅、G·康托尔明确定义一致收敛概念并应用到一般函数级数上.至此,关于幂级数的一致收敛、求和、逐项微分及逐项积分等方面得以定型并扩充到复变函数上,形成函数论的新方向.

2.3 三角级数

(1)前史.

把函数表示成幂级数当然是最自然不过的事.但是,能用幂级数表示的函数并不多,因为要想用幂级数表示,起码这函数得无穷次连续可微,而且即使无穷次可微也不一定就行.这样,要想用无穷级数表示一般的连续函数,就得另觅他途.我们所熟悉的比多项式稍复杂的函数就是三角函数.三角函数图象清楚,有表可查,当然是最有力的候补者.但是,一个任意的(连续)函数能否被三角级数表示,在历史上还是有一番争论的.这个争论的一方是丹尼尔·伯努利,他早在 1732 年就从物理上说明振动弦有较高的振动模式,并在后来的论文中说明振动弦的许多模式能够同时存在,他进而认为所有可能的振动初始曲线都可表成

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

因为有足够的常数 a_n,使级数适合任一曲线.他对此并没有给出数学上的证明.克莱洛在 1757 年的论文中支持了这一观点.与他们相对立,欧拉和达兰贝尔从不同的角度反对这种观点.欧拉在 1753 年的一篇论文中说,正弦函数总是一个奇周期函数,但是任意的函数肯定不可能被如此表示.达兰贝尔在 1757 年出版的《百科全书》第 7 卷中甚至不相信所有奇周期函数也能表为如上的三角级数,因为这种级数是二次可微的,而任意奇周期函数未必如此.这一争论持续了二三十年.1759 年拉格朗日参加了争论,他用自己的计算支持欧拉,而且后来也一直坚持任意函数不一定能展成三角级数.1779 年拉普拉斯也加入争论,他支持达兰贝尔.他们在函数的三角级数表示问题上都未能得出数

学上正确的结论.这个问题直到傅立叶才彻底解决.但是,18世纪的大数学家都得出过特殊函数的三角级数展开式以及系数表达式.例如,欧拉在1777年就从三角函数的正交性得到三角级数的系数,即从

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}$$

得出

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(s)\cos\frac{k\pi s}{l}\mathrm{d}s,$$

此即傅立叶级数系数表达式,但是整个三角级数理论应该归功于傅立叶一人的创造.

(2)傅立叶.

傅立叶,1768年3月21日生于法国奥瑞尔省一个裁缝的家庭,8岁时父母双亡,被当地大主教送入市内军事学校,在学校中他对数学产生了极大兴趣,并显示出天才.为了攻读数学,他收集学校的蜡烛头以供晚上自修.他原来打算当军官,加入炮兵或工程兵部队,但由于出身微贱而被拒绝.教士们把他送到圣奔诺伊的本尼迪克派教会中学,以便把他培养成教士.1789年法国大革命改变了他的命运,他回到军事学校任数学教授,这是他走向数学事业的第一步.1789年12月,他呈送给法国科学院一篇关于方程的数值解的论文,发展了拉格朗日的工作.从法国大革命开始,他就同情革命,但是恐怖时代的做法也使他痛心.由于教师缺乏,1794年巴黎高等师范学校成立后请他任教,但几个月后停办了.1795年巴黎综合工科学校建立,他被任命为助理讲师,协助拉格朗日和蒙日上课.可是,他又被错划为罗伯斯庇尔的支持者而再度被捕,后来在学校同事的营救下获释.1798

年,他参加了拿破仑的埃及远征. 1801 年 8 月底撤离并回到法国后,重返巴黎综合工科学校. 可是,拿破仑看到他有行政的天才,就于 1802 年 2 月任命傅立叶为法国东南部伊泽尔省省长. 他的职责包括收税、监督征兵、执行法律等. 他积极努力消除从 1789 年大革命时期以来遗留下来的恶感. 他监督把 8 万平方千米沼泽地的水排干,并建造从伊泽尔省首府格勒诺布尔到意大利都灵的道路中的法国段. 傅立叶在格勒诺布尔时,完成了大部分关于热传导的数学问题的研究工作,那时已经称帝的拿破仑在 1808 年封他为男爵. 但是当拿破仑于 1814 年下台并被放逐到意大利海岸旁的小岛厄尔巴岛时,傅立叶的处境变得相当困窘. 格勒诺布尔正处于拿破仑经过的路途上. 傅立叶懂得,要是向这个旧主子致意,那就会使他在新国王的统治下处境危险,路易十八对过去皇帝的老同事、老部下不会好眼相看. 于是,傅立叶利用自己的政治权力把拿破仑经过的道路加以改换,从而保住了自己的职务. 1815 年拿破仑回到法国,企图夺回他以前的帝国. 这一次,拿破仑路过格勒诺布尔,可是傅立叶便离开这座城市而避免见到他. 三天之后,拿破仑封傅立叶为伯爵,并任命他为罗纳省省长. 这一次拿破仑的统治只延续了 110 天,傅立叶在地方的政治生涯从此也结束了. 于是,他移居巴黎,集中精力研究科学.

1816 年,傅立叶被法国科学院选为院士,但复辟的波旁王朝国王路易十八因为他是拿破仑的省长而拒绝批准. 1817 年他再度当选后才获得批准,1822 年成为法国科学院终身秘书,1827 年被选为法兰西学士院院士. 他帮助过许多年轻人,其中包括狄利克雷、阿贝尔、斯图姆、奥斯特等. 遗憾的是,他把伽罗华的第二篇论文丢掉了,但是这并非像伽罗华所想的那样是出于故意.

他于 1830 年 5 月 16 日在巴黎去世.

傅立叶最重要的成就当然是热传导理论及傅立叶级数,除此之外,他在方程论方面也有些贡献.他 16 岁就给笛卡尔符号规则一个新证明,这个证明后来成为教科书的标准证明.他还推广笛卡尔符号法则,最后这个定理在 1829 年由斯图姆发展成斯图姆定理.他的结果收集在《确定方程的分析》一书中,但他只完成其中前两章,其余由纳维尔编辑,于 1831 年出版.

傅立叶除了计算方程根的近似方法之外,还推广丹尼尔·伯努利的法则.他对线性不等式的解法及应用表明,他是线性规划理论的先驱之一.

现在傅立叶虽主要以数学家知名,但他更自认为是一位科学家,更具体来讲是物理学家,而且不仅是理论物理学家,还是实验物理学家.他在 1807 年发表他的论文之前,先做了两年热传导的实验,这些实验不仅有重复以前别人做过的,还有自己独创的.虽然他的实验没有像法拉第和安培那样导致新发现、新理论,但他有意用实验检验自己的理论.从这个意义上来讲,他做到了数学物理、理论物理和实验物理的三结合.他对数学的观点到现在仍是理论数学家及应用数学家争论的焦点:数学的主要目的是公众的需要和对自然现象的解释,数学家不应该把时间浪费在无用的研究上.

1807 年 12 月 21 日傅立叶向巴黎科学院递交了一篇关于热传导的主要论文(*Mémoire sur la propagation de la chaleur*),这篇论文经拉格朗日、拉普拉斯、勒让德等审查后没有被接受.傅立叶在论文中,坚持认为任意函数可以展成三角函数的级数,这与拉格朗日的观点大相径庭.拉格朗日怀疑这种展开的可能性,因为拉格朗日认为函数是由其在任意小区间上的值所决定的,而这

实际上只对解析函数才正确.过去欧拉也认为任意函数不可能展开成三角级数.所以,拉格朗日批评傅立叶的论文缺乏严密性而不同意发表.1808年,傅立叶曾去巴黎访问,听取批评,并对拉普拉斯和拉格朗日的意见(热传导方程的推导以及展成三角级数的合法性)作出答复.但是,科学院为了鼓励傅立叶关于热传导的研究,于1810年以热传导为题作为竞争科学院1812年大奖的题目.傅立叶对自己1807年的论文加以修改,把题为《固体中的热运动理论》(*Théorie du mouvement de la chaleur daus les corps solides*)的论文于1811年送交评奖委员会.1812年1月,他获得了奖金,但仍受到批评,因"作者得出他的方程的方法并没有消除困难,而且他对求该方程的积分的分析在一般性及严密性方面还有不足之处"而没能马上发表,直到他成为科学院终身秘书之后,才把它们印出来(1819—1820,1824年出版;1821—1822,1826年出版).他对热传导问题继续进行研究,于1822年出版《热的解析理论》(*Théorie analytique de la chaleur*),其中把1811年论文的第一部分原封不动地编进去.

他在书中首先提出求解热传导方程的特殊情形,即一根均匀的、各向同性的杆中,温度 T 的分布随时间 t 和地点 x 如何变化.他第一次根据物理定律得出偏微分方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial T}{\partial t},$$

这是第一个不是从牛顿的《自然哲学的数学原理》中得出的方程,他同牛顿一样,直接从对自然规律的探求中得到数学方程.为了使解有物理意义,他还给出边条件和初始条件.边条件表示在传导杆两端的温度都保持恒定,而初始条件表示开始时,杆上各点的温度是如何不均匀地分布的,而这个方程则反映温度的

分布随时间的变化而趋于平衡的过程.牛顿发明了数学工具微积分去解决他的问题,傅立叶也发明了自己的数学工具来解决自己的问题,这就是傅立叶分析.他想像杆上热的地方相当于正弦曲线的波峰,冷的地方相当于正弦曲线的波谷,由于温度分布不完全像正弦曲线那样均匀,实际上每点都是多个正弦曲线叠加的结果,而且每条正弦曲线随着时间的推移振幅逐步减少,这就使他产生把解析函数展成三角级数的想法,即

$$f(x)=\sum_{r=1}^{\infty}b_r\sin rx, 0<x<\pi,$$

而最困难的问题在于决定傅立叶系数 b_r.他采用以前通用的幂级数展开法,用不严格的论证经过繁琐的求解,勉强得出正确的公式

$$b_r=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(s)\sin rs\,\mathrm{d}s.$$

其实克莱洛和欧拉已经把某些函数展开为傅立叶级数,并得到系数的积分公式,而且欧拉得到系数的方法更为简单.但是,傅立叶断言,每个函数都可表为三角级数,甚至函数不一定连续,具有间断点也行.而且他还认为,不管 $f(x)$是否有解析表达式,是否服从什么法则,它的级数总是收敛的.这些他都没有给出证明,他认为由几何图形的直观就可以看出这是真的.尽管如此,傅立叶级数的出现对物理学及数学都是极大的促进.英国物理学家汤姆逊在 1867 年写道:"傅立叶定理不仅是近代分析最漂亮的结果之一,而且可以说,它为讨论近代物理学中几乎每一个深奥难解的问题提供了一个不可缺少的工具."这正符合傅立叶的思想:"对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉."

傅立叶级数立即得到许多应用,特别是法国数学家波瓦松利用三角级数解决许多热传导问题,他的许多工作总结在 1835

年出版的《热的数学理论》(*Théorie mathématique de la chaleur*)一书中.而且傅立叶本人在研究半无界杆的热传导问题中得出傅立叶积分的概念.

(3)傅立叶级数理论.

数学家更关心的是对傅立叶级数理论打下严密的基础.傅立叶的论文所涉及的概念远远超出当时通常使用的(往往也没有得到严密处理的)理论,例如他已考虑不连续函数,甚至后来的 δ 函数的积分问题.它涉及定积分问题,而在以前积分只不过是反导数,在当时收敛还没有严密定义时,他已谈到函数级数的收敛问题.这样一来,傅立叶级数在函数概念、积分概念、三角级数的展开及收敛性等方面都大大扩展了以前的分析领域,最后推动集合论、测度论和积分论乃至泛函分析的发展.

为傅立叶级数论奠定严格数学基础的是狄利克雷.1822—1825年狄利克雷在巴黎学习,曾会见傅立叶,深受傅立叶的影响,对傅立叶级数产生兴趣.他在1829年发表的一篇重要论文《论三角级数的收敛性》中,第一次给出了表示给定的函数 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛而且收敛到 $f(x)$ 本身的充分条件.这组所谓狄利克雷条件是:

①$f(x)$ 是单值、有界的;

②$f(x)$ 是分段连续的;

③$f(x)$ 是分段单调的.

这为傅立叶级数的存在性打下了基础.现在函数 $f(x)$ 的傅立叶级数表示的标准写法是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x.$$

不过狄利克雷条件并不是充分必要条件.于是,狄利克雷的学生黎曼致力于研究这个问题,为此,他考虑更一般的函数以及它们的可积性问题.黎曼在1853年为取得讲师资格而写的论文《关于用三角级数表示函数的可能性》中,给出更一般的积分概念——黎曼积分,这样他把积分概念扩大到更大的函数类中.他进而证明:如果$f(x)$在$[0,\pi]$上有界且可积,则当n趋于∞时,其傅立叶系数a_n,b_n趋向于0.黎曼还指出,有界可积函数f的傅立叶级数在一点处的收敛性仅依赖于$f(x)$在该点邻域中的性质,这就是所谓局部性原理.黎曼利用辅助函数证明了三个重要定理,前两个给出三角级数表示存在的充分必要条件,第三个给出三角级数在一个特殊点收敛的充分必要条件.黎曼的论文在1867年才发表,不过在此之前的所有考虑都还有一些缺陷:

①级数收敛最多只考虑条件收敛而没有考虑一致收敛,这样问题就只涉及函数在一点处的值而非一个区间上的问题,这一点由海涅在1870年首先指出.

②虽然已考虑不连续函数,但还没办法考虑有无穷个不连续点或无穷次振荡的函数.这一点由汉克尔(Hermann Hankel,1839—1873)在1870年首次考虑.

③一般的惟一性问题首先由海涅在1870年提出.他证明,如果一个函数$f(x)$除有限多点之外连续,且表示它的三角级数一致收敛,则表示惟一.他鼓励G·康托尔研究更一般的情形,这导致G·康托尔创立点集论乃至一般集合论.

三角级数的研究从19世纪起至今仍相当活跃,对整个数学的发展产生巨大影响.三角级数作为连续函数的表示所遗留下的一些基本问题,直到20世纪才解决.其中一个基本问题是连续函数的傅立叶级数是否一定处处收敛.很长时期,大家认为这不成问题,到1873年杜布瓦-瑞蒙首先给出一个反例,一个连续函数的傅立叶级数在某一点上不收敛.后来,又发现有的连续函数,其傅立叶级数在无穷多点,甚至所有有理点上发散.1913年鲁金猜想在$[-\pi,\pi]$上平方可积的函数的傅立叶级数在$[-\pi,\pi]$上几乎处处收敛,但1923年柯尔莫哥洛夫却举出一个可积函数,其傅立叶级数几乎处处发散.直到1966年,鲁金猜想才由瑞典数学家卡尔松(Lennard Carleson,1928—　)用极为精巧的方法证明出来.这时积分的概念也有所发展,由黎曼积分过渡到勒贝格积分.

3　数学分析的严密化

3.1　柯西

柯西,1789年8月21日生于巴黎.当时,法国大革命已经开始.他的家庭属中产阶级,在雅克宾党专政时期,他家逃亡到小镇阿居埃,同一些著名的科学家为邻.因此,柯西在小时候就见过当时的一些大数学家.拉格朗日曾预见到柯西的天才,告诫他的父亲不要让柯西看到数学书,以使他集中精力学好古典语文.柯西最初的启蒙老师是他的父亲,后来又到著名的学校攻读.1805年,柯西进入巴黎综合工科学校,这时他开始接触到数学.1807年,他进入道路桥梁工程学校,两年后成为一名工程师.

1810 年到瑟堡任工程师助理，参加港口的建设.他在这个阶段的工作中，一直带着出版不久的拉普拉斯的《天体力学》和拉格朗日的《解析函数论》勤奋攻读，并于 1811 年开始他的数学研究工作.1812 年底，柯西回到巴黎，1813 年 3 月任乌尔克运河工程师，1814—1815 年由于拿破仑失败，这项工程停顿，他开始专门研究数学，并担任巴黎综合工科学校的教师.1815 年波旁王朝复辟，同年 12 月，柯西成为巴黎综合工科学校代课教授，第二年升任分析及力学正教授.这时，由于拥护拿破仑的蒙日等人被驱逐出科学院，使得柯西不经选举就被任命为力学学部院士.柯西是虔诚的天主教徒，波旁王朝的忠实支持者，在波旁王朝复辟时期，他飞黄腾达，在科学上也取得了非常卓越的成就.这个时期，他还成为巴黎大学理学院的教授和法兰西学院的教授.1830 年 7 月，波旁王朝国王查理十世被路易·菲利浦所推翻.由于路易·菲利浦是波旁家族的旁支，代表大资产阶级的利益，所以，柯西拒绝宣誓效忠新国王，从而失掉了教授的职位.不仅如此，柯西还离开家庭，追随王族流亡到国外.他首先到达瑞士弗瑞堡，被推荐给撒丁国王，国王为他提供了都灵大学的一个教授职位，柯西接受了，1831 年夏柯西移居都灵，主要从事教学工作.1833 年，定居在布拉格的查理十世把柯西召到布拉格，做其孙波尔多公爵的家庭教师，柯西接受了这个职务，这位前国王封柯西为男爵.1834 年，柯西的夫人到布拉格和他团聚，柯西在布拉格一直呆到 1838 年.这段流亡生活使得他的研究工作的速度放慢了一些，但 1838 年回到巴黎之后，他重新参加科学院的活动，出席每星期一的例会，每周至少为 1835 年创刊的《科学院周报》提交一篇稿件.由于他的稿件又多又长，科学院很快就作出决定，对所发表文章的篇幅要求大大压缩.即使这样，在不到 20 年的时间

里,柯西发表了近600篇文章,还不算他送交给科学院而没有发表的文章.不过,这时柯西由于没有效忠宣誓,七月王朝仍然没有给他应有的职位.

1848年,二月革命推翻了路易·菲利浦王朝,建立了第二共和国.新政府取消了宣誓效忠的法令,柯西又恢复了巴黎大学理学院数学天文学教授的职位.1852年,拿破仑三世政变,建立第二帝国,重新颁布了效忠法令,不过他慷慨地豁免了极端保王派柯西的效忠宣誓,使得柯西得以保留了他的职位.柯西仍然不断地发表论文,直到1857年5月22日在巴黎附近的苏镇与世长辞.柯西信仰虔诚,热心宗教活动,还经常进行施舍,赈济穷人.他还用法文和拉丁文作过诗,不过这些活动都没有影响他发表大量的论文.他至少著有7本书和800多篇论文,在全集的数量上可能仅次于欧拉.柯西的论文不仅数量多,而且涉及的领域非常广泛,其中最突出的有分析基础、复变函数论、行列式、置换群理论、微分方程等.他在弹性理论、流体力学、光学以及天文学、数学物理学等方面也有突出贡献.

从历史的观点来看,柯西是一个技术家,他大量的著作基本上在生前发表,从他的遗稿或书信中很难发现新的东西.他不仅在分析方法上超过前人,而且在分析基础上超过同时代人.正如阿贝尔所说,柯西知道如何讨论数学.他开始使分析严密化,尤其重要的是对微分方程存在性定理的重视,在这个方面他领先于同时代的人.但是在理论思维上,他还是赶不上高斯.高斯生前发表的成果不多,但思想深刻得多,在数论、非欧几何、微分几何、椭圆函数等方面,高斯都以其战略家的眼光得出漂亮的结果,而这往往决定学科未来的发展方向.

柯西的著作主要发表在科学院的期刊、几种科学期刊以及

他个人发行的杂志上.他个人的杂志都是他自己写的论文,其中包括:

《数学练习》(*Exercices de mathematiques*)5卷,1826—1830;

《新数学练习》(*Nouveaux Exercices de mathematiques*),1835;

《分析及数学物理学练习》(*Exercices d'analyse et de physique mathematique*)4卷,1840—1847.

柯西的授课讲义及教程有:

《分析教程》(*Cours d'analyse*)第一部分:代数分析(1821);

《无穷小分析讲义概要》(1823);

《微分法讲义》(1829).

他的《分析教程》第二部分长期以来人们不知其内容,直到1981年才整理出版.他的其他著作经巴黎科学院编辑于1882—1974年出版,共2辑,27卷.

3.2 数学分析的严密化

1800年左右,几何学的严格性开始受到怀疑.思想大大领先于时代的高斯,早在1799年就已经怀疑欧氏几何的真理性,1817年他认定真理只存在于算术之中.从几何方法开始的微积分,经过欧拉和拉格朗日所发展的分析方法,已经显示出把微积分建立在几何基础上的巨大困难.这两种潮流自然结合成19世纪数学分析严格化的主流——分析的算术化.这种严格化从波尔查诺、柯西、阿贝尔、狄利克雷的工作开始,经历了半个多世纪的努力,直到外尔斯特拉斯的分析才告终,使得微积分乃至数学分析最终定型.从历史顺序来看,波希米亚哲学家波尔查诺最早提出了比较合适的分析基础,但他在当时的数学界影响并不大.这里我们只介绍柯西的工作.

柯西关于微积分基础的思想,主要体现在下面几本著作中:

《王家综合工科学校分析教程》第一部分:代数分析(1821);

《王家综合工科学校无穷小分析讲义概要》卷一(1823);

《无穷小演算在几何学上的应用讲义》(1826—1829);

《微分法讲义》(1829).

这几本书一开始都首先给出"极限"的定义,而且几本书中的定义都是一样的:"当一个变量逐次所取的值无限趋近于一个定值,最终使变量的值和该定值之差要多小就多小,这个定值就称为所有其他值的极限."这个概念,把它翻译成不等式的代数形式,就是柯西惟一在微积分中所需要的.柯西的定义摆脱了运动观念,不依赖于几何,也没有以前的变量永远不能超越其极限这类限制,因此柯西的极限概念真正可以构成微积分的基础,它大大优越于以前的尝试,如拉克鲁瓦等人的工作.其次,柯西定义"无穷小量"时,干脆把它说成是"以零为极限的一种变量".而且,他还定义了无穷小量的阶.给定一个无穷小量 α,他定义 α, α^2, α^3,…分别为一阶,二阶,三阶,…无穷小量.这样,他可以定义任何无穷小量的阶.对于任何变量 β,如果 $\beta:\alpha$ 的比当 α 减小时具有一个有限的极限,则称 β 为一阶无穷小量.同样,对于 $\beta:\alpha^2$, $\beta:\alpha^3$,…,当 α 减小时,如果具有有限的极限,就分别称 β 为二阶,三阶,…无穷小量.牛顿、莱布尼茨和他们的追随者都没能这样造出各阶无穷小量来.然后,柯西给出关于无穷小量的各种例子和定理.而函数的连续性、导数等都是从"无穷小量"出发来定义的.除了借用"无穷小量"这个词之外,他的定义都和现在的定义没有什么两样.

柯西接着对连续性给出定义:"设 $f(x)$ 是变量 x 的函数,且对两个限之间的 x 值,函数总取一个有限且惟一的值……如果

在这两个限之间,变量的一个无穷小增量总产生函数本身的一个无穷小增量,则(称)函数 $f(x)$ 在给定限之间对 x 连续."

《分析教程》中并没有微分法,所以柯西关于导数的定义首先出现在 1823 年出版的《无穷小分析讲义概要》中.他把 $f(x)$ 在其连续区间上的导数,定义为差的比 $[f(x+i)-f(x)]/i$ 的极限.他的导数概念正如 18 世纪的前人一样,作为差商之比的极限,但是他的定义建立在更明确的极限基础上,而且如同他的前辈那样,他也认识到虽然比 $[f(x+i)-f(x)]/i$ 的分子、分母都趋向于 0,"比本身可收敛于另外一个或正或负的极限",而且他比他的前辈高明之处在于他加了一句话,"这个极限,如果它存在的话,对于每个特定的 x 值有一个确定的值,但这值随 x 而变……它是变量 x 的一个新函数",他称之为导函数.这个"存在"的概念正是柯西的严格之处.

柯西的导数定义,除了一个缺点之外,实际上和现在的一样,这就是他没有考虑到左极限与右极限可能不同.除此之外,他的定义与现在的没有什么不同.

值得一提的是,柯西在证明关于导数的定理时,利用的就是 ϵ-δ 的论证方法.在这方面,拉格朗日和安培的技术已经被柯西提炼成为导数的定义.拉格朗日和安培都认为连续函数一定处处有导数,但柯西没有明确提到这一点.

柯西关于微积分基础的另一个主要概念是定积分.在 18 世纪,人们对积分的看法有着很大分歧,当时积分甚至没有独立的定义,积分只不过是微分的逆运算.不定积分比定积分更为基本,而定积分只不过是不定积分在上限和下限取值之差而已.从牛顿起,伯努利家族大部分人以及欧拉、拉格朗日、拉普拉斯等人都是这么想的,也是这么干的.因为这样定义不只严格,而且

可以利用有关代数表达式的许多函数，也可以有可靠的基础计算出来. 这样一来，原来莱布尼茨把积分定义为无穷小量的无穷和的想法就为大多数数学家所抛弃，因为首先他们得对付两个成问题的概念，一个是无穷大，另一个是无穷小量，况且还有许多计算上的麻烦，如果从这方面来研究定积分，似乎就没有什么前途了. 那么，为什么柯西在为定积分奠定严格基础时，重新采用和的极限的观念呢？一个关键就是用反导数的数学家并不能保证每个函数都有反导数. 事实上，想要证明连续函数一定存在定积分，必须诉诸定积分是和的概念. 其实，甚至在柯西之前，人们就已经知道 $\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x = g(b) - g(a)$ 的反例. 勒让德已处理过函数在被积区间上存在不连续点以及成为无穷大的情形. 柯西本人在 1814 年关于积分的论文中也处理过具有不连续点的情形，特别还引进柯西主值的观念，这些都不是反导数所能解决的. 另外，柯西为建立复变函数论，有关复积分的工作也要求不能把积分看成反导数.

柯西在他的《无穷小分析讲义概要》中，对定积分作为和的极限给出了明确的定义：

如果 $f(x)$ 是在 $[x_0, x]$ 上定义的连续函数，取区间内的一些分点 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x$，则积分等于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

取极限时，要求最大子区间的长度趋于零. 但由于他没有一致连续性概念，所给出的证明不算太严密. 然后，柯西定义

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $F(x)$ 连续，令

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}f(x)\mathrm{d}x,$$

他利用积分中值定理证明

$$F'(x)=f(x).$$

此即微积分基本定理. 在证明给定函数的全体原函数彼此只差一个常数之后,再定义不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{x}f(x)\mathrm{d}x+C,$$

并指出若$f'(x)$连续,则

$$\int_{a}^{b}f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

柯西的思想由四部分构成:

①用求和来逼近积分;

②仔细讨论逼近和与积分值的差;

③断定在充分小的细分之下,不管如何分法,逼近和可任意趋近积分;

④证明对于逐次的逼近和存在公共的极限.

前三部分的思想在欧拉、拉克鲁瓦及波瓦松的工作中,已有一些考虑,而最关键的第四点则是柯西的独创.

欧拉等人在研究实际问题时曾考虑过用求和来逼近积分,他在《积分法导引》(1768—1770)中考虑到把区间划分得更小,并且认为区间划分得越小则逼近越好. 但直到柯西才真正考虑积分存在的问题. 拉克鲁瓦在 1797 年出版的《微积分通论》中,已经用到积分是和的极限的概念,而且还对单调函数的积分求出其上限和下限来. 但是他们都没有给出逼近的误差估计. 波瓦松在 1820 年的论文中证明:如果被积函数在一个区间上有限,则积分作为求和等于反导数的差. 他称之为“定积分的基本定

理”,但这并不是微积分基本定理,因为它假定既存在定积分,又存在不定积分,它只在等分区间的情况下成立.

柯西的积分定义为黎曼所发展,黎曼的理论与柯西的不同之处在于:

(1)柯西把 f 的值取为 f 在子区间左端点处的值.黎曼取为 f 在子区间内任意点的值.

(2)柯西明确要求 f 连续,并隐含假定 f 一致连续.黎曼既不假定 f 连续,也不假定它一致连续.他还举出一个例子,f 在任意小区间上有无穷多不连续点.不过黎曼提到,如果黎曼和的极限存在,它就是定积分;如果不存在,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 没有意义.因此,黎曼把积分扩充到更广的一类函数上,当然,对于连续函数,柯西积分与黎曼积分取同值.实际上,柯西在 1814 年已把他的积分概念扩张到包括有限多不连续点的瑕积分上.尽管如此,黎曼积分理论是柯西关于连续性、收敛及导数理论的自然发展.

虽然说柯西的分析基础有这样那样的缺点甚至错误,例如极限定义仍然有毛病,它是用语言讲的,而不是用数学符号表示的,它是直观的,而不是分析的;他举出了如何用算术实现这个过程的例子,却没有给出明确的解析步骤,在一些地方又回到几何方法(穷竭法)上;他的多元函数连续性的定义不正确,他分不清连续和一致连续,收敛和一致收敛,连续性和可微性的差别.但是,他仍然为微积分提供了比前人远为严密的基础,后人只需在他的框架之内进行修补,彻底扬弃掉没有用的无穷小,并把它完全算术化,这个工作是外尔斯特拉斯完成的.外尔斯特拉斯为分析奠定了严格的基础,他在 1841—1856 年做中学教师时也许

已经有所考虑.1856 年起他开始在柏林大学授课,由于讲课中的需要,他越来越感到有必要对分析的基础加以系统的研究.据外尔斯特拉斯自己后来讲,最初的研究始于 1857—1858 年冬准备“三角级数及定积分的理论及应用”的课.他觉得当时许多被普遍承认的定理有问题,如连续函数的傅立叶级数不一定收敛到它自身,柯西关于函数级数可逐项积分的定理并不成立,除非它一致收敛,等等.于是,他从 1858 年夏季学期“积分论选讲”的课中,开始对数学的一些基础问题加以阐述,特别是对黎曼积分的研究.他在 1859—1860 年冬开始讲授“分析引论”,1861 年夏在职业学院讲“微分学”,为微分学打下了基础.在讲课中,他第一次证明了“若一连续函数在定义区间上的一阶导数处处为零,则它等于常数”.他第一次完全去掉无穷小量,采用 ε-δ 技术,使微分定义算术化.他还考虑多元函数及函数级数的微分问题,特别是他已经认识到由函数的连续性不必然推出可微性.早在 1854 年,黎曼就在他为取得讲师资格而作的论文中定义了一个连续函数,它在任意小区间内的无穷多点处没有导数.1860 年他还引进一个连续且处处不可导的函数,长期以来,人们认为这没有什么问题,直到 100 多年后,才发现它在许多点处可导.因此,真正处处不可导的连续函数是外尔斯特拉斯在 1872 年的讲课中首先宣布的,此即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^{n}\cos(a^{n}\pi x),$$

其中 a 为奇数,$0<b<1$, $ab>1+\frac{3\pi}{2}$.

对积分的研究要复杂得多,柯西证明了连续函数的可积性,并稍加推广.而通常使用的积分是黎曼于 1853 年给出的,黎曼还给出黎曼可积的充分且必要条件.1875 年达尔布给出有界函

数在$[a,b]$上可积的充分且必要条件,而且证明可积函数的微积分基本定理.同年,斯密司给出黎曼不可积函数的第一个例子.至此,通常的分析基础可以说已经建立起来.

第9章　复分析

无论从实用角度，还是从直观性来看，数学分析所处理的基本对象应该是实变量的实函数．但是，只局限于实分析，不但许多问题不能解决，而且数学将会失去极其重要的漂亮理论，如代数函数论．复分析的奠基者是柯西、黎曼、外尔斯特拉斯，他们为数学带来强有力的技术，如留数方法、解析开拓、保角映射等，而且开拓了一系列新领域，如黎曼面理论、微分方程解析理论、解析数论等．如果没有从实到复的过渡，数学分析就远不是完整的．

1　通向复分析的四条途径

从16世纪虚数初次问世到19世纪初复分析逐步建立，时间跨越了3个世纪，其间数学家对于虚数的实在性及可用性多次产生争论，通常复变函数论教科书和函数论史多把复数及其表示与函数观念、一般解析函数论乃至拓扑学放在最开头，而实际上这并不符合历史实际，正如实分析一样，实数及分析基础的建立是19世纪后期的事，一开始概念并不清楚，复分析也一样．柯西在《分析教程》的引言中说，从收敛级数过渡到发散级数，从实量过渡到虚表示，不能认为是表述真理的适当办法．也就是

说,他把复分析看成一种技术,数学家们实际上大都形式地看待这个问题.在柯西之前,已有四条途径通向复分析.

1.1 代数

虚数,更准确地讲是虚量,最早出现于实数(有理数)系数代数方程的根中.不过长期以来,数学家们并不认为它是合法的而加以排斥.一般认为,当代数方程的解不能归结为实根时,则问题就没有解或说不可能解.只有极少数人愿意采用虚根,特别是法国数学家吉拉尔,他在《代数的新发明》(1629)一书中,提出代数运算的"永恒性原则",也就是把对实数适用的运算法则认为对虚量也适用.这个思想是非常伟大的,它体现了符号代数的精髓.他还第一个明确提出代数学基本定理,即 n 次方程精确有 n 个实根或复根.实际上,只要肯定代数的普遍性,虚量及实量就应该平起平坐,没有本质的区别.许多大数学家也正是在这个原则的指导下考虑问题的,例如拉格朗日就把级数当成代数学的对象,形式地进行处理.不过,许多数学家对复量或虚量的认识仍然不同,例如欧拉曾得出

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=2,$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}=0.207\ 879\ 576\ 3$$

等错误结论.1747年达兰贝尔明确指出复数经过代数运算后仍是复数,但在计算结果时却遇到困难.以代数学基本定理为例,已经可以看出不同数学家的不同认识:

(1)完全否定虚量,即使在形式上.

(2)实系数的代数学基本定理,即实系数代数方程可以分解为实系数线性因子及二次因子.这实际上完全可以回避虚数,但还承认代数学基本定理,欧拉早期就是这样做的.

(3)在试图证明上述狭义的代数学基本定理时,也承认 $a+b\sqrt{-1}$形式的根. 18 世纪中期,欧拉(1746—1751)、达兰贝尔(1752)、拉格朗日(1772)都是这样处理的,高斯的前三个证明也是如此.

(4)提出并证明复系数代数方程的代数学基本定理,这是高斯在 1850 年发表的证明中首先给出的.

但是在此之前,高斯已在 1832 年用复数一词表示形如 $a+b\sqrt{-1}$(a,b 是整数)的代数整数. 库默尔也用复数一词表示更广的代数整数,不过他们都对复数进行形式的加、减、乘、除,从而在某种意义上赋予它合法的地位. 1830 年以前,与实量(实数)对应的是虚量一词,而不是复数或复量.

1.2 代数分析

从 17 世纪下半叶起,在代数的普遍性原理得到普遍承认并过渡到虚数之前,首先从有穷代数运算过渡到无穷代数运算,并产生出函数的观念,还把初等函数展成无穷级数. 1664 年牛顿对于指数为分数的情形把二项式$(1+x)^{\frac{p}{q}}$展成二项级数,1665 年和 1668 年莫卡托独立地展开 $\log(1+x)$,牛顿在 1669 年、莱布尼茨在 1673 年独立地展开 $\sin x, \cos x, \arcsin x, e^x$ 等,其后 1712 年泰勒得出一般的泰勒级数. 处理函数的展开问题,成为代数分析的内容. 根据形式永恒性原则,从实变元过渡到复变元一般不成问题,最直接的过渡是指数函数和三角函数,牛顿的学生科兹首先在 1714 年得出著名公式

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y),$$

由于欧拉在他的《无穷分析引论》(1748)中证明了这个公式,因此,它常被称为欧拉公式.

18世纪争论最多的实际上是对数函数.早在考虑虚变元之前,对于对数函数在负数变元的取值问题上已有极多的争论,例如莱布尼茨把 $x=-2$ 代入

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

得出

$$\log(-1)=-2-\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}-\cdots$$

这个级数是发散的,和不是实数,因此他认为和是虚数.更有甚者,到18世纪初(1700—1716),莱布尼茨与约翰·伯努利关于负对数及虚对数的值有许多争论,当把有理函数的部分分式进行分解时,他们得出"虚对数的微分"

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+a+b\mathrm{i}}.$$

例如1702年,约翰·伯努利在一封信中,把圆的求积问题化成虚对数

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{1+\mathrm{i}z}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{1-\mathrm{i}z},$$

令

$$z=\mathrm{i}\frac{t-1}{t+1},$$

得出

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

从而推出

$$\log\mathrm{i}=\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}.$$

约翰·伯努利还认为 $\log(-x)=\log x$,从而 $\log(-1)=0$.而莱布

尼茨则认为负对数是虚数.他们的争论在 18 世纪中一直继续着,而欧拉则第一个认识到对数函数是多值函数,从而把问题引向正确道路.

1.3 定积分

复分析,特别是柯西的复分析的真正来源是定积分,这些定积分是实变函数的实积分上、下限的积分,但是用通常方法不能求出来.从欧拉起,达兰贝尔、拉格朗日、拉普拉斯、勒让德以及后来的波瓦松等都遇到过这种问题,他们都曾经运用由实到复的过渡来解决问题.莱布尼茨及约翰·伯努利都曾应用“虚变换”来解积分问题,但系统地应用这种方法的是欧拉.欧拉在1776—1777 年及 1781 年曾向彼得堡科学院宣读过 9 篇论文,这些论文于他去世后在 1788—1805 年发表.他的方法是把积分

$$\int Z(z)\mathrm{d}z = \Delta z$$

(Δz 表示 z 的函数)中的实变元换成复变元,$z = x + y\sqrt{-1}$,则 $Z = M + N\sqrt{-1}$,于是积分化为

$$\begin{aligned}&(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\sqrt{-1})(M + N\sqrt{-1})\\ =&(M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y) + (N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y)\sqrt{-1},\end{aligned}$$

于是积分化为

$$P = \int (M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y),$$

$$Q = \int (N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y).$$

为了可积,M,N 满足

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x},$$

$$\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}.$$

此即柯西—黎曼方程.达兰贝尔在1752年也得出过这个公式，而且用复函数的实部和虚部来解释.但是欧拉的确用这种方法求出一系列积分，如

$$\int z^n\mathrm{d}z,\quad \int\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2},\quad \int\frac{\mathrm{d}z}{1+z^3};$$

这些不算难，他还求出

$$\int\frac{z^{m-1}}{1+z^n}\mathrm{d}z,$$

$$\int\frac{z^{m-1}}{(a+bz^n)^\lambda}\mathrm{d}z.$$

他还用极坐标的变换求出一些定积分的值，如

$$\int_0^\infty\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

它们后来被称为费涅尔(Augustin Jean Fresnel，1788—1827)积分.更一般地，欧拉得出

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-px}\cos qx\,\mathrm{d}x=\frac{\Delta\cos nv}{f^n},$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}\mathrm{e}^{-px}\sin qx\,\mathrm{d}x=\frac{\Delta\sin nv}{f^n},$$

其中 $\Delta=(n-1)!$，$f=\sqrt{p^2+q^2}$，$\tan v=\frac{p}{q}$.

拉普拉斯在1782—1812年也通过虚变换来计算积分，正如

他自己所说,这只是一种启发式的方法.实际上,他没有把 $x+y\sqrt{-1}$ 看成一个实体,也就是通过虚、实分离形式进行运算.

真正向复分析迈出的重大一步是考虑积分路径通过复平面以及积分限为虚数.这种见识首先见于高斯在1811年给贝塞尔的信中,信中涉及积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

高斯指出,积分限可取复数,这样积分路径可有许多条,于是他立即接触到问题的本质:通过不同积分路径的积分值是否相同?他指出:"通过不同路径,积分 $\int \Phi(x)\mathrm{d}x$ 只有一个值,只要在两条路径围绕的空间内,$\Phi(x)$ 单值且不变为无穷."他说这是一个漂亮的定理,证明并不难,不过他始终没有证明这个柯西积分定理.他还知道,如果 $\Phi(x)$ 变为无穷,则积分为多值.这的确反映了这位大数学家深刻的先见.

1815年,柯西及波瓦松都考虑过积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

波瓦松第一个考虑作变元代换 $x=\mathrm{e}^{i\theta}$,并真正在复平面路径上积分.而且他举例表明,沿着虚路径与实路径所得到的积分值不同.他考虑积分

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x,$$

其中,$a,b>0$.令 $x=t+\mathrm{i}k$,$k>0$,当 $k>b$ 时,

$$A=\frac{\pi(\mathrm{e}^{-ab}-\mathrm{e}^{ab})}{2\pi},$$

当 $k<b$ 时,

$$A=\pi e^{-ab},$$

而当 $k=0$ 时,

$$A=\pi e^{-ab}.$$

从而沿虚路径和实路径的积分结果不同.不过,他并没有作进一步深入的研究.

1.4 几何表示及保角映射

建立复分析的重要一步是复数的几何表示.它一方面把复数整个作为一个实体来考虑,而且同平面上点的对应也显示其实在性;另一方面对复数的代数运算给出几何解释,特别对于一些复杂的运算,如开方,很容易得到直观的、形象的结果.由于复平面的出现,可以把复数放在整体中进行考虑,对于积分等运算才能有明确的认识.在历史上,许多数学家,如科兹、棣莫弗、欧拉、范德孟等人都使用过几何表示,但没有完全表示其运算.一般认为,丹麦测量员威塞尔(Caspar Wessel,1745—1818)在1797年最早提出几何表示,瑞士数学家阿尔冈(Jean Robert Argand,1768—1822)在1806年更明确地提出虚数的几何表示.不过,他们的工作在当时影响并不大.阿尔冈的文章在1813—1814年还引起争论.复数表示的思想主要还是靠高斯的一系列文章进行传播的.他在1831年的一篇论文中首次明确地把 $a+bi$ 表示为复平面上的一点,而不像威塞尔和阿尔冈那样表示为有向线段.

有了复数的观念及其几何表示,下一步是建立复函数的几何表示,即把它看成两复平面之间的对应,而且解析函数是两平面之间的保角对应.早在16世纪,地图绘制者就已提出这种要求,但没有同复数联系在一起.1777年欧拉在《论球面的几何投影》一文中,曾写下了形如

$$X + \mathrm{i}Y = \frac{a + bz}{c + dz} \quad (z \text{ 是复数})$$

的保角映射，不过他只是形式地看问题. 高斯在 1825 年已经意识到解析函数及保角映射的关系，即保角映射都是由解析函数生成的，但对此进行深入研究则是黎曼以后的事.

尽管形式地表示与运用虚量或复量已经大规模地进行，正如高斯在 1825 年所说的，"$\sqrt{-1}$的真正的形而上学"还在未定之天，他力求像欧几里得那样，由定义及公理，从通常的算术导出复量的性质. 1831 年，他真正得出了"真正的形而上学"，即完全把几何直观从定义中驱赶出去. 他把 $a + b\mathrm{i}$(a, b 是实数)定义为数偶(a, b)，然后定义

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d;$$
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$
$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

这样一来，在其中没有$\sqrt{-1}$的地位了. 他照例没有发表这个结果，1837 年哈密尔顿发表了同样的结果，这也是现代复数的定义.

2 柯西的复分析

柯西对复分析的研究从 1814 年起经历 40 多年，先后发表 200 多篇论文，大约占他工作总量的四分之一. 概括来讲，柯西的重大贡献主要有：提出柯西—黎曼方程，首次证明柯西积分定理，证明柯西积分公式，首创留数演算，证明留数公式并应用于定积分的计算. 柯西把泰勒级数应用于复变数情形，并得出收敛性的判据以及优函数法. 他还最早提出正则或全纯函数的概念.

不过,柯西的研究缺乏系统性,观点也经常改变,没有清晰的、全面的观点,对自己的一些工作也没有深入发掘,使得他与许多重要结果失之交臂.他的部分工作有些不必要的复杂,许多概念仍然混乱,他对极点及支点分不清,对多值函数始终处理不好,而这恰巧由黎曼很好地完成了.

柯西最早的工作是1814年呈送科学院的关于定积分的论文,这篇论文于1825年送去发表,1827年出版.他研究的出发点是定积分,他的目的是要使从欧拉到拉普拉斯的从实到复的过渡严密化,实际上这篇论文是前人工作的继续,而且一开始没有涉及复函数.他考虑的是在矩形(如图6)区域内部及边界上定义的连续函数 $f(x,y)$ 何时二重积分可以换序,即

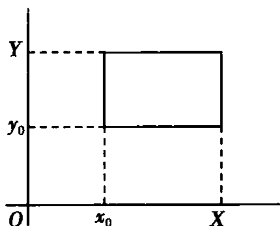


图6

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

他引进两个函数 $V(x,y)$ 及 $S(x,y)$ 使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial y}=\dfrac{\partial S}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x}=-\dfrac{\partial S}{\partial y}.\end{cases}\tag{1}$$

如果用上述等式中任何一个表示 $f(x,y)$,则换序不成问题.他认为这组方程实际上包含了从实到虚的过渡的全部理论,如果把欧拉等人使用的复函数解释为满足上面方程的一对实函数,就可以不必使用复方法.当时科学院院士勒让德对他的论文报告加以批评,柯西于是在发表时加上脚注,使用复函数,也就是

上述等式对

$$\int f(z)\mathrm{d}z$$

也成立，其中 z 为“一部分实，一部分虚”，即

$$z = M + \mathrm{i}N,$$

其中 M 及 N 是 x,y 的实函数，

$$f(z) = P' + \mathrm{i}P''.$$

这样方程组(1)成为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial y} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial x}, \end{cases} \tag{2}$$

其中

$$S = P'\frac{\partial M}{\partial x} - P''\frac{\partial N}{\partial x},$$

$$U = P'\frac{\partial M}{\partial y} - P''\frac{\partial N}{\partial z},$$

$$V = P'\frac{\partial N}{\partial z} + P''\frac{\partial M}{\partial z},$$

$$T = P'\frac{\partial N}{\partial x} + P''\frac{\partial M}{\partial x}.$$

不过顺手可得的真正的柯西—黎曼方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P'}{\partial x} = \dfrac{\partial P''}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial P'}{\partial y} = -\dfrac{\partial P''}{\partial x}, \end{cases} \tag{3}$$

他却没有写出来.

对方程组(2)积分，可得

$$\int (S'' - S')\mathrm{d}x = \int (U'' - U')\mathrm{d}y,$$

$$\int (T'' - T')\mathrm{d}x = \int (V'' - V')\mathrm{d}y.$$

由此可推出矩形边界的柯西积分定理,这公式可用来计算定积分,他在文中用这种方法得出

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-y^2},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\mathrm{d}x = e^{-y^2}\int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y.$$

这两个积分,拉普拉斯已经算出,更重要的是柯西能计算出瑕积分,而这是当时许多数学家注意的焦点.

在1821年的《分析教程》第一卷中,柯西花了许多篇幅论述"虚表示式"以及它的运算和性质,这些大都是对实数情形的平行推广,例如无穷小量及函数的连续性,其中重要的是他考虑复级数的收敛性,特别是证明幂级数$\sum a_n z^n$在圆$|z| < \frac{1}{A}$内收敛,其中

$$A = \lim\sup |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

在《分析教程》第10章中,他证明了代数学基本定理,这个证明他在1817年已经得到,而且他第一次提到代数方程的系数是实数或虚数,总存在实根或虚根.不过,他在《分析教程》中没有把虚表示式作为一个整体来考虑,也没有考虑复微分和复积分,他只是建立了复代数分析.在1823年的《总结》中,他定义了柯西积分的概念,不过没有涉及复积分,直到这时,他只考虑积分限为实数(也可以是∞),而不考虑在复平面内的积分路径.第一次打破这个限制的是他在1825年写的长篇论文《积分限为虚数的定积分》,这可以说是复分析的具有开创性的大作,不过他自己却认识不到其重要性,生前没有发表,直到1874—1875年才被

公之于世.他首先把定积分的上、下限推广到复数,然后把积分路径也推广到平面上的曲线 $x=\varphi(t), y=f(t)$.他依照实数情形定义复积分为和的极限.他证明,如果复变函数 $f(x+\mathrm{i}y)$ 当 $x_0\leqslant x\leqslant X, y_0\leqslant y\leqslant Y$ 时有界且连续,则积分

$$\int_{x_0+\mathrm{i}y_0}^{X+\mathrm{i}Y} f(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y)$$

的值不依赖于积分路径,这就是柯西积分定理.他是用变分方法证明的,不过,他没有考虑闭曲线.可以说,他在很长时间内对于复平面上的复路径仍不甚了然,他经常使用的积分路径是矩形及圆周.奇怪的是,他却考虑积分路径上出现奇点的情形,而且能运用他对瑕积分的技术对付它.他通过这种特殊的方法得到"留数"这个了不起的观念.

从柯西论文的出版顺序来看,出现留数的论文是他在 1826 年发表的复分析论文的第一篇,而去世前在 1857 年发表的《留数新理论》是最后一篇.留数演算(calcul des residus)一直贯穿他的复分析研究的始终,而且是他最重大的贡献.他自己对留数演算也估计很高,1826 年第一篇论文的题目就是《类似于无穷小演算的新演算》.留数演算有着多方面的应用,"从留数演算可以立即得出拉格朗日插值公式、等根或不等根情形下有理函数的(部分分式)分解,适于定出定积分的值的一般公式、大量级数特别是周期级数的求和、齐次或非齐次常系数微分方程和差分方程的积分、拉格朗日级数以及其他类似的级数,求解代数方程和超越方程等".

他给定求函数 $f(z)$ 的留数方法.设 z_1 为使 f 为无穷的点,即

$$\frac{1}{f(z_1)}=0 \tag{4}$$

的根,则函数 $f(z)$在 z_1 点的留数为 $g(z_1)$,其中

$$g(z)=(z-z_1)f(z)$$

或

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon f(z_1+\varepsilon).$$

并用 $\varepsilon((f(z)))$表示全留数,即 $f(z)$在(4)的不同根上的留数之和,同时他还给出 m 阶极点处的留数.然后,他给出其一系列应用,其中特别是证明留数定理

$$\int f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\varepsilon((f(z))),$$

这成为以后定积分计算的基础.由于他故意回避复积分路径以及幂级数展开,他往往要在证明许多特殊的结果之后,才能得出一般的定理.例如,圆的柯西积分公式在1831年就有了,但到1840年才证明一般积分定理,并由积分定理推出积分公式

$$\oint\frac{f(s)-f(z)}{s-z}\mathrm{d}s=0.$$

他还由此得出幂级数展开及余项的积分表达式,这成为优函数法的基础.利用留数演算,他把刘维尔在1844年证明的有界双周期函数为常数的定理推广到一般情形.1855年,他证明

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial S}\frac{Z'}{Z}\mathrm{d}z=N-P,$$

其中 Z 是在区域 S 内只有孤立极点的函数,N,P 为 $Z(z)$在 S 内的零点及极点的数目,∂S表示 S 的边界,由此他再次证明代数学基本定理和刘维尔定理.

作为一个追求严密基础的数学家,柯西直到1847年才艰难地走上正轨.在各方面的影响下,他给复数一个与代数等价的定义.在1847年发表的《分析及数学物理学练习》中,他把 $x+\mathrm{i}y$ 看成一个实体,称之为"几何量",用它来代替以前一直使用的虚表示式,而以前的虚变量无非就是几何变量,然后他"仿照代数

量函数的方法来定义几何量的函数”，至此他才摆脱掉实变量实函数的阴影．然后他定义连续性及导数．1851年他引进函数的单生性(monogène)，即满足柯西—黎曼方程，然后他定义单值性(monodrome)，最后得到平面一部分 S 上的全纯(synectique)函数，后来又使用全纯(holomorphie)函数的概念，即有限、单生、单值连续函数，至此他才认识到在推导柯西定理及展开成幂级数时，可导性的必要．有了新的概念基础，他对多值函数以及代数函数的积分也进行了一些研究，不过，他的研究很快就被黎曼的结果大大超过了．

柯西长达40多年的工作开创了复分析这一崭新的领域，为分析提供了先进工具．他虽然也受到他人的影响，但主要是在较为孤立的情况下进行研究的．在他的晚年，法国数学已不再像1840年以前那样处于领先的地位．当时，法国数学的领袖人物刘维尔及埃尔米特主要研究椭圆函数及其推广，他们更多地受德国数学家的影响．柯西的一般的、严密的观点实际上影响不太大．1850—1951年刘维尔在法兰西学院讲授双周期函数，这直接导致布瑞奥与布盖1856年的“函数论研究”，并没有改动地在1859年以《双周期函数论》出版，这本书的前半部分首次对柯西的复函数论进行了系统的论述，尽管很不完全，也不严谨，但还是对“法国学派”的工作的传播起到了极为重要的作用(《双周期函数论》1862年被译成德文，1875年重印，长期以来成为标准著作)．

真正沿着柯西的道路研究复分析的，实际上只有两位法国人．一位是罗朗(Pierre-Alphonse Laurent，1813—1859)，他在1843年发表了罗朗展开式，即一个函数在一个孤立奇点 a 周围，在圆环 $R_1 < |z| < R_2$，对 $R_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R_2$，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_{\rho_1}}\frac{f(s)ds}{s-z}-\int_{C_{\rho_2}}\frac{f(s)ds}{s-z}\right].$$

按照柯西的办法把被积函数展成级数,然后逐项积分,则 $f(z)$ 可用升幂或降幂展开式来代替泰勒展开式,即

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

该论文全文在 1863 年发表.

另一位是普伊索(Victor Alexandre Puiseux,1820—1883),他继承柯西在 1846 年关于多值函数的工作,1850 年发表重要论文,其中他研究由多项式

$$f(u,z)=0$$

定义的复代数函数,他首次搞清楚极点与支点的区别,并引进本性奇点的概念.他证明:u 沿着不同路径到达某一点的值,只要路径所包围的区域不含极点及支点,则其值相等,与路径无关.他还提出,在支点 a 的附近,函数 u 的幂级数展开中必定含有 $(z-a)$ 的分数次幂,这种展开后来被称为普伊索展开.柯西在科学院报告了普伊索的工作,并且继续他的研究.

柯西及其同事的工作的确受到黎曼及外尔斯特拉斯的重视.黎曼及外尔斯特拉斯的研究很快在深度及系统性方面远远超过法国学派.特别是外尔斯特拉斯的严密结果从 19 世纪 60 年代起成为复变函数论的典范,他本人也成为无可争议的绝对权威.直到 1900 年,由于法国数学家古尔萨(Edouard Goursat,1858—1936)证明 $f(z)$ 的连续与导数存在已能够刻画解析性,从而不一定要从幂级数出发研究函数论,这时三股潮流才汇合在一起,成为当代的复分析及复函数论.

3 黎曼的几何函数论

黎曼对复分析的贡献实际上主要包括在他的博士论文中，正如阿尔福斯(Lars Valerian Ahlfors, 1907—1996)在100年后所说的："极少数学论文对未来数学发展的影响能与黎曼的博士论文所带来的冲击相比.""其中包括大部分现代解析函数的萌芽，它开创了拓扑学的系统研究，使代数几何学革命化，也给黎曼自己的微分几何研究方向铺平道路."

黎曼的动机用他自己的话说，即："我现在特别从事的工作是：

(1)把虚量引进到其他超越函数当中，正如已被引进代数函数、指数函数与三角函数、椭圆函数及阿贝尔函数中并产生如此重要的结果.我在我的博士论文中已经开始这最重要的、一般的基础工作.

(2)与此相联系的是积分偏微分方程的新方法，我已应用它研究许多物理问题.

(3)我的主要任务是对已知自然定律给出一个新解释——它的表示需要其他基本概念的帮助——通过它利用热、光、磁、电之间相互作用的实验数据就可能研究它们之间的相互关系，引导我走到这条路上的主要是通过对牛顿、欧拉还有赫尔巴特(Johann Friedrich Herbart, 1776—1841)著作的钻研."

许多数学家，从克莱因到阿尔福斯，对黎曼的工作作了各方面的评价，尽管可能同真正的历史有出入，这里还是引用了一些，仅供参考.克莱因说，黎曼"总是寻求对那些作为所有自然现象的基本规律的认识以一种统一的数学进行表述"，例如黎曼的

复函数思想很可能来自对平面电流流动的研究.这种说法有一定道理,因为位势理论是引力、热、电、磁诸理论都要用到的,而且黎曼的数学工具狄利克雷原理也来自位势理论.

从方法论的角度来看,黎曼自由地运用几何直观及物理论证,之所以说他开辟了复分析的几何方向,不仅由于他的观念是几何的,而且其结论也是几何的.黎曼曲面奠定了研究多值函数的几何基础,直接开辟了代数函数论及代数几何学的新方向,而且直接导向后来拓扑学的研究.另一方面,黎曼映射定理也开辟了几何函数论的新方向.同柯西和外尔斯特拉斯相比,这两个方向完全是他独特的贡献.

现对黎曼的研究成果分述如下:

(1)通过对复变函数的导数的定义,建立复变函数论的基础.他先给实变函数概念下定义,但过渡到复变元 z 的复值函数 w 时,他发现导数

$$\frac{dw}{dz}=\frac{du+idv}{dx+idy}$$

必须不依赖于微分 $dz=dx+idy$.这样,黎曼给单值解析函数下了一个严格的定义,他定义 $w=f(z)=u+iv$ 在一点及其邻域内解析,如果 u,v 连续可微并满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这就是后来所说的柯西—黎曼方程.这个方程以前也出现过,但黎曼是第一个要求函数 w 的导数$\frac{dw}{dz}$的存在性是指$\frac{\Delta w}{\Delta z}$的极限必须对于 $z+\Delta z$ 趋向于 z 的每一条路径都相同的人.这样一来,他简单而直接地建立起复变函数论基础,而且不难把函数 $w(z)$ 解释为 z 平面到 w 平面的保形映射,这一下子打开了通往几何函

数论的大门.

(2)对多值函数定义黎曼曲面,这是他最重要的创造之一.黎曼曲面形象地反映出多值映射的概念.对于复平面的区域,他定义分歧覆盖曲面,使得对于多值函数 $f(z,w)=0$, z 的每一个值,如果有 n 个 w 值同它对应的话,就引进 z 平面上 n 叶覆盖曲面,每一叶对应 w 值的一个分支,而且在每一叶上都引进一个点对应 $z=\infty$.但是这 n 叶覆盖曲面并非彼此无关地重叠在 z 平面之上,而是在 w 取值相同的点 z(被称为支点)处相重合成一点,这样就得到多值函数 $f(z,w)=0$ 的黎曼曲面.它的本质在于,如果 z 在函数 $f(z,w)=0$ 的黎曼曲面(即在某些点相重合的 n 叶覆盖曲面的集合)上变动时,w 成为 z 的单值函数.说到底,黎曼曲面即多值函数的单值化曲面.为了更好地描述函数值的变动情况,黎曼引进分支截线的概念.分支截线是连接两个支点的连线.当 z 穿过某一个分支截线时,w 值就从一个分支变到另一个分支,这样黎曼曲面的各叶便通过分支截线相互连接在一起.有了黎曼曲面,单值函数的某些定理就可以推广到多值函数上.黎曼就这样推广了柯西积分定理,不过他假定函数的解析区域在黎曼曲面上是单连通的.

(3)黎曼曲面的拓扑.

黎曼的覆盖(einkleidung)把拓扑的覆盖面与变元抽象空间的概念巧妙地结合在一起.后者通过单值化参数来定义结构,这直接预示后来的拓扑空间、覆盖空间、具有结构的空间之类的现代数学的基本概念,而且黎曼还第一个研究曲面的拓扑.他引进横剖线的方法来研究曲面的连通性质.虽然由代数函数即不可约多项式 $f(w,z)=0$ 定义的黎曼曲面是闭曲面,但黎曼主要研究具有边界的曲面.对于这个曲面,横剖线是两端点落在边界上

的不自交曲线(对于闭曲面情形,它就退化为一条简单闭曲线).对于平面或球面,任意闭曲线可以把它分成两部分,我们称之为单连通曲面.对于非单连通曲面,我们需要用一些横剖线把它分开,它才能成为单连通曲面.黎曼通过定义连通数来刻画连通性,他称之为基数(grundzahl).如果一个曲面能用适当的 $N-1$ 条横剖线把它变成一个单连通曲面,则称之为 N 连通的或连通数为 N.黎曼建立了黎曼曲面的支点数目与连通数之间的关系:设黎曼曲面的支点为 $r_1,\cdots,r_r$,在 r_i 处有 w_i 叶相重合,整个曲面有 q 叶,则连通数

$$N=\sum_i w_i-2q+3.$$

(4)黎曼曲面上的几何函数论.

黎曼研究的基本问题是黎曼曲面上的函数的存在性及惟一性问题.他比以前数学家先进之处在于,函数的存在不必通过构造出解析表达式来证明,函数可以通过其奇点来定义.这些观点对后世数学有着决定性的影响.关于黎曼曲面上的函数论,他首先对单连通区域"证明"两个基本定理:

①如果一个函数 $u(x,y)$ 在区域 Ω 内是调和函数,即满足拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则 u 具有所有阶导数且是一个解析函数 $f(z)$ 的实部,而且 $f(z)$ 除差一个纯虚数常数项外是惟一的.

②黎曼映射定理.黎曼在1851年的论文的末尾,宣布所谓黎曼映射定理:两个给定的单连通区域(包括黎曼曲面上的单连通区域),可以一对一地保角地相互映射,一个区域的一个内点和一个边界点可以映射到另一个区域任意选取的一个内点和一

个边界点上.

黎曼给出其证明在于有效地表述及运用狄利克雷原理,这个原理是他从狄利克雷的课程中学来的.在此之前,高斯、格林及汤姆逊也用过,其中断言,如果积分

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

有极小值,则存在一个函数 u,使该积分达到极小值.但外尔斯特拉斯在 1869—1870 年正式对此原理产生过怀疑.对此,克莱因有如下的评论:“黎曼有着完全不同的意见,他完全认识到外尔斯特拉斯批评的正确性及合理性,但是他说过,正如有一次曾告诉外尔斯特拉斯的那样,他用狄利克雷原理只是因为它是手头好使的、方便的工具.”他还说,他的这一“定理仍是正确的”,外尔斯特拉斯似乎也同意这种意见.黎曼去世以后,外尔斯特拉斯在 1869 年正式对此原理提出批评,因而使黎曼的证明归于无效.在外尔斯特拉斯的影响下,施瓦茨、诺意曼以及庞加莱先后提出过不用狄利克雷原理的其他方法.1900 年,希尔伯特在一定条件下证明狄利克雷原理,从而挽救了黎曼的结果.历史的确证明了黎曼伟大的数学直观天才是多么惊人.

黎曼的论文发表之后,几何函数论得到很大发展,并有许多应用.从 1867 年到 1871 年,克里斯托菲尔和施瓦茨独立得出把 z 平面的上半平面映到多边形内部的保角映射的具体函数,从而引发各种发展及应用.

4　外尔斯特拉斯和他的解析函数论

4.1　外尔斯特拉斯

外尔斯特拉斯,1815 年 10 月 31 日出生在德国威斯特发里亚州奥斯顿费尔特,家庭世代是小手工业者及小商贩.他的父亲受过一些教育,在财税机关做小职员.童年时他经常随父亲的工作调动而迁徙,小学也总在换,直到 1829 年才到帕得普恩上天主教中学.他在中学时表现不错,得过许多奖赏.不过,他不像其他数学家那样有音乐才能,对戏剧、绘画和雕塑也没有兴趣,他对艺术的兴趣大概只局限于抒情诗.由于母亲去世,父亲再娶,他不得不干些零活贴补家用.他曾经做过书店售货员,在十几岁时就喜欢看当时最高级的数学杂志《纯粹与应用数学杂志》,而且常给他的弟弟讲数学.

1834 年中学毕业之后,外尔斯特拉斯按照他父亲的愿望,进入波恩大学学习财政及行政管理,但是他的主要兴趣仍在数学方面.由于他无法克服兼顾两方面的矛盾,因此他逐步不去听课而自修数学.他读的第一本专著是拉普拉斯的《天体力学》,而且受到教授的亲自指点,不过他所学的数学都是老式的.

正好在这时,他看到发表在《克莱尔杂志》(1830)上的阿贝尔给勒让德的信,于是他给自己提出一个问题,这个问题很快就得到了解决,这使他产生信心,决心献身数学.这时他已经读过雅可比的《椭圆函数论新基础》(1829)和古德曼(Christof Gudermann,1798—1852)的讲稿,在椭圆函数论方面,他已经到达前沿阵地.

外尔斯特拉斯在学了8个学期后决定改行,这使他的父亲很失望.在一位朋友的劝说下,他的父亲把他送到明斯特神学哲学院,以便取得教师资格.在这里,他是惟一听过古德曼的椭圆函数课的学生.1841年,他通过了考试,到明斯特中学做教师,试用一年.1842—1848年他到西普鲁士德意志克朗中学教书,1848—1855年到东普鲁士布劳恩斯堡的天主教中学教书.他除了教数学和物理之外,还要教德语、植物学、地理学、历史、体育甚至书法,在这些岁月里,他没有人可以交谈数学,没有数学图书馆可以利用,与数学家通信的邮费也是很大的负担."无穷的厌倦,无限的烦恼",实在让人难以忍受,他只有靠挤出每一点闲暇时间拼命工作,才得以度过他那充满不幸的青春时光.

早在1840—1842年间,他已经写出四篇论文,奠定了他研究复解析函数论的基础.这些论文直到1894年才发表,而在当时自然无人注意.1844年8—10月间,他为了晋升中学高级职称(被称为教授)到了柏林,其间拜访了当时的分析大师狄利克雷及几何权威史坦纳,并同他们建立了友好的私人关系.史坦纳对等周问题的研究是推动外尔斯特拉斯研究变分法的动力,虽然在外尔斯特拉斯的眼里,史坦纳的综合几何方法是不严格的.当然,在史坦纳去世后,外尔斯特拉斯负责编辑史坦纳全集也与他们的这段交往有关.

1848年秋,他到布劳恩斯堡中学教书,学校图书馆的条件很好,校长对他也很友善.这样,他的工作有了重大突破,他深入研究椭圆函数的推广——阿贝尔函数.最初,他的论文发表在中学年刊上,当然没有受到注意;接着,一篇题为《阿贝尔函数论》的论文发表在《克莱尔杂志》上,这引起数学界的巨大兴趣,成为他一生中具有决定性的转折点.1854年3月31日,哥尼斯堡大

学授予他荣誉博士称号,而且从1855年秋天起,学校准许他可以一年不教书而搞他的研究.不过他下决心不在这里干了,他申请接替库默尔在布雷斯劳大学的教授空缺,但没有成功.尽管他经常因头痛头晕而无法工作,但他仍然抓紧时间奋力拼搏.1856年他在《克莱尔杂志》上发表了几百页的大文章《阿贝尔函数论》,完全解决了超椭圆函数的雅可比反演问题.希尔伯特说这是分析上最伟大的成就之一.1856年,年过40岁的外尔斯特拉斯接连收到许多大学的聘书,后来他接受了柏林工业学院的教授职位,同时兼任柏林大学的副教授.同年11月他当选为柏林科学院院士.1864年在他年近半百时才成为柏林大学教授.从这时起,到他1892年退休,是柏林数学的黄金时代,当时柏林不仅是德国数学的中心,而且是公认的世界数学中心.柏林学派无非就是外尔斯特拉斯学派,外尔斯特拉斯是公认的最有权威的数学家.例如,1882年林德曼(Carl Louis Ferdinand Lindemann,1852—1939)证明π的超越性,只有在他拍板后才获得大家承认,从“外尔斯特拉斯的严密性”一词也反映出他的标准就是数学的标准.事实上,他的分析基础,如$\epsilon-\delta$论述法,一直是后来分析教科书的典型论述.

外尔斯特拉斯的后半生并没有一篇接一篇地发表论文,他的大部分工作通过他的讲课传播到各地,在19世纪后半叶的欧洲乃至全世界产生深远的影响.从1857年夏季学期到1887年夏季学期整整30年间,他反复讲一套分析教程:解析函数论、椭圆函数论、椭圆函数论在几何及力学上的应用、阿贝尔函数论.这一套教程形成外尔斯特拉斯函数论体系,从而函数论这一分支正式产生.在研究及教学中,他建立了数学分析的严格基础,时至今日仍然是“标准分析”.他也是变分法严密理论的奠基者,

现在许多有着深远影响的定理及技术也来自于他,如外尔斯特拉斯预备定理以及线性代数的初等因子理论,这些都表明他的研究具有持久的生命力.

但是,从历史上来看,他的影响在当时主要来自他培养了大批年轻人,其中不少人成为大数学家,他们都自豪地声称自己属于"柏林学派".经他指导而获得博士学位的就有几十人,其中大部分又分别担任一些知名大学的教授.其中突出的有施瓦茨、富克斯(Lazarus Fuchs,1833—1902)、弗罗宾尼乌斯、肖特基、G·康托尔、亨塞尔(Kurt Hensel,1861—1941)、龙格(Carl David Tolme Runge,1856—1927)等,当然也不能忘记由他私人指点而获盛名的柯瓦列夫斯卡娅.

由于他对数学的巨大贡献,他理所当然地荣获许多荣誉,他除了是柏林科学院院士之外,还被选为格廷根科学院院士(1856)、巴伐利亚科学院院士(1861)、巴黎科学院国外院士(1868)、伦敦皇家学会国外会员(1881).他还是功勋奖章的获得者,在他之前,只有高斯、雅可比及狄利克雷获此殊荣.他的70大寿及80大寿都被隆重地庆贺.1897年初,他染上流感,后转为肺炎,于1897年2月19日在柏林去世.

他在生前就已开始编辑整理自己的工作,他的《全集》(Mathematische Werke)原定10卷,至今尚未完全出齐,已出版的7卷中,前3卷主要是论文,后4卷是讲义,出版时期如下:

第Ⅰ卷(1894):包括10篇早期的论文;

第Ⅱ卷(1895);

第Ⅲ卷(1903);

第Ⅳ卷(1902):《阿贝尔函数论讲义》;

第Ⅴ卷(1915):《椭圆函数论讲义》;

第Ⅵ卷(1915):《椭圆函数在几何及力学上的应用讲义》;

第Ⅶ卷(1927):《变分法讲义》.

4.2　外尔斯特拉斯的解析函数论

外尔斯特拉斯的解析函数论是建立在严格的、规范的幂级数展开的基础上的.正如克莱因所说,它只是研究阿贝尔函数的一个副产品.外尔斯特拉斯正如他的许多同时代人一样,并不像现代数学家那样热衷于一般性及抽象性,他一生的主要目标是解决雅可比的超椭圆积分乃至阿贝尔积分的反演问题,而解析函数论,正如他多轮的讲课顺序,只是其后椭圆函数论、椭圆函数论的应用及阿贝尔函数论这些重头戏的小小的导引.由于他在方法论上追求严密性,他的解析函数论成为后来的规范.

解析函数一词来源于拉格朗日,他的著作《解析函数论》(1797)就以解析函数命名,其中把函数展成幂级数是一种基本方法.不过,拉格朗日的解析函数局限于实变元,而且他对收敛、发散问题并没有特殊关注.其后,拉普拉斯、波瓦松等人沿袭拉格朗日的传统,直到柯西,才明确讨论收敛及发散,并过渡到复变元,特别是指出无穷可微函数与解析函数的不同之处,从某种意义上讲,这是对拉格朗日传统的批判.而在德国,这个传统以另一种批判的方式继承下来,首先是高斯等人在实际运算中引入幂级数,特别是超几何级数;其后,古德曼也运用幂级数研究椭圆函数,而把幂级数作为理论基础的则是外尔斯特拉斯.

关于解析函数、解析开拓等概念,外尔斯特拉斯早在1840年的论文中就已经提出来了,不过他的早期论文直到1894年他的《全集》第Ⅰ卷出版时才公之于世.其后,他的体系是在他的讲义中讲到而由他的学生们传播的.

外尔斯特拉斯的出发点是幂级数 $P(z-a)$或 $P\left(\frac{1}{z}\right)$，在它们的收敛圆 C 之内，表示一个“函数元素”，在 1884—1885 年的讲课中称之为解析元素. 在边界圆上，这类幂级数有两种可能，一种是在所有边界点上，幂级数均发散，这时边界被称为自然边界. 外尔斯特拉斯在 1880 年第一个举出以收敛圆的边界为自然边界的幂级数例子，即幂级数

$$\sum_{n\geqslant 0} b^n z^{a^n},$$

其中 $0<b<1$，a 为整数且 $a\geqslant 2$，$ab\geqslant 10$. 另一种可能性是，如果存在边界点使该幂级数收敛，则可以进行解析开拓，他在 1874 年的讲课中证明了惟一性定理. 在圆内选一点 b，把原来幂级数展成为 $z-b$ 的幂级数，其收敛圆 C' 覆盖 C 的边界上的正则点，在 C 与 C' 重叠的区域两幂级数的值相等，但 C' 涵盖 C 外的值，C' 被称为 C 的一个解析开拓. 所谓解析函数就是一个函数元素所有解析开拓的集合.

外尔斯特拉斯知道在开拓过程中会遇到奇点，而奇点必定位于幂级数的收敛圆的边界上. 他规定如果奇点、极点及支点的阶是有限的，则这些奇点也包含在解析函数之内. 因为在这些点上，可以展开成$(z-z_0)^{\frac{1}{n}}$的幂级数，并且只有有限多负指数项. 顺便说一句，早在 1841 年，外尔斯特拉斯已先于罗朗引进含负指数的幂级数. 解析函数连同极点及支点构成解析图象(gebilde)，实际上，这就是黎曼引进的黎曼曲面，不过他们的方法是完全不同的. 正如庞加莱所说，黎曼的方法首先是一种发现的方法，外尔斯特拉斯的方法则首先是一种证明的方法. 尽管外尔斯特拉斯以其严密性及算术性著称，仍然受到来自左右两方面的攻击. 克莱因十分钦佩黎曼的想像与直观，认为外尔斯特拉

斯的方法过于单一,对于数论等毫无裨益,而且失去了应用的源泉.另一方面,克洛耐克以他的“代数的代数”(algebraica algebraicae)即有限的算术反对外尔斯特拉斯的“无穷”算术方法.

尽管如此,外尔斯特拉斯给复分析以及代数函数论奠定了可靠的基础,开创了函数论的新领域.他的幂级数方法自然地对奇点进行分类,对于极点及支点进行统一处理,并严格定义另一种孤立奇点——本性奇点.另一方面,外尔斯特拉斯首先通过幂级数方法建立了多复变函数论,特别是证明了预备定理,其后半个多世纪,建立多复变情形的整函数及亚纯函数的基本定理一直是数学家们努力的方向.

第10章　微分方程

微分方程是数学分析的核心,可以说数学分析从一开始就是求解微分方程.微分方程问题有如下几类:

(1)提出微分方程,正确地表述问题.

(2)求解微分方程.

①精确求出解析解,表示成封闭形式;

②求出近似解析解;

③求出数值解.

(3)研究微分方程解的性质,特别是特殊函数的研究及定性理论.

(4)证明解的存在性、惟一性及稳定性.

微分方程一般来源于对自然法则的表述,例如牛顿运动方程,二体问题与多体问题的方程,热传导方程,弦、膜振动方程,波动方程以及拉普拉斯方程等.这些是18—19世纪研究的主要方程.偏微分方程通过分离变量法可化为常微分方程.微分方程的另一个来源是由变分原理得出的.某些微分方程可转化为积分方程.在求解微分方程的过程中,依据阶数、系数、变元数目、线性或非线性等等进行分类及推广,也得出一系列新的方程.1750年以后,函数观念以及微分方程解是为了求解函数才树立起来,而且逐步能正确提出边值问题及初值问题.从这时起,通

过无穷级数求解方程是主要的方法.19世纪初,傅立叶引进偏微分方程分离变量法,为特殊函数开辟了新天地.从实到复的过渡,开创了复域的微分方程理论,从而对线性常微分方程得出系统的理论.

19世纪30年代,刘维尔由于要证明黎卡提方程没有初等函数的积分,开始对微分方程的性质进行研究,这时感到求出微分方程的精确解既不可能,有时也无此必要.从而到19世纪80年代,庞加莱有意识地研究常微分方程定性理论以及稳定性理论,同时还提出渐近展开理论.19世纪和20世纪之交,数值解也得到重视.

柯西早在19世纪20年代就研究过存在性问题,到19世纪末才受到普遍重视,并且成为微分方程论研究的主要方向.由于长期只注意求解,二阶偏微分方程的分类直到1889年才由杜布瓦-瑞蒙给出.

1　常微分方程

1.1　特殊类型方程的特殊解法(1690—1740)

微分方程一词首先出现在莱布尼茨1676年给牛顿的信中,莱布尼茨在1684年的论文中开始公开使用.17世纪末18世纪初,莱布尼茨和伯努利兄弟对于寻求解决特殊微分方程的方法做出了自己的贡献.除了使用特殊方法解决特殊问题之外,对于一些一般形式的方程,莱布尼茨提出了一般性的解题思路.开始只是一阶常微分方程,1691年莱布尼茨首先引进分离变元法解形如

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

的方程,他把它化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{f(x)}=\frac{g(y)\mathrm{d}x}{y},$$

然后对两边进行积分.这种形式的常微分方程在 17—18 世纪有不少,但他并没有建立一般方法使变元分离,只是对两种特殊的方程达到变元分离的目的,一种是齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(y/x),$$

他通过变元替换 $y=vx$ 达到这个目的(1693);另一种是线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x),$$

他通过变元替换 $y=uv$ 达到同样目的(1694).

1695 年雅各布·伯努利提出求解一阶非线性常微分方程(后来被称为伯努利方程)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)y^n.$$

大约同时,1696 年莱布尼茨、伯努利兄弟独立得出自己的解法,其中莱布尼茨采用 $z=y^{1-n}$把伯努利方程化为线性方程,从而解决问题.1724 年威尼斯伯爵黎卡提引进了另一个非线性方程(黎卡提方程)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ay^2+bx^n,$$

并考虑求解问题,黎卡提和伯努利兄弟都对特殊的 n 值,得出这类方程可用分离变元法求解.但是对一般情形,却很难办到,这显示出求解非线性方程的巨大困难.1763 年法国数学家达兰

贝尔把伯努利方程推广成一般形式

$$\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2,$$

并命名为黎卡提方程.它作为典型的一阶非线性常微分方程一直受到数学家的重视,对于它的研究至今不衰.

对于形如

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

的一阶常微分方程,尼古拉·伯努利第一在 1721 年发现其可积条件

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

对于不可积情形,法国数学家克莱洛在 1734 年首先引进积分因子($K(x,y)$)的概念,即乘上 $K(x,y)$后,方程成为全微分

$$dV(x,y)=KM(x,y)dx+KN(x,y)dy,$$

从而得出隐式解

$$V(x,y)=C,$$

其中 C 为常数.大约同时,欧拉独立得出这些结果,而且还推广到高阶及多变元的情形.因此,到 1740 年左右,求解一阶常微分方程问题的初等方法大体完全得到了.

1691—1740 年间,各种实际问题,特别是弦振动问题,也导向二阶以及个别三阶、四阶常微分方程的求解问题.当时的主导思想是降阶.欧拉是这方面的能手,1728 年,他为求解方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ax^m}{y^n},$$

引入变元替换

$$y=e^v t(v),\quad x=e^{\alpha v},$$

得出 $t(v)$的二阶方程,然后固定 α,消去指数因子,即没有 v 项

出现,再作变换

$$z=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

就把二阶方程化为一阶方程了.在此前后,欧拉和其他人对于特殊的三阶、四阶方程也进行求解.不过,到1740年左右,常微分方程的研究还只能局限于求解特殊类型方程的特殊解法.

1.2 一般常微分方程的系统研究(1740—1800)

欧拉对于一般常微分方程的研究率先做出了开创性的贡献,这表现于他在1743年的论文中,对 n 阶常系数线性齐次方程得出一般解法,即方程

$$A\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+B\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+K\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Ly=0, \tag{1}$$

其中系数 $A,B,\cdots,K,L$ 是实常数.不仅如此,他对方程首先引进特解(valor particularis)及通解(aequatio intergralis completa,直译为方程的完全积分)的概念,并且指出,n 阶方程(1)的通解必定包含 n 个任意常数,而且是 n 个特解的线性组合.为了求出特解,他进行变元替换

$$y=e^{rx},$$

从而得出 r 的方程

$$Ar^n+Br^{n-1}+\cdots+Kr+L=0, \tag{2}$$

这被称为(1)的特征方程或指标方程或辅助方程.当 n 次方程(2)有实单根 q 时,则

$$ae^{qx}$$

是原微分方程(1)的一个特解;当方程(2)有 n 个实根时,可得 n 个特解,从而任何通解均可由此产生;当方程(2)有 k 重实根 q

时，他利用变元代换

$$y = e^{\alpha x}u(x)$$

求出

$$y = e^{qx}(a + bx + \cdots + lx^{k-1}),$$

这是微分方程含有 k 个任意常数的解；当存在共轭复根 $\alpha \pm \beta \mathrm{i}$ 时，他利用变元代换

$$y = e^{\alpha x}u,$$

把问题归结为求解

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \beta^2 u = 0. \tag{3}$$

他早已知道方程(3)的三角函数解法，对于复重根情形也不难给出．这样，他完整地解决了常系数线性齐次方程的情形．实际上，其他数学家也考虑过这个问题．例如，约翰·伯努利早在1700年就讨论过三阶情形；达兰贝尔在1748年讨论过二重根情形；丹尼尔·伯努利讨论过一般情形，但他的论文直到1751年才发表．1753年欧拉发表常系数非齐次线性方程的解法，即方程(1)的右端非0，而是 x 的函数 X．他的方法是方程两边乘上 $e^{\alpha x}\mathrm{d}x$，然后两端积分，再逐项与原方程比较，即可得出阶数降低的方程．1766年达兰贝尔指出，非齐次方程的通解是它的特解与系数相同的齐次方程的通解之和．为了求出非齐次方程的特解，1766—1767年拉格朗日系统地发展了常数变易法(1740年欧拉曾用该法研究二阶方程，丹尼尔·伯努利也用过)，从而完全解决了常系数线性方程的问题．

对于变系数线性常微分方程，拉格朗日进行了系统研究．在1762—1765年的论文中，他把欧拉关于常系数方程的结果推广到变系数情形，特别是齐次方程的通解也是特解的线性组合．他

还发现,当已知 n 阶齐次方程的 n 个特解之后,可以把方程降低 n 阶.而作为研究变系数方程的重要手段,拉格朗日引入"伴随方程"的概念.通过伴随方程可以把原方程的阶降低,从而使问题简化.这样,变系数线性微分方程的问题也取得重大进展.

这一时期在微分方程理论上的另一项重要进步是奇解观念的产生.奇解一般不能通过先给定积分常数确定数值再由通解得到.泰勒在他的《增量的直接和逆方法》(1715)中,最先辨认出一阶方程的奇解.他考虑方程

$$4x^3-4x^2=(1+z^2)^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2,$$

他利用变元替换

$$x=\frac{v}{y^2},\quad v=1+z^2,$$

把方程化为

$$y^2-2zyy'+vy'^2=1, \tag{4}$$

对它微分,得出

$$2y''(vy'-zy)=0,$$

令 $vy'-zy=0$,以 $y'=\frac{zy}{v}$ 代入,得出

$$y^2=v,\quad x=1.$$

他称这个解为方程(4)的奇解(singularis),但他并没有认识到它的特殊性.

克莱洛在 1734 年讨论了方程

$$y=xy'+f(y'),$$

这个方程后来被称为克莱洛方程.令 $p=y'$,得出

$$y=xp+f(p),$$

对 x 求导,得出

$$p = p + (x + f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x + f'(p)) = 0,$$

由$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$可得 $p = y' = c$,代入原方程得

$$y = cx + f(c). \tag{5}$$

这就是通解,而由 $x + f'(p) = 0$ 可得 $p = w(x)$,代入原方程得

$$y = xw(x) + f(w(x)).$$

克莱洛知道它不能由通解(5)得出,但不清楚它是通解(5)的直线族的包络.

欧拉在 1768 年出版的《积分法导引》中给出一个奇解的判别法,次年达兰贝尔加以推广. 1772 年拉普拉斯把奇解的概念推广到高阶方程及三个变元的方程(1775 年发表).但真正清楚的奇解概念是拉格朗日在 1774 年给出的(1776 年发表),首先他给出求奇解的一般办法,即由通解

$$V(x, y, \alpha) = 0$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha} = 0,$$

消去常数 α,得出奇解;其次,他明确给出奇解的几何解释,即奇解是积分曲线族的包络.不过,他没有认识到,一个奇解有时也可包含一支特解,因为有的非奇解的特解也可由联立方程

$$\begin{cases} f(x, y, y') = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

消去 y' 得出.而完整的奇解理论直到 100 年后才由凯雷及达尔

布在1872年真正建立起来.

1.3 级数解与特殊函数(1800—1860)

18世纪和19世纪之交,微分方程的发展有了转变:一是由于偏微分方程分离变元法的引入导致新的常微分方程的研究;二是对于这些常微分方程,往往不能像过去一样,得到封闭形式的解(积分),由此更多地采用无穷级数的方法,这样得出的函数往往不能用初等函数表出,从而称之为高级超越函数或特殊函数;三是由于不易得出通解,因此根据物理条件得出初值条件及边值条件,从而产生初值问题、边值问题以及特征值问题的提法,这些都成为19世纪常微分方程研究的主流,并持续至今.

无穷级数的方法可上溯到牛顿和莱布尼茨,他们都通过无穷级数解某些微分方程,无穷级数的系数都是由未定系数法来决定的.1750年左右,欧拉把无穷级数作为主要的分析工具系统地加以运用,特别是得出特殊的贝塞尔函数及超几何级数.

特殊函数中最重要的两类是贝塞尔函数和勒让德函数.贝塞尔函数也被称为圆柱函数,是二阶线性常微分方程(贝塞尔方程)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \tag{6}$$

的解 $J_n(x)$,其中常数 n 被称为贝塞尔方程及相应贝塞尔函数的次数.贝塞尔方程主要出现在用圆柱坐标或球极坐标表示的位势方程、波动方程及热传导方程之中,还有许多其他情形也涉及到它.贝塞尔函数的命名来源于德国天文学家贝塞尔在1824年对方程(6)的系统研究.但在此之前,已对许多特殊情形有过论述,其中最早的是1703年10月3日约翰·伯努利在给莱布尼

茨的信中，谈到$\frac{1}{3}$次的贝塞尔函数．1732 年，丹尼尔·伯努利在对重链振动的研究中出现 0 次贝塞尔函数(1738 年出版)．1764 年欧拉在研究圆形薄膜的振动时，首先通过无穷级数表示方程(6)的解．实际上，欧拉对 n 为半奇数情形证明 $J_n(x)$可化为初等函数．他还给出 $J_n(x)$的积分表示，并证明其零点有无穷多个．对于 $n=0, n=1$，他还引进与 $J_0(x)$及 $J_1(x)$线性独立的级数解(1776 年发表)．1769 年拉格朗日在研究行星绕太阳的椭圆运动时，得出黄经等展开式，实际上可表为贝塞尔函数．1818 年贝塞尔给出贝塞尔函数的积分表达式

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nu-x\sin u)\mathrm{d}u$$

以及无穷级数展开，他是对实 x 及实 n 考虑 $J_n(x)$的．1824 年贝塞尔还对整数 n 得出递推公式

$$xJ_{n+1}(x)-2nJ_n(x)+xJ_{n-1}(x)=0,$$

并证明 $J_n(x)$有无穷多个实零点．这些都构成研究特殊函数的基本方式．其后的发展大致沿着如下的途径进行：

(1)n 由正整数(半正整数)推广到负整数、分数、实数及复数．

(2)x 由实值推广到复值．

(3)寻求与 $J_n(x)$线性独立的解．

(4)寻求 $J_n(x)$等的表达式，特别是无穷级数展开及积分表示，以及渐近展开式．

(5)方程及函数的各种推广．

1867 年小诺意曼在他的著作《贝塞尔函数论》(*Theorie der Bessel-schen Funktionen*)中引入第二种贝塞尔函数，被称为诺意曼函数，现在通用的是汉克尔在 1869 年给出的，通常称之为汉克

尔函数,记为 $Y_n(z)$. 韦伯(Heinrich Weber,1842—1913)在 1873 年,施累夫利在 1875 年也给出其他的第二类贝塞尔函数.

大约同时,贝塞尔函数也完成由实到复的转变,经过几个人的工作,主要由洛美尔(Eugen Cornelius Joseph Lommel,1837—1899)在 1868 年完成.

勒让德函数是勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

的解 $P_n(x)$,它是由以球坐标表示的拉普拉斯方程用分离变元法得到的,最早由勒让德及拉普拉斯在 18 世纪 80 年代初开始研究. 当 n 为正整数时,勒让德函数被称为勒让德多项式. 早在 1784—1790 年,勒让德就发现勒让德多项式的正交性,即

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

这个性质后来成为把任意函数展开为勒让德多项式的基础,这种展开首先于 1833 年出现在莫菲(Robert Murphy,? —1843)的一本书中,由此开创了正交展开的分析新领域. 1816 年,法国数学家罗德里戈斯(Olinde Rodrigues,1794—1851)给出勒让德多项式的显式表示.

勒让德函数的积分表示先后由拉普拉斯(1800)、狄利克雷(1837)、雅可比(1843)等人得到. 第二类勒让德函数首先由海涅在 1843 年引进,他的著作《球函数手册》(1861)是其完美总结.

1.4 超几何级数

三角函数、贝塞尔函数、勒让德函数展开成幂级数都是超几

何级数的特殊情形.一般的超几何级数

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots \qquad (7)$$

最早出现在欧拉的《积分法导引》第二卷(1769)第11章中,其中他求积分

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}\mathrm{d}u,$$

得出

$$B(b,c-b)\left[1+\frac{ab}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot2\cdot c(c+1)}x^2+\cdots\right],$$

其中 $B(b,c-b)$是第一类欧拉积分,无穷级数满足微分方程

$$x(1-x)\mathrm{d}^2y+[c-(a+b+1)x]\mathrm{d}y\mathrm{d}x-aby\mathrm{d}x^2=0.$$

这类方程后来被称为超几何微分方程.在第8章中,欧拉还考虑更一般的方程

$$x^2(a+bx^n)\mathrm{d}^2y+x(c+ex^n)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+(f+gx^n)y\mathrm{d}x^2=0.$$

这个方程后来被高斯的老师普法夫加以研究,并写进他的《分析研究》(*Disquisitiones analyticae*)(1797)中.普法夫在书中专门开辟一章讲“超几何级数”,正是他首次在上述意义下用“超几何”这个名称.

高斯在1800年左右研究算术—几何平均以及椭圆积分时,多次遇到超几何级数的特殊情形,并知道它们满足超几何微分方程.他在1805年9月3日给贝塞尔的信中谈到,在天文计算中,这种级数收敛极快,这些无疑都导致高斯系统地研究超几何级数,从而导致1812年论文的发表.这篇论文以高斯的完美风格写成,详尽而全面地讨论超几何级数的性质.首先,高斯引进

记号 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$来表示超几何级数(7)表示的函数;其次,他十分明确地提出当$|x|<1$时级数收敛,$|x|>1$时级数发散,$|x|=0$时不定,这是最早的明确的函数级数收敛判据.

高斯还引进相关函数的概念,$F(\alpha,\beta,\gamma;x)$的相关函数是$F(\alpha\pm1,\beta\pm1,\gamma\pm1;x)$,加上对 α,β,γ 等系统地置换,他得出$F(\alpha,\beta,\gamma;x)$以及 15 对相关函数所满足的 15 个等式,例如第15 个等式为

$$\begin{aligned}0=&\gamma(\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x)F(\alpha,\beta,\gamma;x)\\&+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1;x)\\&-\gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma-1;x).\end{aligned}$$

由此可知,任何三个函数 $F(\alpha\pm m,\beta\pm n,\gamma\pm p;x)$(其中 m,n,p 是整数)之间存在线性关系,它们以有理函数为系数.高斯引进这些相关函数的目的是计算诸如

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)}{F(\alpha,\beta,\gamma;x)}$$

的商.

高斯还引入高斯阶乘函数

$$\Pi(k,z)=\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot k\cdot k^2}{(z+1)(z+2)\cdots(z+k)},$$

并定义

$$\Pi(z)=\lim_{k\to\infty}\Pi(k,z),$$

借助于它们,可得

$$F(\alpha,\beta,\gamma;1)=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)},$$

特别是用$\Pi(z)$可以求出一系列积分的值,例如高斯极感兴趣的双纽线积分

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\Pi\left(\frac{1}{4}\right)\Pi\left(\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)},$$

$$B=\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\Pi\left(\frac{3}{4}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{3\Pi\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\frac{\Pi\left(-\frac{1}{4}\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{4\Pi\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

因此推出

$$AB=\frac{\pi}{4}.$$

高斯研究超几何级数的第二篇论文生前没有发表(在他去世后收入《全集》第三卷(1876)中),在这篇论文中,他明确地引入复变元,并引进超几何微分方程的与 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$线性独立的第二个解.他认识到,微分方程除了 0,1(及 ∞,他避免用无穷)外,解处处存在,在这里他遇到了解析开拓问题以及单值性问题,他实际上已考虑到变元 x 过渡到复量 z 时级数的收敛,并提出经历不同道路的单值性问题,正如在其他领域一样,高斯的思想后来由其他数学家首先发表.

在高斯之后,库默尔首先发展了超几何微分方程.1834 年他开始考虑高斯的第一篇论文所遗留下来的问题,即不同变元的解之间的关系.1836 年他得到变元 x 变为$\frac{1}{x}$,$1-x$,$\frac{1}{1-x}$,$\frac{x}{1-x}$,$\frac{1-x}{x}$后得出的另外 24 个解,这是完全组,而且它们之间划分为 6 个等阶组,这 6 个组之间,其中有 4 个 3 组之间的线性

关系.库默尔在 1836 年论文的结尾曾考虑到 α,β,γ 是实数而 x 是复数时,会发生什么情况,不过他只考虑极为特殊的情形.真正过渡到复值情形,无可争议应该归功于黎曼,他是把微分方程引入复域的真正奠基者.

黎曼在 1857 年的论文中把超几何级数称为高斯级数.黎曼的成就在于他把超几何级数及超几何微分方程由实域扩充到复域,并且避开传统的那种研究函数必须用具体表达式来计算,而用"公理的"方法得出高斯、库默尔等人通过黎曼计算才得出的关系式.他最重要的成就在于把复变函数论引进常微分方程而预示微分方程的解析理论.他的具体做法是引进复值函数 P 函数

$$P\begin{Bmatrix} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma; x \\ \alpha', \beta', \gamma' \end{Bmatrix}$$

满足三个条件:

(1)除了 a,b,c 之外,P 是 x 的有限单值函数.

(2)任何三个 P 函数 P', P'', P''' 都存在线性关系,$C'P' + C''P'' + C'''P''' = 0$,其中,$C', C'', C'''$ 是常数.

(3)P 函数可写成 $C_\alpha P^{(\alpha)} + C_{\alpha'}P^{(\alpha')}$,使

$$P^{(\alpha)}(x - Q)^{-\alpha},$$
$$P^{(\alpha')}(x - Q)^{-\alpha'}$$

在 $x = a$ 处仍是单值,且既不等于 0,也不等于 ∞,同样,P 函数可表为

$$C_\beta P^{(\beta)} + C_{\beta'}P^{(\beta')},$$
$$C_\gamma P^{(\gamma)} + C_{\gamma'}P^{(\gamma')},$$

它们分别在 $x = b, x = c$ 处具有类似的性质,且 6 个量 $\alpha,\beta,\gamma,$

α', β', γ'满足下面两个假定:

(1)差 $\alpha-\alpha', \beta-\beta', \gamma-\gamma'$ 均非整数;

(2)$\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma'=1$.

1.5　斯图姆—刘维尔理论

斯图姆—刘维尔理论是 19 世纪数学的一大成就,它不仅首次明确提出特征值(或本征值)和特征函数(或本征函数)问题,而且是傅立叶展开的大规模推广,即"任意"函数可展开成"自伴"线性椭圆型边值问题的特征函数的级数.斯图姆及刘维尔从一开始就为这个理论建立了一个极好的框架,以致其后 100 多年,只是在这个框架的基础上修修补补并加以推广.

斯图姆从 1833 年起开始研究当时大家极为关注的各种形状物体的热流问题与弹性体的微小振动问题,这些都导致二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]+G(x)u=0, \quad p(x)>0 \tag{8}$$

的求解问题.这种问题在当时只知道很少情形可以写出完全积分,而且即使表示成"封闭形式",从级数形式或积分形式也很难看出解的性质.斯图姆的思想是如何从方程直接得出解的性质,特别是振动性质,为此他在 1836 年《刘维尔杂志》第一卷上发表了长篇论文,其中证明了著名的分离定理及比较定理.前者是指方程任何两个解的零点相互分离交替出现,后者是指每个解相距零点的距离随着 p 的增加而增加,随着 G 的增加而减少.刘维尔发表在同一杂志上的论文中,更明确地提出在边界条件

$$\begin{aligned} u'(a)-\alpha u(a)=0, \\ u'(b)+\beta u(b)=0 \end{aligned} \tag{9}$$

下的特征值问题,令

$$G(x)=\lambda\rho(x)-q(x),\quad \rho(x)>0,$$

其中 λ 被称为特征值(他称之为“方程的根”),而且证明如下性质:

(1)特征值有无穷多,完全是实数且不等,按顺序排列 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$,除 λ_1 可能是 0 外,其余均为正数,它们对应的特征函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$ 是微分方程仅有的非零解.

(2)如 $\lambda_m\neq\lambda_n$,则

$$\int_a^b \rho u_m(x)u_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

此即正交条件.

(3)满足边界条件(9)的函数 f 可展成级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n(x),\tag{10}$$

其中

$$c_n=\int_a^b \rho f u_n(x)\mathrm{d}x.$$

(4)贝塞尔不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\leqslant\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

在 1837 年的论文中,刘维尔证明任意函数展开的级数(10)收敛,从而证明了波瓦松及斯图姆早先的猜想.当然,他还没有一致收敛的原理.这个普遍的展开原理,从拉格朗日时代开始,一直是争论的对象.拉格朗日在他的《解析力学》(1788)中,讨论有限自由度力学系统小振动时,已有这种想法.马丁·欧姆、波瓦松以及瑞利都论证过这个原理,不过严格的证明直到 20 世纪才得出.

刘维尔的另一项重大成就是求出第 n 个特征值的渐近公式

$$\lambda_n \sim \left| \frac{n\pi}{\int_a^b \left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x} \right|, n \to \infty.$$

在其后 100 年间,这一公式多次被重复发现,至今仍是数学物理及数学中的重要研究对象.在这个过程中,他首次把方程(8)变换为第一类积分方程.

从历史上看,斯图姆—刘维尔理论的伟大意义有如下四个方面:

(1)它是第一个特征值—特征函数理论,而比较容易的线性代数的特征值—特征向量理论的出现反而较晚,沿着这个方向向无穷维线性方程组推广也是后来积分方程论的一个来源.

(2)它是一类典型物理问题的极佳数学模型,从振动的频谱到后来的薛定谔方程的能谱,都可以在它的框架中得到体现.

(3)它提供了正交函数论的基础,而傅立叶的正弦、余弦函数只不过是其中最简单的,而且所有好的性质都依然保留.

(4)在数学上它预示了谱、自伴性、希尔伯特空间等理论,是算子谱理论的先驱,也是泛函分析的核心内容.

1.6　微分方程解析理论(1860—1910)

顾名思义,微分方程解析理论是解析函数论与常微分方程结合的产物.由于德国数学家富克斯最早于 1866 年首先对线性微分方程进行统一,这一部分理论也被称为富克斯理论.富克斯理论至少有四个来源.

(1)在求解变系数线性常微分方程时,如果系数具有奇点

(如贝塞尔方程及勒让德方程等),用级数展开第二个解往往会遇到困难,在奇点领域内级数展开的形式也较为特殊,因此有必要研究在奇点邻域内解的性态.这方面的研究首先是由法国数学家布瑞奥和布盖在1856年对一阶线性方程进行的.

(2)外尔斯特拉斯关于解析函数论的系列讲演.富克斯的处理方法完全是遵循外尔斯特拉斯的幂级数展开及解析开拓的思路发展的.富克斯在1866年的论文中说,“在1863年夏季学期(外尔斯特拉斯)讲演阿贝尔函数论的导言中已经发展线性微分方程理论”,他基本上追随这种思想.

(3)柯西的常微分方程及方程组的存在性定理.由此得知解只有在系数为奇异的点处才是奇异的.

(4)黎曼得到奇点邻域解的性态的方法,他对高斯超几何方程的处理方法既具有普遍性,也有启发性.黎曼本人在1857年研究过一般情形,但手稿直到1876年才发表.

从1865年起,富克斯把已成熟的复变函数理论移植到常微分方程领域,开创了系统的微分方程解析理论.他首先考虑 n 阶线性常微分方程

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \cdots + p_n(z) w = 0, \qquad (11)$$

其中 $p_1(z),\cdots,p_n(z)$ 是有理函数,因此方程的奇点都是极点.他通过分析方程的形式幂级数解的收敛性,证明奇点是固定的,即不依赖于积分常数,这样,在还不知道解的情况下,就可以知道奇点的位置.

富克斯最重要的贡献之一是引进正则奇点的概念. a 被称为正则奇点,如果

$$p_r(z) = (z-a)^{-r} p(z),$$

其中 $p(z)$在 $z=a$ 及邻域内是解析的,即 $p_1(z)$最高只有一阶极点,$p_2(z)$最高只有二阶极点,依此类推.如果方程(11)在扩充的复平面(包括∞)上只有正则奇点,方程(11)就被称为富克斯型方程.这样不仅以前知道的绝大多数方程(特别是超几何方程)是富克斯型方程,而且又扩大到许多方程,对于这些方程,可以通过幂级数把解明显地写出来.特别是假定原点是正则奇点,富克斯在 1866 年,托梅在 1872 年证明方程可写为

$$z^n\frac{\mathrm{d}^n w}{\mathrm{d}z^n}+z^{n-1}p_1(z)\frac{\mathrm{d}^{n-1}w}{\mathrm{d}z^{n-1}}+\cdots+z\,p_{n-1}(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+p_n(z)w=0, \tag{12}$$

其中 $p_1(z),\cdots,p_n(z)$在 0 点的邻域内解析,那么方程解可写成

$$w=\sum_{v=0}^{\infty}c_v z^{\rho+v}.$$

对每个解可以定出 ρ 及 c_v.弗罗宾尼乌斯在 1873 年完成了这项工作,他明显地定出方程 n 个线性独立的解.

大多数数学物理方程均可归结为二阶方程,克莱因和博歇(Maxime Bôcher,1867—1918)证明它们都可以表为惟一形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{z-a_j}\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\frac{A_0+A_1z+\cdots+A_{p-3}z^{p-3}}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{p-1})}w=0,$$

其中 $a_j(1\leqslant j\leqslant p-1)$为任意复数,$A_k(0\leqslant k\leqslant p-4)$也任意,但 $A_{p-3}=\dfrac{(p-2)(p-4)}{16}$. 经过适当的变元替换可以得出希尔(George William Hill,1838—1914)的月球运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+(C_0+C_1\cos 2z+\cdots+C_p\cos 2pz)w=0.$$

在特殊情况下,可以得到马丢方程($p=1$)

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+(a+b\cos 2z)w=0$$

(它是马丢在研究椭圆膜的振动时于1873年引进的),拉梅方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}-(h+n(n+1)\mathscr{P}(z))w=0$$

(其中$\mathscr{P}(z)$是外尔斯特拉斯椭圆函数),以及许多其他方程.至此,二阶方程的正则奇点情形得到圆满解决.

对于有理系数线性常微分方程(11)存在非正则奇点时,问题比较复杂,它由庞加莱在1885年开始研究,这时虽然也可以得到形式幂级数解,但形式解并不收敛.为此,庞加莱引进渐近展开的概念,而且在强的限制条件下,在奇点的角域内,形式解表示解的渐近展开.不过在一个角域内,n个形式解渐近表示的一组基本解与在另一角域内表示的一组基本解并不相同,各个角域还有连接问题,即求出一组到另一组的变换矩阵.对于线性方程组

$$y'=A(z)y,$$

其中$A(z)$是$n\times n$矩阵,若a是$A(z)$矩阵元的极点,可通过变元替换变到∞.在这种情形下,美国数学家柏克霍夫(George David Birkhoff,1884—1944)在1909年解决了这个问题,其后对于各种情形有许多进一步的研究.

19世纪末,复域中的常微分方程的研究还深入到非线性方程领域,非线性方程问题一般极为困难,有许多与线性方程极不相同的现象.例如,许多方程的奇点不像线性时那样是固定不动的,而是随解而移动,换句话说,解的奇点可能不只是方程的奇点,这种奇点被称为可移奇点.另外,奇点也不局限于极点,还可能同时出现本性奇点及支点.

对于简单的情形,从1850年起,布瑞奥和布盖研究了一阶方程中只有可移极点的情形,其后庞加莱和毕卡继续这方面的

工作.其中最突出的贡献是班勒卫和他的学生在 1888—1914 年间做出的,班勒卫的目的主要是发现新的超越函数.他研究二阶方程

$$w'' = R(w', w, z),$$

其中 R 是 w', w 的有理函数,也是 z 的解析函数.如果方程只有固定奇点,它可以化为 50 种类型的典范方程,其中包括线性方程、黎卡提方程以及其他已知方程.但还有 6 种类型方程不能化为已知方程,其解也不能由已知超越函数表出,这 6 种类型方程被称为班勒卫方程,其解被称为班勒卫超越函数.其方程的典范形式可以写成如下形式($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是任意复数):

(1) $w'' = 6w^2 + z$;

(2) $w'' = 2w^3 + zw + \alpha$;

(3) $w'' = \dfrac{w'^2}{w} + e^z(\alpha w^2 + \beta) + e^{2z}\left(\gamma w^3 + \dfrac{\delta}{w}\right), \beta\delta \neq 0$;

(4) $w'' = \dfrac{w'^2}{2w} + \dfrac{3}{2}w^3 - 4z\,w^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \dfrac{\beta}{w}$;

(5) $$w'' = w'^2\left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right) - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma\frac{w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1};$$

(6) $$w'' = \frac{w'^2}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)w' + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{z}{w^2} + \gamma\frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right).$$

这些结果首先由班勒卫在 1900—1902 年间得到的,他实际上只确定了前三种类型.他的学生继续补充、改进他的结果而最终达到完备化.其中,特别是冈比埃(Bertrand Gambier, 1879—1954)在 1910 年发表的论文中,对一阶、二阶无可移奇点方程作了总结.

1.7 微分方程定性理论(1880—1930)

绝大部分微分方程是不可能用明显的函数甚至积分的形式解出来的,特别是非线性方程及方程组.对微分方程的研究大致沿着两个方向发展,一是对于具体的方程求出近似解及数值解,由此发展出许多行之有效的方法;二是定性方法,即在没有具体解出的情况下,由方程本身出发也可以获得方程的解的一些重要信息.庞加莱对这两个方向都做出了巨大的贡献.

微分方程定性理论是庞加莱首先创立的,他分别于1881年,1882年,1885年,1886年在一组以《微分方程所定义的积分曲线》为题的4篇论文中,系统地建立了这个理论.他在文章中清楚地阐述了自己的思想:

“因此很有必要研究微分方程所定义的函数本身,而不谋求把它简化为更简单的函数,正如对代数函数,过去试图简化为根式,而现在则直接研究……”

“因此发现微分方程(的解)的性质是极为有兴趣的问题.在这方面已经迈出了第一步,即在平面上一点的邻域(局部地)研究给它函数.今天问题是在全平面上大范围地研究这个函数.”

“一个函数的完全研究包含两部分:一是定性的部分,或者对该函数所定义的曲线的几何研究.二是定量的部分,或者对该函数的值进行数值计算.例如在研究代数方程时,开始利用斯图姆定理求出实根数目,这就是定性部分,然后再计算这些根的数值,这就构成对函数的定量研究.”

他的论文分为五个部分:

(1)奇点附近积分曲线的几何拓扑结构;

(2)奇点的指数和奇点的整体分布;

(3)极限环问题;

(4)环面上的积分曲线;

(5)空间周期解的存在.

庞加莱的目的是要寻求解决下列问题:解是否描绘出一条封闭曲线?是否总是处于平面某一区域之内?总之,解是稳定的还是不稳定的?

庞加莱研究的方程由简到繁,开始他研究方程

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}$$

的解,其中 P,Q 是 x,y 的解析函数,最简单的当然是 x,y 的多项式,他只研究实系数的情形.庞加莱发现,在决定解(在 (x,y) 平面上表现为轨线)的类型和解的行为时,微分方程的奇点起着决定性的作用.所谓奇点,就是使 P 与 Q 同时为0的点.他把 P,Q 展成幂级数

$$P(x,y)=a_1(x-\alpha)+a_2(y-\beta)+\cdots$$

$$Q(x,y)=b_1(x-\alpha)+b_2(y-\beta)+\cdots$$

a_1,a_2,b_1,b_2 不全为0,然后他解特征方程

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 \\ b_1 & b_2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

的根,根据根 λ_1,λ_2 的不同,他把一阶奇点分成三类,并指出奇点附近原微分方程的解的性质:

(1)结点(noeud),λ_1,λ_2 为同号实根,这时从结点附近出发的轨线都无限趋近它;

(2)鞍点(col),λ_1,λ_2 为异号实根,这时从鞍点附近出发的轨线中有两条趋近它,两条远离它,其余的以这4条分界线为渐近线.

(3)焦点(foyer),λ_1,λ_2 为共轭复数 $\alpha \pm i\beta$,这时轨线螺旋式趋近或远离焦点,当 $\alpha=0$ 时,焦点退化为中心.

他还定义了奇点的指数,研究了奇点附近解的稳定性问题.

接着他研究闭轨线,即当 $\lambda_1,\lambda_2=\pm i\beta$ 时,中心周围为闭轨线所围绕,特别是引入极限环的概念,所谓极限环就是孤立的闭轨线.根据极限环附近的解的性质,他把极限环分为稳定的、不稳定的及半稳定的三类,并提出了极限环的存在定理.他的研究成为后来研究的出发点.关于奇点的研究,瑞典数学家本狄克逊在 1901 年发表题为《微分方程定义的曲线》的论文,讨论了庞加莱未曾讨论的奇点,得出闭轨线存在的判据.而由庞加莱开始的极限环研究,虽经历了曲折的过程,至今仍然结果很少.极限环中的主要问题包括:存在性问题、稳定性问题、个数问题及相互位置问题.关于极限环存在的判据,庞加莱证明一个闭轨线是极限环的一个必要条件是其内包括的奇点指数之和为 1. 本狄克逊在 1901 年还提出否定性判据:在相平面的单连通区域内,若 $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$不变号,则其中没有闭轨线(当然也没有极限环). 1923 年杜拉克(Henri Claudius Rosario Dulac, 1870—1955)把上述判据进一步推广,在相平面的半连通区域内,若$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}$不变号,则其中没有闭轨线,其中 $p(x,y)$是任意有一阶偏导数的函数.

希尔伯特在 1900 年第二届国际数学家大会上提出了 23 个问题,其中第 16 个问题的第一部分是求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)} \tag{13}$$

的极限环的最大数目 E_n 和位置,其中 P_n,Q_n 为次数 $\leqslant n$ 的多

项式.1923年杜拉克证明方程(13)的极限环数目有限,这是向解决希尔伯特问题迈出的第一步.不过60年之后,发现其证明有漏洞,完整的证明最终于1987年才完成.

2 偏微分方程

2.1 一阶偏微分方程

一阶偏微分方程的研究与常微分方程及二阶偏微分方程不太一样,一开始它的实际背景并不清楚.到19世纪,特别是由于动力学方程被化为一阶偏微分方程,它的研究才受到重视,并取得巨大进展.它的发展大致可分为五个阶段:

(1)1740—1770年,主要是一些特殊的方程求解问题.

(2)1770—1840年,主要是拉格朗日提出系统方法,以后经普法夫、柯西到雅可比,逐步把一阶偏微分方程化为求解常微分方程组的问题.

(3)1840—1870年,雅可比引入全新的方法(雅可比第二方法),建立雅可比理论.

(4)1870—1930年,S·李发展变换群理论.

(5)1930年以后,由于嘉当的工作,把外微分形式法变成解决理论及应用问题的主要工具.

最一般的 n 变元一阶偏微分方程可以表为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, z_{x_1}, z_{x_2}, \cdots, z_{x_n}) = 0, \tag{1}$$

其中

$$z_{x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, z_{x_n} = \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

早期最简单的二变元情形,常记作

$$f(x,y,z,p,q),$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

1840年左右,两种形式的一阶偏微分方程几乎同时出现,一种是如上的所谓偏导数方程,这在欧拉1734—1735年的著作(1740年发表)中已经遇到;另一种是克莱洛在1739年把常微分方程

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

推广成

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0, \tag{2}$$

并研究其可解条件.他证明方程(2)存在一族解

$$V(x,y,z)=C$$

的条件是

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=R.$$

这是第一个可积条件的例子,其后为雅可比、克莱布什、弗罗宾尼乌斯等人加以推广.

一般的线性方程很快就得到了解决.1768年达兰贝尔解决了常系数方程的问题,1776年拉普拉斯及拉格朗日独立求解线性方程

$$Pp+Qq=R. \tag{3}$$

拉格朗日引入齐次方程

$$P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=0, \tag{4}$$

并证明,如果

$$u(x,y,z)=C$$

是方程(3)的解,则

$$f=u(x,y,z)$$

是方程(4)的解,反之亦然.同时,方程(4)又与常微分方程组

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{5}$$

有关,即如果

$$u(x,y,z)=C_1,$$

$$v(x,y,z)=C_2$$

是方程组(5)的解,则

$$f=u(x,y,z),$$

$$f=v(x,y,z)$$

是方程(4)的两个独立解,反之亦然.由此

$$u(x,y,z)=C_1,$$

$$v(x,y,z)=C_2$$

是原偏微分方程(4)的解,且

$$\Phi(u,v)=C$$

是其通解,这里 Φ 为 u,v 的任意函数.该论文于 1779 年发表,给出证明的概要,1785 年给出详细的证明.1781—1787 年,拉格朗日进而把两个变元推广到多个变元,其工作的重要意义在于把解一阶偏微分方程的问题化为解常微分方程组的问题,这成为其后发展的一条主要线索.

从历史上看,似乎当时对线性及非线性之间的差别的认识并不清楚,欧拉在《积分法导引》第三卷(1770)中,讨论了二变元一阶偏微分方程.拉格朗日在仔细研究了欧拉的工作后,大大地加以改进及推广,得出一般的漂亮结果.由

$$f(x,y,z,p,q)=0,$$

他解出 q,得出

$$q=Q(x,y,z,p),$$

它同

$$p=P(x,y,z)$$

有无穷多公共积分曲面,这样

$$\mathrm{d}z-p\mathrm{d}x-q\mathrm{d}y$$

乘上积分因子 $M(x,y,z)$后,成为恰当微分 $\mathrm{d}N$.为此,应满足可积条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial x}=-\dfrac{\partial(M_p)}{\partial z},\\[2mm]\dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{\partial(M_q)}{\partial z},\\[2mm]\dfrac{\partial(M_p)}{\partial y}=\dfrac{\partial(M_q)}{\partial x}.\end{cases}$$

由这三个方程消去$\dfrac{\partial M}{\partial x}$及$\dfrac{\partial M}{\partial y}$,得出

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial z}+q\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

由 $q=Q(x,y,z,p)$消去 q,得到线性方程

$$-Q_p\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+(Q-pQ_p)\frac{\partial p}{\partial z}-Q_x+pQ_z=0,$$

从而把非线性方程化为线性方程.

拉格朗日不仅提出一阶偏微分方程的解法,而且早在1774年还提出一些基本概念.他称任一包含两个任意常数的解

$$V(x,y,z,a,b)=0 \tag{6}$$

为完全积分(intégrale complète)或完全解,当 a,b 有某种关系时,$b=\Phi(a)$,可以得到单参数族解曲面,其包络被称为通积分

(generale),它可由

$$\begin{cases} V(x,y,z,a,\Phi(a))=0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}=0 \end{cases}$$

消去 a 得出,将方程组

$$\begin{cases} V(x,y,z,a,b)=0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a}=0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial b}=0 \end{cases}$$

消去 a,b 后,得出的解被称为奇异积分.

1784年巴黎科学院提出大奖问题,求解一般的一阶偏微分方程.除拉格朗日的上述研究外,只有法国数学家夏尔比(Pierre Charpit,? —1785)进行研究,他把两个独立自变元问题化为常微分方程组(1784),但与拉格朗日的方法没有本质的不同.他们企图推广到多个变元,但没有成功.直到1819年,柯西才首先取得成功.

夏尔比的手稿到20世纪初才被发现,其中的内容实际上是在拉克鲁瓦的《微积分通论》第2卷第2版(1814)中透露出来的.同样,普法夫首先把一阶偏微分方程的积分推广到大于两个变量的情形.值得注意的是,他并没有沿着法国人的道路,而是继续欧拉的形式分析方法,也就是把未知函数的偏导数 $z_{x_1},\cdots,z_{x_n}$ 也看成独立变量.普法夫在1814—1815年向柏林科学院提出60页的长篇论文《完全积分任意多变元一阶偏微分方程的一般方法》(*Methodus gene-ralis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentia vulgares, utrasque primi ordins, inter quoteumque variabiles, complete integrandi*),该文在7页的历史引论

之后,研究了 14 个问题及其解法.第 1 个问题是三个变量的偏微分方程的完全积分.第 2 个问题是把任意四变量一阶偏微分方程化简成三变量方程,再把三变量方程化简成两个方程的方程组加以积分.第 3 个问题是把五变量一阶常微分方程通过三个方程的方程组加以积分.第 4 ~ 6 个问题分别是将第 1 ~ 3 个问题中的变量数加 1.第 7 ~ 9 个问题再进一步,第 10、11 个问题更进一步,这样可看出一般方法来.因此,第 12 ~ 14 个问题对变量的数目就不再加以限制了.

我们遵照普法夫的记号,把

$$z_{x_i}=\frac{\partial z}{\partial x_i}$$

记作 p_i,他把 p_n 解出来,方程变成

$$p_n=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n,z,p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}),$$

他把方程约化为等价形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&-p_1\mathrm{d}x_1-p_2\mathrm{d}x_2-\cdots-p_{n-1}\mathrm{d}x_{n-1}\\&-\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n,z,p_1,p_2,\cdots,p_{n-1})\mathrm{d}x_n\\&+O_1\mathrm{d}p_1+\cdots+O_{n-1}\mathrm{d}p_{n-1}=0.\end{aligned}$$

于是,他考虑更一般的全微分方程

$$A_1(y_1,\cdots,y_k)\mathrm{d}y_1+\cdots+A_{2n}(y_1,\cdots,y_k)\mathrm{d}y_k=0,\tag{7}$$

其中 $k=2n$.通过变量代换,他把它化为 $2n-1$ 个变量的同样形式的方程,他注意到这种化简只有在偶数情况下才可以,但未加以证明.对于 k 为奇数$(2n-1)$情形,普法夫利用另一种方法把它化简为 $2n-2$ 个变量的同样形式的方程.在这种情况下,最后可以得出 $y_1,\cdots,y_k$ 及一个任意函数的 n 个关系式.对于方程(7),即含有 $x_1,x_2,\cdots,x_n,z,p_1,\cdots,p_{n-1}$及一个任意函数的 n 个关系式,由这些关系式,消去 $p_1,\cdots,P_{n-1}$后,即得出通解.

这样,普法夫原则上解决了方程(7)的积分问题,不过在变量数由 $2n$ 降至 $2n-1$ 的过程中,必须解一个 $2n-1$ 阶常微分方程组,因此整个过程要解 n 个常微分方程组. 普法夫没有谈到这些常微分方程组的可解性及其与原方程(7)的完全可解性的关系,因此,他的方法后来由于柯西及雅可比的更完备的工作而不再被人们提起. 不过,他的名字却因为他首先引进全微分方程(7)而永垂史册,普法夫方程及普法夫问题至今仍是数学家热心研究的领域.

柯西开始研究一阶偏微分方程的积分问题时,还不知道普法夫的工作,但他在 1819 年发表的论文《关于多个变元一阶偏微分方程的积分的注记》中声称,他的方法与普法夫的方法不同. 实际上,他只考虑 2 个和 3 个变元的方程,他指出对一般情形没有困难. 他用的是安培在 1815 年引入的变量代换法,例如

$$x = x, \quad y = y(u, x),$$

然后把方程的解化归为一个常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\dfrac{\partial f}{\partial p_i}} = \frac{\mathrm{d}z}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \dfrac{\partial f}{\partial p_k}} = \frac{\mathrm{d}p_j}{-\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \dfrac{\partial f}{\partial z} p_j} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{8}$$

的积分,而不是普法夫的 n 个常微分方程组,而且他还用蒙日的特征线理论造出解来. 不过他的论文由于发表在一个不知名的刊物上而没有受到注意. 1841 年他又发表一篇论文,论述自己的方法. 不过,雅可比早在 1827 年已独立发展普法夫的理论,形成自己的"第一方法". 他从普法夫得到的 n 个常微分方程组(8)中的第一个出发,积分后得出 $2n$ 个独立积分

$$u_i(x_1, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots, p_n) = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, 2n-1,$$

$$f(x_1, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0,$$

然后,他取 $u_1,\cdots,u_{2n-1},z$ 为新变元.从这点起,他的方法不同于普法夫.关键是通过一次变量替换把 $2n$ 个变元的方程变成 n 个变元的方程.这个反映在 1837 年的论文中的想法,是对哈密尔顿在 1834—1835 年的论文中提出的想法的推广,雅可比称之为哈密尔顿方法的一般化.1842—1843 年,他在哥尼斯堡大学讲授动力学时,再一次论述他的第一方法.他的著名讲义《动力学讲义》(*Vorlesungen uber Dynamik*)在他去世后,由克莱布什于 1866 年编辑出版.

再看雅可比第二方法.雅可比第一方法把积分一阶偏微分方程的问题化为积分常微分方程组的问题,而哈密尔顿—雅可比的动力学理论又把动力学方程由常微分方程组化为一阶偏微分方程.这样一来,无形中是个循环.因此,雅可比还是要求一个直接求解一阶偏微分方程的方法.早在 1827 年他已经指出,"还没有方法把拉格朗日的方法推广到多个变元上".不晚于 1838 年,他实现了这个目标.不过,他的 1838 年手稿经克莱布什整理,直到 1862 年才发表.

第二方法大意如下:求

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,z,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0,$$

不失一般性,它可表为

$$f_0(x_1,x_2,\cdots,x_n,z,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0.$$

它同要求的 $p_1,\cdots,p_n$ 之间的另外 $n-1$ 个关系式

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,z,p_1,\cdots,p_n)=k_i,\ i=1,2,\cdots,n-1$$

(其中 k_i 为任意常数)联立起来,可把 p_i 解出来并表示成 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数,使得

$$p_1\mathrm{d}x_1+p_2\mathrm{d}x_2+\cdots+p_n\mathrm{d}x_n$$

为全微分,则这个全微分的积分即所求的完全积分.雅可比证明,上述微分形式为全微分的充分且必要条件为

$$(f_i,f_k)\equiv\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\frac{\partial f_k}{\partial p_l}-\frac{\partial f_i}{\partial p_l}\frac{\partial f_k}{\partial x_l}=0,i,k=0,1,\cdots,n-1.$$

雅可比通过这$\frac{n(n-1)}{2}$个条件来求 $f_1,\cdots,f_{n-1}$.因 f_0 已知,由一阶线性偏微分方程

$$(f_0,f_1)=0$$

可解出 f_1 来,再由

$$(f_0,f_1)=0,$$

$$(f_1,f_2)=0$$

解出 f_2 来,如此下去,即可分别得出 $f_1,f_2,\cdots,f_{n-1}$.在这个过程中,他得出雅可比恒等式

$$(f,(\varphi,g))+(\varphi,(g,f))+(g,(f,\varphi))=0.$$

这个方法开辟了一个全新的方向.实际上,他已经接近切触变换及无穷小变换的概念.这些理论在他的论文及讲义发表后不久,便由 S·李明确地表述出来.

从历史上讲,雅可比的一阶偏微分方程理论及动力学理论在发表之前,通过他的学生以及他同刘维尔等人的通信而为数学界知道一些,不过其丰富的内容并不为人所知.因此,刘维尔、奥斯特洛格拉德斯基等重新发现其中一些结果,当然这也在意料之中.不过,他的结果一发表,立即引起世人的密切注意,从而推动该理论更上一个新台阶.

S·李主要以李群,更确切地说,是连续变换群而知名.但在他 1874 年首先发表变换群理论之前,对于几何和一阶偏微分方程理论已经做出贡献,而且它们也是变换群的基础和出发点.

S·李的切触变换理论首先在1870年用挪威文发表了大纲，其后在1871年和1872年分别用挪威文和德文发表了详细的内容.1872年他开始研究并发表一阶偏微分方程的理论，并提出一阶方程局部等价问题的解.其后他也发表一些方程的理论，但主要方向集中于连续变换群.在他与恩格尔(Friedrich Engel, 1861—1941)合著的《变换群理论》中，从第Ⅱ卷(1890)起大部分篇幅实际上是讨论切触变换及一阶偏微分方程理论的，其后在同谢弗斯(Georg Scheffers, 1866—1945)合著的《具有已知无穷小变换的微分方程讲义》(1891)及《切触变换的几何学》(1896)等著作中更系统地加以论述.

S·李作为一个富有创造性的数学家，同克莱因一样，对于前人(及同时代人)的著作怀有历史家的兴趣并且非常仔细地钻研.在他的著作及信件中有许多对前人工作的评注.他通晓欧拉、拉格朗日、蒙日、普法夫、哈密尔顿、普吕克尔特别是雅可比的工作.但他自己所发展的最主要的是几何的直观，其中特别是"一般空间元素"的观念.他把这种观念归之于普吕克尔，但他的用法要广得多.他首次引进一般空间元素的流形的概念，并且应用于方程及其解.

以两个变元的偏微分方程

$$f(x, y, z, p, q)=0 \tag{9}$$

为例，在S·李之前，数学家们都是在三维坐标空间 R^3 中考虑问题的，而S·李把 (x, y, z, p, q) 看成 R^5 中的一点，方程(9)构成 R^5 中的一个四维流形 M_4. S·李指出，求方程(9)的积分就是定出所有流形 $M_k(k\geqslant 2)$

$$\begin{cases} x = x(t_1, \cdots, t_k), \\ y = y(t_1, \cdots, t_k), \\ z = z(t_1, \cdots, t_k), \\ p = p(t_1, \cdots, t_k), \\ q = q(t_1, \cdots, t_k), \end{cases}$$

其上的点满足方程(9)及条件

$$\mathrm{d}z - p\mathrm{d}x - q\mathrm{d}y = 0.$$

S·李证明,方程(9)的积分可以归结为只求二维流形 M_2 即可.这样,他把求解一阶偏微分方程的问题化为流形的约化问题.

为了解决这个问题,他继而考虑通过一些等价变换把方程化简,从而得出切触变换的观念.如上例,R^5 中的切触变换为

$$\begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, p, q), \\ y' &= y'(x, y, z, p, q), \\ z' &= z'(x, y, z, p, q), \\ p' &= p'(x, y, z, p, q), \\ q' &= q'(x, y, z, p, q), \end{aligned}$$

恒满足

$$\mathrm{d}z' - p'\mathrm{d}x' - q'\mathrm{d}y' = \rho(\mathrm{d}z - p\mathrm{d}x - q\mathrm{d}y),$$

其中 ρ 为处处非零的函数.显然它保持相切性不变.经典的勒让德变换及安培变换都是其特殊情形.

有了切触变换之后,S·李证明通过切触变换可以把一阶偏微分方程化简成任何特殊的方程.例如,一阶偏微分方程(9)可化简为方程

$$z = 0.$$

他的积分流形理论实际上就是拉格朗日理论.沿着这条道路,他

发展了一般方法,其中包括柯西及雅可比第二方法为其特例.

2.2 二阶数学物理方程

(1)通论.

在19世纪,对偏微分方程的研究与常微分方程截然不同.在1880年以前,基本上没有什么系统的偏微分方程理论,当时的目标主要是求解3种类型的二阶数学物理方程,即

$$\triangle u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{10}$$

$$\Box u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{12}$$

其中(10)型方程被称为拉普拉斯方程,它的解被称为调和函数,其物理意义是位势,故(10)型方程也被称为位势方程,这类方程属于椭圆型方程.从18世纪80年代起,数学家们开始进行系统的研究,并得出勒让德函数,整个19世纪围绕着对(10)型方程的研究形成了位势理论.

(11)型方程被称为双曲型方程,也被称为波动方程,是最早提出的方程,在声学、光学理论中有着重要应用.但由于求解的困难,双曲型方程的研究进展不大,而且它的特性与椭圆型、抛物型方程截然不同,因此理论上往往分开讨论.

(12)型方程被称为抛物型方程,包括热传导方程、扩散方程等,在19世纪初才提出来,并很快得到解决.整个工作几乎是傅立叶一手完成的.他在求解热传导方程的过程中完成了三项伟业.第一是引入偏微分方程的分离变量法,使方程简化为常微分方程;第二是引入傅立叶级数,它对数学有着无比重大的影响;

第三是预示格林函数及基本解的概念,这在100年后成为偏微分方程论的基础.

19世纪研究的椭圆型方程中还有两类重要的方程,一类是波瓦松方程,也就是非齐次拉普拉斯方程

$$\triangle u=f(x),$$

它在位势理论中有着重要的作用.另一类是赫姆霍茨(Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz,1821—1894)方程

$$\triangle u+\lambda^2 pu=0,$$

这类方程在18世纪已经在薄膜振动方程中见到,后来又在傅立叶的热传导研究中碰到.其中λ作为振动频率具有重要的物理意义,可以说是偏微分方程的特征值问题.除了特殊的情形外,关于解的存在性,直到1885年才由施瓦茨取得突破.他证明在边界上$u=0$的条件下,最小频率λ_1的存在性,而且具体给出解法.其后,毕卡证明了λ_2的存在性.庞加莱在1894年取得一般结果,并由此导向积分方程的研究.这条途径最后导致线性泛函分析的诞生.

19世纪偏微分方程研究的重点是求解问题,而理论问题包括解的存在性、惟一性问题以及方程的分类问题,直到19世纪末才为大家所普遍关注.柯西最早系统地研究存在性问题,他从1842年起,在一系列论文中,首先把二阶以上偏微分方程化为偏微分方程组,然后通过优函数法,对解析系数的微分方程组证明解的存在性,这种方法他称之为“极限演算”.1875年柯瓦列夫斯卡娅完成了柯西的存在性证明,1898年古尔萨又改进了他们的工作,从此存在性证明成为偏微分方程研究的一个主要方向.二阶齐次方程则由杜布瓦-瑞蒙在1889年分成双曲型、椭圆型及抛物型三类,并给出每类的标准形式.

(2)波动方程.

波动方程是形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{13}$$

的二阶偏微分方程,也是最早研究的数学物理方程.1746年,法国数学家达兰贝尔首先引进固定在端点 $x=0, x=l$ 的弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{14}$$

并首先通过变元替换及分离变元法,得出通解

$$u=f(x+ct)+g(x-ct),$$

其中 f,g 为待定的函数,通过适当的边界条件及初始条件

$$u(t,0)=0,\quad u(t,l)=0,$$

$$u(0,x)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

他得出解

$$u=\frac{1}{2}\Phi(ct+x)-\frac{1}{2}\Phi(ct-x), \tag{15}$$

其中 Φ 是 x 的周期函数,也是 x 的奇函数.他把这解释为沿着相反方向以相同速度 c 传播的波的叠加.其后,欧拉研究了弦振动方程,把解的观念及初始曲线扩大到非解析的情形,即导致不连续的函数,而且认为所有形如(15)的函数都是方程(14)的解.丹尼尔·伯努利走得更远,他在1753年的论文(1755年发表)中明确指出他多年的见解,即任何可能的初始曲线均可表成

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

从而弦振动方程的解是

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}.$$

这激起一场半个世纪的大论战,其本质是傅立叶展开的可容许性问题.

其后,达兰贝尔及欧拉等研究了密度及粗细不均匀的弦振动问题,通过分离变元法导致常微分方程的特征值问题.

对于两个空间变元的波动方程,最早是欧拉在 1759 年开始研究的.在 1766 年发表的论文中,他得出矩形鼓膜 $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$ 的振动所满足的方程,即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),\tag{16}$$

并尝试用

$$z=v(x,y)\sin(wt+A)$$

表示解,得出

$$v=\sin\left(\frac{\beta x}{a}+B\right)\sin\left(\frac{\gamma y}{b}+C\right),$$

并求出频率 $v=\frac{w}{2\pi}$ 为

$$v=\frac{1}{2}c\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}.$$

其后,他考虑圆形鼓膜的振动,首次通过极坐标把(16)变成

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right),\tag{17}$$

并通过用

$$z=u(r)\sin(wt+A)\sin(\beta\varphi+B)$$

来分离变元,首次得出 $u(r)$ 应满足的贝塞尔方程.

1759 年欧拉在柏林科学院宣读了 3 篇论文,第一篇论文《论声的传播》(1766 年发表),导出小振幅声波 y 的一维传播也

满足方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=2gh\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

其中 g 是重力加速度, h 与压强和密度有关.第二篇论文讨论声音沿两个方向传播的方程及圆柱形波的传播方程,这些同薄膜振动方程类似,因此求解没有困难.

同年,欧拉首次得出声波的三维传播的波动方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\\&v=\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial y}{\partial Y}+\frac{\partial z}{\partial Z},\end{aligned}\tag{18}$$

其中 x,y,z 表示在 X,Y,Z 方向的振幅或位移分量,并给出平面波及球面波的解.

1759 年,拉格朗日也独立地对柱面波及球面波进行研究,并同欧拉进行交流.1781 年拉格朗日得出在重力作用下,深度 h 一定的浅水波方程满足

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=gh\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right),$$

并且证明对于长笛,声音的驻波方程是一维波动方程.

1807 年法国数学家波瓦松研究了声波的三维传播问题,给出波 $u(x,y,z,t)$满足的方程(13)在初始条件

$$\begin{aligned}&u(x,y,z,0)=\varphi_0(x,y,z),\\&\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=\varphi_1(x,y,z)\end{aligned}\tag{19}$$

的整体解公式,即

$$\begin{aligned}&u(x,y,z,t)\\&=\frac{1}{4\pi a}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\varphi_1(x+at\sin\varphi\cos\theta,y+at\sin\varphi\cos\theta,z+at\cos\varphi)\end{aligned}$$

$$\cdot at\sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi + \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_0(x + at\sin\varphi\cos\theta, y + at\sin\varphi\cos\theta, z + at\cos\varphi)\,at\sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi.$$

波瓦松的解实际上蕴含着惠更斯原理. 1856 年,刘维尔证明波瓦松公式对方程(13)的所有解都适用. 1858 年,德国伟大的物理学家及生理学家赫姆霍茨大大推动波动方程理论的发展. 他考虑波动方程的"单色"解 $v(x,y,z)e^{ikt}$,波的强度 $v(x,y,z)$满足约化的波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v = 0, \tag{20}$$

这一方程后来被称为赫姆霍茨方程. 1858 年,他推广位势理论中的格林定理到这个方程上,得出驻波解,它可以看成拉普拉斯算子的特征函数. 方程(20)在一个给定区域内一点 P 处的解 v 可以由 v 及$\frac{\partial v}{\partial n}$在边界 s 上的值给出,即

$$v(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s + \frac{1}{4\pi}\int\int v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\mathrm{d}s,$$

其中 r 表示 P 到边界上变点的距离,n 表示沿曲面的法线方向. 这个解的物理意义非常清楚,v 是作谐振动的气体的速度势,这个势是由边界上的源及偶极子激发的(单层及双层位势),特别是当 $k=0$ 时,赫姆霍茨方程就归结为拉普拉斯方程. 因此,他的结果概括了重力、热、声、光、电、磁的理论,也为后来麦克斯韦电磁波理论奠定了基础. 德国物理学家基尔霍夫(Gustav Kirchhoff, 1824—1887)在 1876 年出版的《数学物理讲义》(*Vorlesungen uber Mathematische Physik*)中,对于赫姆霍茨的结果给出更清晰、更严密的数学表述. 1882 年,基尔霍夫进一步推广波瓦松、刘维尔及赫姆霍茨的结果,得出波动方程(18)的解

$$v(P,t) = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}s + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\right]\mathrm{d}s,$$

其中 $\varphi(t)$表示 v 在时刻 t 时在边界上任一点(x,y,z)处的值，而 $f(t)$表示$\frac{\partial u}{\partial n}$在时刻 t 时该处的相应值.它建立了惠更斯原理的强形式,也就是在任何点 $P(x,y,z,t)(t>0)$附近的方程(18)的解完全由当 $t=0$ 时 u 及 u_t 在通过 P 的特征超锥面上含球面 $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ 的区域内的值所决定.

对于柱面波,即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

的解,1894 年由意大利数学家沃尔泰拉得出.值得注意的是,强形式的惠更斯原理在此不成立.

对于波动方程,两个最重要的概念是波面及特征面,这是柯西在 1847 年最早引进的,他特别造出特征(characteristic)这个词.他把特征面定义为由特征方程表示的曲面,即用 x,y,z,t 分别取代偏导数$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t}$后所得的方程 $s(x,y,z,y)=0$.

对于双曲型方程,黎曼在 1858 年取得重大突破,他具体求出间断解的形式,这是一篇关于声波的论文.无穷小振幅的声波传播问题早已解决,黎曼考虑一维有限振幅的情形.黎曼假定气体压强 p 以一种确定关系依赖于其密度 ρ,他证明初始扰动分裂为两个波:压缩波与膨胀波.在传播过程中,压缩波被压缩得越厉害,波速增加得就越快.这样,有限振幅的波在传播中,波形不改变,而且形成速度的间断,这就是激波.黎曼不仅从理论上证明激波的存在,而且在数学上提供了新的方法,他解的是满足

一定初值条件的二元波动方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0.$$

他引进共轭方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial mv}{\partial r} + \frac{\partial mv}{\partial s} = 0,$$

且 v 满足一定的条件.这个共轭方程一般较容易求解,得出的解被称为黎曼函数.黎曼还得到联系 w 及 v 的公式,这样原来方程的解即可得出.黎曼的方法后来为克里斯托菲尔等人所推广.

克里斯托菲尔看到黎曼的论文之后,立即认识到这篇论文的意义,并在1859—1860年度的《物理学进展》中加以评价.1877年,他把黎曼的一维等熵气流中的激波推广到三维完全流体中的(一阶)不连续面传播.在另一篇论文中,他把这一般理论应用于弹性介质中的一阶波动研究.不过,黎曼等人当时并没有熵的概念,而且有一些不严密.法国力学家雨格诺(Pierre Henri Hugoniot,1851—1887)于1885年在一般的物理基础上,运用能量守恒定律,独立发展了空间不连续流的理论,发现了雨格诺绝热曲线,它已成为现代激波理论的基础,其数学理论最后由阿达马在1903年出版的《波的传播理论讲义》(*Lecons sur propagation des ondes*)中完成.

2.3 位势理论

自从牛顿的万有引力定律发表之后,人们陆续提出了一系列数学问题,如三体问题及多体问题、转动流体的平衡形状等.其中最基本的问题当然是关于一个物体对另一个物体的引力的计算.当物体可以被当做质点时,不难算出它对另一质点的引

力. 在一般情况下,甚至在旋转椭球体的情况下,也不能把质量看成是集中在球心的. 这时,位势理论的前身——吸引理论应运而生. 英国数学家牛顿及伊沃利(James Ivory, 1765—1842)等人运用几何方法,对于某些特殊物体在特殊位置的质量的引力可以得出一些结果,但对于一般情形,欧洲大陆的分析方法更有效. 分析方法首先出现在法国科学家克莱洛的《地球形状理论》(*Theorie de la figure de la terre*)(1743)一书中,其中把地球引力表为纬度的函数. 他还引进势函数,指出引力与势函数的"梯度"成正比. 在此之前,从势函数能导出力,乃至"势函数"这个术语都曾出现在丹尼尔·伯努利的《流体动力学》(1738)一书中,不过他不是用于吸引理论. 而一般位势方程(后被称为拉普拉斯方程)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{21}$$

首先出现在欧拉 1752 年写的论文中. 欧拉在研究不可压缩流体运动时,用 u, v, w 表示其中任何点的速度分量,证明

$$u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y+w\mathrm{d}z$$

必定是一个正合微分 $\mathrm{d}s$,因此

$$u=\frac{\partial s}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial s}{\partial y}, \quad w=\frac{\partial s}{\partial z}.$$

根据假定,流体不可压缩,再加上"连续性原理",他得出在流体运动中的方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=0.$$

在 s 是 x, y, z 的多项式的特殊情况下,他求出这方程的解 s 来,s 被称为速度势. 拉格朗日在 1762 年也考虑速度势论,1773 年他在天文学中也用过势函数. 他认识到,由 V 通过积分号下求导数,即可得出作用在 P 上的引力的分量. 实际上他已经有

“场”的概念,这种思想后来才被普遍接受,从而决定 V 并研究其性质,成为位势理论的中心课题. 1779 年他得出离散质量的引力位势. 到 18 世纪 80 年代初,拉格朗日、拉普拉斯和勒让德都考虑过连续质量的位势函数,并证明它满足球坐标及直角坐标的拉普拉斯方程. 这样问题就变成求解偏微分方程的问题. 1882—1884 年勒让德及拉普拉斯采用级数展开法来求解拉普拉斯方程,得出勒让德多项式及球带函数,证明它们的特殊性质,用它们表示位势函数,并且作为 V 的“梯度”得出引力来. 但是在 1800 年前后20多年间,位势理论仍然还不成熟,这是由于:

(1)对于一般偏微分方程定解问题的无知,边值问题没有正确提法.

(2)求通解还不会使用分离变量法,这种方法直到 1807 年才由傅立叶首先使用.

(3)拉普拉斯错误假定,质量连续分布的物体外部和内部的位势函数都满足拉普拉斯方程,而实际上内部位势并不满足. 法国数学家波瓦松在 1813 年指出这个错误,并且提出内部一点 (x, y, z) 的位势满足

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \tag{22}$$

其中 ρ 是连续分布的质量密度,而且是 x, y, z 的连续函数. 后来称这方程为波瓦松方程. 波瓦松的结果虽然正确,但他的论证并不严格,正如荷尔德在 1882 年所指出的,单有 $\rho(x, y, z)$ 的连续性条件是不够的,它还必须满足更强的条件.

1813 年,高斯出于要定出月球轨道之类的天文学问题,也开始研究位势理论,从而得出特殊情形下的格林公式,即散度公式. 由于大地测量以及地磁研究的推动,他对位势理论做出许多

贡献. 在把椭圆内部映射到圆内部的保角映射问题的引导下, 他求解二维位势理论的方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0, \tag{23}$$

并且对平面有界区域 D 求出其解

$$V=\iint_D \rho\log\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

其中 $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$, 他称 V 为对数位势. 高斯还注意到二维位势理论与复变函数的关系: 如果 $u(x,y)$ 是方程(23)的解, 即调和函数, 则

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

是正合微分, 即存在调和函数 $v(x,y)$(称之为 $u(x,y)$ 的共轭函数)

$$v=\int\left[-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right],$$

使 $u+\mathrm{i}v$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数.

19 世纪 30 年代, 高斯对地磁的研究导致他对三维位势理论做出划时代的贡献. 他在 1839 年发表的论文中给波瓦松方程一个"严格"的证明, 他特别关注位势理论中最主要的问题——平衡问题, 即求出曲面 S 上电荷(或质量)的分布, 使得它在 S 上产生的位势为常数. 他根据物理上的论证, 断言这个问题总有一个解. 为了寻求数学上的证明, 高斯引进下面的想法:

取 S 上体积位势

$$V=\iint_S \frac{\rho}{r}\mathrm{d}S \quad (\rho>0)$$

及 S 上任何连续函数 U, 考虑积分族

$$\Omega = \iint_S (V - 2U)\rho \mathrm{d}S,$$

他证明,如果 ρ 如此选取,使 Ω 具有极小值,则 $V-U$ 在 S 上为常数.高斯还补充说,ρ 的存在是显然的,因为只考虑由可允许的函数(密度 ρ)生成的势(调和函数)即可,显然满足拉普拉斯方程.从这个意义上讲,这与狄利克雷原理有着本质上的不同.在这篇论文中,他还证明算术均值定理及高斯积分定理.

在高斯之后,位势理论主要在英国及德国进行发展.英国更重视同具体的物理问题相结合,他们都是大物理学家,如汤姆逊、斯托克斯、麦克斯韦及瑞利等人,而真正对位势理论的发展起主导作用的则是格林.格林是自学成才的数学家,他在 1828 年出版的《论数学分析在电磁理论上的应用》中,引进一系列重要的概念和结果,其中特别包括"位势"(potential)的概念.他证明了散度定理,并由这个定理推出联系两个位势函数 U 和 V 的恒等式:

$$\int \mathrm{d}\sigma V \frac{\partial U}{\partial n} + \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z V \nabla^2 U$$
$$= \int \mathrm{d}\sigma U \frac{\partial V}{\partial n} + \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z U \nabla^2 V,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 为面元,n 表示曲面 S 的外法线方向.他还引进所谓格林函数 U,它满足

①$U \mid S = 0$;

②$U \sim \dfrac{1}{r(x,p)}$;

③U 在 S 内部满足位势方程.

如果 U 已知,则 V 在每一内点可表示为

$$4\pi V = -\iint \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\overline{V}, \overline{U}$ 分别表示 V, U 在曲面 S 上的值.这样,他对任何有限区域上的拉普拉斯方程定义格林函数,并得出全新的解法.这种格林函数法后来在偏微分方程研究中有着广泛的应用.不过,他也是用物理观念来证明格林函数的存在性的.他还用同样的方法证明了当电荷所引起的位势为给定调和函数时,电荷在曲面上分布的存在性,即解决平衡问题.他特别强调,位势理论在电磁理论上的应用同引力理论有差别.1833 年,他在研究变密度椭球体的引力位势问题时,为了证明方程(21)有给定边值解,第一次假定存在函数 V,使积分

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}v \tag{24}$$

达到极小.这是狄利克雷原理的最早应用.1835 年格林把三维位势理论推广到 n 维,得出超球面函数.但是,格林的工作,特别是他 1828 年的小册子并没有受到应有的重视,以致高斯与其他数学家独立得到他的许多结果.直到 1847 年,汤姆逊发现它,并重新发表在《克莱尔杂志》(1850,1852,1854)上,他的工作才广为人知.汤姆逊(即开尔文勋爵)在 1845 年就引进所谓"开尔文变换"来解决一些特殊的边值问题.1850 年发表了后来所谓狄利克雷原理,即使积分(24)达到极小的函数 V 就是满足 $\triangle V=0$ 并在边界 S 上取给定连续函数 f 的值的解.这个原理由于黎曼在复分析方面的工作定名为狄利克雷原理.狄利克雷在他的讲演中的确宣布过这个原理.19 世纪下半世纪,狄利克雷原理成为德国数学家研究位势理论的核心,对它的研究经过了一条"肯定—否定—否定之否定"的路线.

狄利克雷很早就研究数学物理,但是他开始讨论位势理论是在 1839 年.他提出狄利克雷问题以及狄利克雷原理,主要是

在他的讲演中，而不是在论文中. 1842 年，1846 年，1848 年，1852 年，1855 年他在柏林大学都讲过位势论，还在格廷根大学讲过(1855—1859). 黎曼听的是他 1848 年的课，戴德金是在格廷根听的课. 因此，狄利克雷的观点是通过他的听众加以广泛传播的. 特别是黎曼，在他的博士论文中已经正式命名为狄利克雷原理，而且他在讲课中也多次加以宣扬. 在当时这个原理得到广泛的承认，但在 1861 年左右，黎曼、戴德金以及其他人的确发现，这个原理存在一个漏洞，他们期望能够补上这个漏洞，但始终未能如愿. 黎曼去世以后，外尔斯特拉斯在他的讲课中，举出一个反例，说明使积分极小化的函数未必存在. 他的反例如下：极小化积分为

$$\int_{-1}^{1} x^4 \varphi'^2(x)\mathrm{d}x,$$

而边界条件为

$$\varphi(-1) = a,$$
$$\varphi(+1) = b.$$

外尔斯特拉斯构造函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\left(\arctan\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\arctan\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

这个函数满足边界条件，且

$$J < \frac{1}{2}\varepsilon^2(b-a)^2\left(\arctan\frac{1}{\varepsilon}\right)^2.$$

因此 J 的极小值为 0，而只有当

$$x^2\varphi'(x) = 0,$$

即

$$\varphi(x) = \text{常数}$$

时，J 才能达到极小值，显然它不满足边界条件，因此使 J 达到

极小的 φ 不存在.

外尔斯特拉斯的反例堵塞了通过狄利克雷原理去证明狄利克雷问题解的存在性的道路.而当时许多数学家已经在考虑如何挽救狄利克雷原理或另外寻找其他方法解决存在性问题.外尔斯特拉斯的反例传出后,许多人认为第一条出路已经行不通,自然选择第二条路,这样就出现几种新方法.施瓦茨和小诺意曼的方法是构造一串调和函数,使其具有边界值且收敛于指定的函数,而庞加莱是构造一串函数,每个都具有指定的边界值,然后使它们收敛到调和函数.显然,这两种方法都是使极限函数既在区域内调和,又满足边界条件.

1870 年,施瓦茨发表他的交错方法,他把给定区域 G 用有限多个圆盘、半圆盘或半平面这些标准区域来覆盖.对于每个这样的标准区域,不难用波瓦松积分来求解边值问题.如果两个标准区域的边值问题有解,那么如果它们相交,则它们相交区域的边值问题也有解.如果 G 的边界足够光滑,则可用至多可数个集合加以覆盖,从而最后得出所求的解.

同年,小诺意曼用算术平均法证明解的存在.他用的是凸曲面,考虑其上双层密度分布 m 产生的双层位势

$$\partial\pi\varphi = \int m \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} \mathrm{d}\sigma,$$

其中 σ 为面元,n 为法线方向,因此,$-\varphi(p)$是 m 的算术平均.然后构造一串调和函数$\{\varphi_n\}$,使得

$$\partial\pi\varphi_n = -\int \varphi_{n-1}^0 \frac{\partial r^{-1}}{\partial n} \mathrm{d}\sigma,$$

其中 φ_{n-1}^0为 φ_{n-1}在边界面上的值,如果 σ 是凸面元,则$\{\varphi_n^0\}$在 σ 上一致收敛于常数 c,所以

$$c+\sum(\varphi_{2n-1}-\varphi_{2n})$$

是调和函数,且是狄利克雷问题的解.罗宾(Victor Gustave Robin,1885—1897)考虑用源的面分布代替双层,也用类似方法解凸面的狄利克雷问题.庞加莱于 1895 年把这两个方法加以简化,并推广到非凸曲面上.

施瓦茨和小诺意曼的方法不仅提供了狄利克雷问题解的存在性定理,而且也提供了解决该问题的位势函数的计算方法.但是,这些方法很不实用,从而导致以后的研究大致分成两类,一类是不考虑数值解的纯粹的存在性定理,另一类是研究有效计算位势函数的数值方法.第一个纯粹的存在性定理来自庞加莱,这个方法依赖于所谓扫散方法.庞加莱的方法可应用于在一个曲面上所取的边界值可表为笛卡尔坐标 x, y, z 的任何多项式或者这种多项式的一致收敛系列.区域 ω 由一个球的可数系列 $\{S_n\}$ 所覆盖,它按照顺序 $S_1, S_2, S_1, S_2, S_3, S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots$ 进行扫散.庞加莱先把 S_1 中的多项式 f 用调和函数 f_1 取代,而 f_1 在 S_1 的边界上与 f 取值相同,继而把密度为 $\rho=-\frac{\Delta f}{4\pi}$ 的电荷从 S_1 的内部"扫散"到 S_1 的表面,它可由波瓦松积分来表示.这个连续函数在 S_1 上等于 f_1,在 ω 的其他地方等于 f,可以用 W_1 来表示,然后把 W_1 在 S_2 中用调和函数来取代,这个调和函数在 S_2 上与 W_1 取同样的边界值.不断重复这个过程,就产生了一个函数序列 $\{W_n\}$,其中每一个函数在 σ 上满足预先给定的边界条件,并且收敛于所求的调和函数 φ.

由于位势理论的刺激,导致对调和函数乃至一般函数的序列进行研究,其中最重要的是意大利数学家阿斯科利(1883)及阿尔泽拉(1895)的等度连续的概念.在有界闭区间 R 上定义的

有界、连续函数序列 $f_1, f_2, \cdots f_n, \cdots$ 被称为等度连续，如果对任何 $\varepsilon > 0$，存在“连续性模”$\delta(\varepsilon)$，它不依赖于 n，使得只要 x, y 的距离小于 $\delta(\varepsilon)$，对任意的 n，均有

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

他们证明重要的阿斯科利—阿尔泽拉定理，即在 R 上一致有界且等度连续的函数序列中，一定可以选出在 R 上一致收敛的子序列，收敛到一个连续的极限函数上. 这个定理不仅证明了极限的存在，而且是拓扑中紧性概念的先声. 对于调和函数序列，哈纳克(Carl Gustav Axel Harnack，1851—1888)在 1887 年证明了两个关于调和函数的收敛定理，保证了边界上一致收敛的调和函数序列一致收敛于整区域的调和函数.

希尔伯特在 1900 年提出解决狄利克雷问题的直接方法. 他提出，如果对边界条件加以适当限制，任何变分问题都有一个解(至少有一个广义解). 他以平面区域 ω 的狄利克雷问题为例，提出他的直接方法. 他从满足边界条件的函数序列 $F_1(x, y)$，$F_2(x, y)$，…出发，要求狄利克雷积分

$$D(F_n) = \int \mathrm{grad}\, F_n \mathrm{grad}\, F_n \mathrm{d}\omega$$

收敛于一个极限 k，然后每一个函数 F_n 用另外一个函数 G_n 来取代，G_n 也满足边界条件，但是它们已经光滑化，使得

$$|\mathrm{grad}\, G_n| < \tan\varphi,\ n = 1, 2, \cdots,$$

其中 φ 是某一个固定角度$\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$，于是狄利克雷积分 $D(G_n)$ 也趋于 k. 希尔伯特声称，从函数序列 G_n 中可以选出一个函数子序列 $\{f_n\}$，使得 $f_n(x, y)$ 一致收敛于所求的调和函数.

不可解的狄利克雷问题. 庞加莱时代的数学家对于包围一个区域 ω 的曲面 σ 的性质以及 σ 上所定义的函数的性质并没有

加以仔细推敲,直到李雅普诺夫才考虑到,有明显物理意义的问题并不一定有一个严格的数学解.他对曲面的类型加以限制,即所谓李雅普诺夫曲面,同时对边界函数加以限制,要求满足荷尔德连续性,并且证明在这种限制之下格林函数的存在性(1898).查伦巴(Stanislav Zaremba,1863—1942)在1911年,勒贝格在1924年分别举出不可解的狄利克雷问题的例子,从而证明这些限制条件是绝对必要的.

由于数学上得出与物理直观不相符的结论,20世纪的位势理论逐渐摆脱物理的观念而建立起了纯数学的位势理论,这表现在许多方面.位势已由二维、三维空间扩大到 n 维空间,嘉当的儿子小嘉当(Henri Cartan,1904—)在1941年更进一步完全摆脱了欧氏空间以及度量概念的限制,把 n 维空间推广到诸如拓扑群上.在此之前,位势所涉及的积分及测度也被推广到一般的拉东测度上,位势函数也被推广成广义函数.1942年位势理论又同随机过程联系起来,同时法国学派又建立了公理化位势论,从而使现代位势理论展示出精彩纷呈的局面.

3 积分方程

积分方程是未知函数出现在积分号下的方程.虽然微分和积分在17世纪同时得到发展,但积分方程的提出及理论成熟却比微分方程晚了200年,这是由于直接由自然科学得出的方程大都是微分方程,由变分原理得出的方程也转化为微分方程.因此,求解微分方程是17—19世纪数学家的主要研究方向.

从积分方程的来源来看,只有个别的方程直接来源于数学物理,而19世纪导致积分方程研究的主要是“密码—积分方程”

(Crypto-integral Equations).这是丢东涅在《泛函分析史》中用的词,它是指从刘维尔到庞加莱,许多求解常微分方程及偏微分方程问题的实质不在于微分方程,而在于与其有关的积分方程,这些积分方程由于没有被明显写出来,故称"密码—积分方程"或隐含的积分方程.一旦积分方程被明显写出来,许多问题也就迎刃而解了.

促使积分方程由隐而显,并启发积分方程求解的是无穷维线性方程组,或无穷维线性代数.到19世纪末,现代意义下的线性代数学这个词还没有,但线性代数学的基本内容已经具备.例如线性方程组、线性空间(向量空间)、线性型、双线性型及二次型等理论的基础均已完备,但都是有限维的.1890年左右,由于许多数学家考虑"有限到无穷的过渡",直接促进积分方程理论的产生与发展,并导致泛函分析的产生.

一般认为,积分方程理论的创立者是意大利数学家沃尔泰拉,他在1896年提出求解第二类积分方程的方法.其后不久,1900年瑞典数学家弗瑞德霍姆推广了沃尔泰拉的方法.希尔伯特在1901年得知弗瑞德霍姆理论之后,系统建立了积分方程理论.他们三位可以说是积分方程理论的奠基人.在希尔伯特的推动下,积分方程理论成为20世纪前期的一大热门,直接促使泛函分析的产生与发展.

积分方程中研究得较为完整的是线性积分方程,即方程中只包含未知函数的线性项.最早研究的积分方程是沃尔泰拉型积分方程,它分为三类:

(Ⅰ) $\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x)$;

(Ⅱ) $\varphi(x) - \int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x)$;

$$(\text{Ⅲ})A(x)\varphi(x)-\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x).$$

(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)分别被称为第一类、第二类、第三类沃尔泰拉型积分方程，其中 $A(x)$，$f(x)$，$\varphi(y)$ 及 $K(x,y)$ 均为已知函数，$\varphi(x)$是未知函数，$K(x,y)$被称为积分方程的核．当 $f(x)=0$ 时，方程被称为齐次方程，否则被称为非齐次方程．

更一般的积分方程为弗瑞德霍姆型方程，它也分为三类：

$$(\text{Ⅰ})\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x);$$

$$(\text{Ⅱ})\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x);$$

$$(\text{Ⅲ})A(x)\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x).$$

(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)分别被称为第一类、第二类、第三类弗瑞德霍姆型积分方程．当 $x<y$，核 $K(x,y)\equiv 0$ 时，弗瑞德霍姆型积分方程就化为沃尔泰拉型积分方程，但两者之间有很大区别．当核含有参数 λ 时，这种具有特征值的积分方程很重要．

积分方程有多种推广：

(1)区域由一维推广到高维，由有界推广到双无界或半无界，这是一类奇异积分方程．例如维纳(Norbert Wiener，1894—1964)—霍普夫(Eberhard Hopf，1902—1983)方程

$$\mu\varphi(x)-\int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x)\quad(0\leqslant x<+\infty),$$

这是极为著名的方程．早期的例子是辐射传输理论的米尔恩(Edward Arthur Milne，1896—1950)方程

$$B(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty B(t)\mathrm{Ei}|x-t|\mathrm{d}t,$$

其中 $B(t)$是辐射密度，$\mathrm{Ei}|x-t|$是指数积分函数．后来因维纳

及霍普夫在 1931 年合作求得其解而得名.

(2)当核不满足平方可积条件时,被称为奇异核,相应的积分方程也被称为奇异积分方程.此外还有希尔伯特核的积分方程,研究奇异积分方程要求对积分理论有所推广.

(3)非线性积分方程.著名的有哈默斯坦(Adolf Hammerstein,1888—1941)方程

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y,$$

其中 $f(y,\varphi(y))$ 是已知函数,且对 $\varphi(y)$ 是非线性的.自 1930 年开始研究以来,已取得不少成果.但对非线性积分方程的研究,正如其他非线性分析理论一样,极为困难.

(4)积分微分方程.当积分方程中不仅包含未知函数,还包含未知函数的导数时,就得到积分微分方程.如统计物理中的玻尔茨曼(Ludwig Boltzmann,1844—1906)方程.

积分方程发展的一个特点是,当线性积分方程理论在 10 年之内迅速发展起来之后,实际应用中碰到的一系列积分方程才接踵而至,许多机器设计、电磁波衍射、地质勘探、中子迁移、经济、人口理论等方面的问题,都直接导致求解积分方程的问题,为积分方程理论的发展提供了强有力的推动力.

积分方程论的发展历史分期概述如下.

3.1 前史

一般认为,阿贝尔在 1823 年提出第一个积分方程,但在此之前,积分变换的反演已经首先提出第一批积分方程问题.

(1)积分变换.

为了求解线性微分方程的边值问题及初值问题,常常对未

知函数进行积分变换.对于核 $K(x,y)$,函数 f 的积分变换为

$$g(y)=\int_a^b K(x,y)f(x)\mathrm{d}x,$$

通过方程可解出 $g(y)$,反过来,求 $f(x)$的问题就是积分变换的反演问题.显然,这是第一类积分方程求解问题.历史上,积分变换有多种,最早的是拉普拉斯变换及傅立叶变换.拉普拉斯变换

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$$

由拉普拉斯在 1782 年提出,在此之前,欧拉也用过.它的一般反演公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{xy}g(y)\mathrm{d}y$$

由波瓦松在 1823 年提出.傅立叶在 1811 年的论文中引进余弦及正弦变换

$$g(y)=\int_0^{\infty}\cos(xy)f(x)\mathrm{d}x,$$

并得出反演公式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(xy)g(y)\mathrm{d}y.$$

其后又产生几十种积分变换,其中著名的有汉克尔变换,其核为

$$K(x,y)=\sqrt{xy}J_r(x,y),$$

其中 J_r 为贝塞尔函数.梅林变换的核为

$$K(x,y)=x^{y-1},$$

它是一个明显的不对称核,在数论上有重要应用.希尔伯特变换的核为

$$K(x,y)=\frac{1}{x-y}.$$

它们的反演公式都已求出,同时如傅立叶变换一样,满足帕塞瓦

尔(Marc-Antoine Parseval de Chênes,1755—1836)等式.

(2)阿贝尔方程.

1823年,阿贝尔直接从一个力学问题得出积分方程,并求出解来.问题是一个质点沿一条光滑曲线在重力场中降落,假定由高为y处落在最低点0处所需的时间T为高度y的已知函数$f(y)$,求曲线形状.他得出积分方程

$$T=\int_0^y \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{2g(y-\xi)}}\mathrm{d}\xi=f(y),$$

其中$\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$表示$\xi$处的弧元$\mathrm{d}s$.阿贝尔在1823年和1826年通过两种特殊方法解出未知函数

$$\varphi(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\left[\int_0^y \frac{f'(\xi)}{\sqrt{y-\xi}}\mathrm{d}\xi+\frac{f(0)}{\sqrt{x}}\right],$$

由$\varphi(y)$可得出曲线方程.当$f(x)=$常数时,这就是惠更斯解决的等时曲线问题,阿贝尔证明此线为旋轮线,即摆线.实际上,阿贝尔解决了所有形如

$$\int_0^y \frac{\varphi(\xi)}{(y-\xi)^n}\mathrm{d}\xi=f(y),\quad 0<n<1$$

的方程,而且得出解

$$\varphi(y)=\frac{\sin n\pi}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^y \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(y-\xi)^{1-n}}.$$

他的方法很特殊,用的是$\Gamma(x)$,由此也可看出$\frac{\sin n\pi}{\sin\pi}$的来源.在1826年的论文的末尾,他写道:“用同样方式,我由方程

$$\chi(a)=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)^n}$$

求出s来.我还由方程

$$\chi(a)=\int \varphi(xa)f(x)\mathrm{d}x$$

定出函数 φ 来,其中 χ 和 f 是给定函数,积分可取任何上、下限;但是解这个问题太长,以致不能在这里给出."阿贝尔后来也没有发表过这个解.由此看出,阿贝尔的确是积分方程的先驱,虽然阿贝尔型积分方程属于第一类沃尔泰拉型积分方程.

(3)19 世纪积分方程的发展.

阿贝尔以后,积分方程最重大的进步是刘维尔取得的.刘维尔在 1832 年解出了一系列特殊的积分方程,其中包括阿贝尔型积分方程和一些类似的方程.他的解与其说是求解积分方程,毋宁说是阐述他的新理论,也就是他的求分数阶导数及分数阶积分.这一套理论现在仍有一些人在研究,但是不属于数学分析发展的主流.他的方程来源没有实际背景,求解方法也是形式的.

1835 年刘维尔求解波瓦松积分方程

$$F(r)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}r^{n+1}\int_0^{\pi}x(r\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega\mathrm{d}\omega,$$

其中 $F(r)$ 是给定函数,未知函数 $x(a)$ 假定为偶函数($x(-u)=x(u)$),刘维尔用变元替换

$$\omega=\left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{1}{2}},\quad r^2=x,$$

把它化为阿贝尔型积分方程,从而不难解出来.

1837 年,刘维尔迈出有意义的一步,他第一次把微分方程的求解问题化为积分方程的问题.他求解的方程是斯图姆—刘维尔型方程

$$y''+(\lambda-q(x))y=0,$$

其中 $a\leqslant x\leqslant b$.他注意到,如果参数 $\lambda=\rho^2>0$ 时,则其解满足积分方程

$$y(x)=A\cos\rho x+B\sin\rho x+\frac{1}{\rho}\int_a^x q(t)y(t)\sin(\rho(x-t))\mathrm{d}t,$$

这是一个第二类沃尔泰拉型积分方程.有意思的是,刘维尔也知道通过"逐次代入法"来求解这个方程.

19世纪中叶,位势方程的边值问题也导向积分方程.在二维情形

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

对于在包围区域 D 的曲线 C 上给定的函数 $f(s)$,其解 $u(x,y)$ 可表为

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_C \rho(s)\log\frac{1}{r(s;x,y)}\mathrm{d}s,$$

其中 $r(s;x,y)$ 是点 s 到区域内部或边界上任一点 (x,y) 的距离,而 $\rho(s)$ 是未知函数,对 C 上的 $s=(x,y)$ 满足

$$f(s) = \frac{1}{2\pi}\int_C \rho(t)\log\frac{1}{r(t;x,y)}\mathrm{d}t,$$

这是第一类弗瑞德霍姆型积分方程.

对于第二边值问题——诺意曼问题,其解为

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi(s)\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r(s;x,y)}\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示边界上的法向微商,$\varphi(s)$ 满足

$$f(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi(t)\frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r(t;x,y)}\right)\mathrm{d}t,$$

这是第二类弗瑞德霍姆型积分方程.

对于这两种积分方程,小诺意曼在《关于对数位势及牛顿位势的研究》一书中,给出了凸域情形的解法,用的也是逐次代入法.

1860年左右,贝尔(August Beer,1825—1863)利用双层位势解三维狄利克雷问题.设 Σ 为光滑曲面,

$$u(M)=\iint_{\Sigma}\rho(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{MP}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 MP 表示 M 与 P 之间的距离,边界条件为

$$u\mid\Sigma=g(M).$$

因此,未知的密度 $\rho(P)$对 $M\in\Sigma$ 满足

$$2\pi\rho(M)+\iint_{\Sigma}\rho(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{MP}\right)\mathrm{d}\sigma=g(M),$$

这是最早得到的第二类弗瑞德霍姆型积分方程.贝尔还提出逐次代入法,从

$$\rho_0(M)=\frac{1}{2\pi}g(M)$$

开始,由

$$2\pi\rho_n(M)+\iint_{\Sigma}\rho_{n-1}(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{MP}\right)\mathrm{d}\sigma=0,\quad n\geqslant 1$$

递归地定义 $\rho_n(M)$,则方程的解为

$$\rho(M)=\rho_0(M)+\rho_1(M)+\cdots+\rho_n(M)+\cdots$$

但他没有企图证明这个级数收敛,1877 年小诺意曼才企图对有界的凸区域进行证明,他允许非光滑边界.不过他的证明有毛病,直到 1937 年才由勒贝格指出来.施瓦茨在 1885 年发表的关于振动膜方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

的研究,实际上隐含着对有对称核的积分方程理论的探索,通过分离变量,可化为赫姆霍茨方程

$$\Delta v+\lambda v=0,$$

这成为特征值问题.施瓦茨从

$$\Delta w+\xi pw=0$$

的狄利克雷问题出发,如果记

$$w = w_0 + \xi v,$$

则 v 满足第二类弗瑞德霍姆型积分方程

$$v(M) = g(M) + \frac{\xi}{2\pi}\iint_D p(P) G(M, P) v(P) \mathrm{d}w,$$

其中

$$g(M) = \frac{1}{2\pi}\iint_D G(M, P) p(P) \mathrm{d}w.$$

3.2 沃尔泰拉积分方程理论

在沃尔泰拉研究积分方程之前,拉·鲁(Le Roux)曾研究"定积分的反演"的一般问题,实际上是求$[a, b]$上的连续可微函数,满足

$$\int_a^y \varphi(x) H(x, y) \mathrm{d}x = f(y). \tag{1}$$

与前人不同的是,他无意求出封闭的反演公式,而只是用逐次逼近法证明序列$\{U_n\}$收敛.他假定,在$[a, b]$上,

$$h(y) = H(y, y) \neq 0,$$

对方程(1)取导数,可得

$$h(y)\varphi(y) + \int_a^y \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}\varphi(x)\mathrm{d}x = f'(y),$$

于是应用毕卡的逐次逼近法

$$u_0 = \frac{f'(y)}{h(y)},$$

……

$$u_n = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)}\int_a^y \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} u_{n-1}(x)\mathrm{d}x, \quad n \geqslant 1.$$

他证明$\{U_n\}$收敛于方程(1)的解.

沃尔泰拉在 1896 年用同样的方法求第二类沃尔泰拉型积分方程

$$f(s)=\varphi(s)+\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

的解，即令

$$f_1(s)=-\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

......

$$f_n(s)=-\int_a^b K(s,t)f_{n-1}(t)\mathrm{d}t,$$

取解 $\varphi(s)$ 为

$$\varphi(s)=f(s)+\sum_{p=1}^{\infty}f_p(s).$$

沃尔泰拉巧妙地证明了这个级数收敛，他还解出第一类方程，主要是化为第二类方程．他第一个认识到，第一类积分方程是具有 n 个未知数的 n 个线性方程组当 $n\to\infty$ 时的极限形式．

3.3　弗瑞德霍姆积分方程理论

1899 年 8 月，弗瑞德霍姆向他的老师米塔格 - 莱夫勒投寄论文，文中考虑一般的第二类弗瑞德霍姆型积分方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)f(t)\mathrm{d}t, \qquad (2)$$

他着重强调同线性方程组的类比，并直接描述他的“行列式”公式．1909 年他在一次讲演中承认，他的方法受到两个来源的启发：

(1)沃尔泰拉由线性方程组“过渡到极限”；

(2)科赫关于无穷行列式的工作．

弗瑞德霍姆把三个简单的思想合成一个伟大的方法：

①把积分分为黎曼和.他把$[a,b]$按分点$y_1,y_2,\cdots,y_n$分划,从而得到n个线性方程组

$$f(y_j)+\frac{\lambda(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}K(y_k,y_j)f(y_k)=\varphi(y_j),\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

②按照科赫公式写出方程组的行列式

$$1+\frac{\lambda(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}K(y_k,y_k)$$
$$+\frac{\lambda^2(b-a)^2}{2!\ n^2}\sum_{k_1,k_2}\begin{vmatrix}K(y_{k_1},y_{k_1}) & K(y_{k_1},y_{k_2})\\ K(y_{k_2},y_{k_1}) & K(y_{k_2},y_{k_2})\end{vmatrix}+\cdots$$

令$n\to\infty$,即得出弗瑞德霍姆型积分方程的“行列式”

$$\Delta(\lambda)=1+\lambda\int_a^b K(s,s)\mathrm{d}s+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}s_1 & s_2\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2+\cdots$$

③证明上述级数一致收敛.他求出行列式的上界,实际上是1893年阿达马证明的不等式的特殊情形:对任意n阶方阵$A=(a_{ij})$,有

$$|\det A|^2<\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right).$$

最后他定义新子式

$$\Delta(s,t;\lambda)=K(s,t)\Delta(\lambda)-\lambda\int_a^b K(s,\xi)\Delta(\xi,t;\lambda)\mathrm{d}\xi,$$

引进函数

$$\Phi(s)=\varphi(s)\Delta(\lambda)-\lambda\int_a^b\Delta(s,\xi;\lambda)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

得出方程

$$\Phi(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\Phi(t)\mathrm{d}t=\varphi(s)\Delta(\lambda),$$

从而得出结论,如果$\Delta(\lambda)\neq 0$,则$f(s)=\dfrac{\Phi(s)}{\Delta(\lambda)}$为方程(2)的解.

弗瑞德霍姆在1903年的论文中改进了1900年论文的结

果,得出预解核

$$R(s,t;\lambda)=-\frac{\Delta(s,t;\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

证明方程(2)的解存在且惟一的充分必要条件是

$$\Delta(\lambda)\neq 0,$$

然后他讨论 $\Delta(\lambda)=0$ 的情形,从而得出当 λ 是 Δ 的 m 阶零点时方程(2)存在解的充分必要条件.最后他得出一个定理,后来被命名为弗瑞德霍姆择一定理:或者方程(2)具有惟一性,或者相应的齐次方程具有非平凡解.它直接引向泛函分析,特别是算子理论和谱理论.

3.4　希尔伯特理论

1901 年希尔伯特在听到霍姆格林(Erik Albert Holmgren)介绍弗瑞德霍姆理论之后,立即着手组织讨论班,研究积分方程,并指导博士生.1904—1906 年他发表 6 篇论文,1912 年编辑出版《线性积分方程一般理论概要》(*Gründzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integral-gleichungen*)一书,其中不仅发展了积分方程理论,还把它应用于数学物理方程,而且更重要的是奠定了泛函分析的基础.

希尔伯特的思想概括来讲,主要有下面几点:

(1)明显地论述"过渡到极限"的过程.沃尔泰拉及弗瑞德霍姆都提到把有限区间分解成有限多小区间,从而把积分方程表示为线性方程组,然后过渡到极限.不过,他们没有对无穷多代数方程组实现极限过程,而是直接写出最后的行列式,并说明这些行列式就是积分方程的解.希尔伯特则使它成为一种标准方法,并严格证明了这个极限过程.

(2)选取对称核,得出更多、更完备的结果.希尔伯特假定核是实对称的,即

$$K(t,s)=K(s,t),$$

这当然是一种限制,由此却可以把二次型理论推广到无穷多个变元的情形,这样就向前迈进了一大步,显然对称矩阵$(K(y_k,y_j))$是二次型

$$\sum_{j,k}K(y_k,y_j)\xi_k\xi_j$$

的矩阵.二次型的重要定理是主轴定理,希尔伯特自然地把这个定理过渡到无限,从而建立了谱理论.实际上,弗瑞德霍姆行列式的特征根是实的,可以按大小顺序排列

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$$

对于每个 n,对应一个特征函数 φ_n,使得当 $m\neq n$ 时,

$$\int_a^b\varphi_m(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t=0,$$

仿照二次型理论,将 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\cdots$正交归一化,即令

$$\int_a^b(\varphi_n(t))^2\mathrm{d}t=1,$$

于是希尔伯特证明了他的广义主轴定理:对于任何两个连续函数 $x(s)$及 $y(t)$,

$$\int_a^b\int_a^bK(s,t)x(s)y(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sum_n\frac{1}{\lambda_n}(x|\varphi_n)(y|\varphi_n),\quad(3)$$

其中

$$(x|\varphi_n)=\int_a^bx(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s,$$

$(x|\varphi_n)$可看成用特殊函数 φ_n 来展开 $x(s)$的傅立叶系数,特别重要的是,他证明(3)式右端在条件

$$\int_a^b (x(t))^2 dt \leqslant 1,$$

$$\int_a^b (y(t))^2 dt \leqslant 1$$

之下一致收敛,而这无非就是希尔伯特空间的单位球的影子.而且他证明,在一般情况下,λ_n 的集合是无穷的.为了排除连续谱,他引入了全连续的概念,这在泛函分析中也是十分关键的.希尔伯特还自然地把这理论推广到复埃尔米特核

$$K(s,t)=\overline{K(t,s)}$$

的情形,其中"——"表示取复共轭.

(3)把求解 $\varphi(s)$的积分方程看成求 $\varphi(s)$的傅立叶系数问题,特别是证明,如果 $f(s)$是连续函数,且存在 g,使

$$\int_a^b K(s,t)g(t)dt=f(s),$$

那么 $f(s)$可表成 K 的特征函数的级数,这个级数绝对且一致收敛.由此,他证明

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt=0$$

除特征值 λ_p 之外,没有非平凡解.然后,通过把积分方程归结为无穷多变元的线性方程,他严密证明弗瑞德霍姆择一定理,即对 $\lambda\neq\lambda_p$,方程

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt=f(s)$$

有惟一解,而当 $\lambda\neq\lambda_p$ 时,这个方程有解当且仅当对于 λ_p 的特征函数 $\varphi_{p,1},\cdots,\varphi_{p,l}$,有

$$\int_a^b \varphi_{p,i}(s)f(s)ds=0,\quad i=1,\cdots,l$$

成立.

希尔伯特关于积分方程的工作正如他过去的工作一样,开辟了一个广阔的未来.他在 1906 年发表的第四篇论文中,把注意的焦点由积分方程变为有界双线性型,从而完整地建立起谱理论,其意义远远超出对积分方程的研究.

3.5 希尔伯特以后的积分方程理论

1906 年以后,在希尔伯特的带领下,形成了研究积分方程的热潮.

(1)希尔伯特的学生施密特(Erhard Schmidt,1876—1959)简化了希尔伯特的证明,去掉不必要的强假设,向泛函分析的表述迈进了一大步.特别是他的理论不再依赖弗瑞德霍姆理论,并把对称核表示为一个退化核及一个“小”核之和.对于积分方程论,他在 1907 年把对称核理论推广到非对称核上.

(2)希尔伯特的学生外尔在其博士论文中,把希尔伯特理论推广到积分限为半无界的积分方程.希尔伯特在 1906 年的讨论班上已经指出,对这种奇异积分方程,弗瑞德霍姆的定理不一定成立.特别是对于存在连续谱的情形,外尔进行了深入研究,并开辟了这一重要方向.

(3)由于 1901 年勒贝格引入更一般的积分——勒贝格积分,1907 年匈牙利数学家黎斯(Frigyes Riesz,1880—1956)考虑勒贝格平方可积的函数,从而得出第二类方程

$$f(s)=\varphi(s)+\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

在 $f(s)$与 $K(s,t)$勒贝格平方可积的条件下可解.当然,他在泛函分析方面的工作远为重要.

(4)1907 年英国数学家贝特曼(Harry Bateman,1882—1946)

开始对第三类积分方程进行研究,而在此之前,完全没有第三类积分方程的提法,他的工作为毕卡(1910)、富比尼等人所继续.

(5)1907年施密特开始对非线性积分方程进行系统的研究,这一领域极为复杂,他主要建立非线性积分方程的分叉理论,对后来的工作有重要影响.1930年哈默斯坦引进积分方程

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x,s)f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s=0,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

后来称之为哈默斯坦方程.他还研究 $K(x,s)$ 对称且特征值为正的情形,得出解存在的条件,并通过逐次逼近法加以构造.对于非线性方程,后来发展了变分方法及拓扑方法.

(6)关于对合型积分方程,1921年F·诺特(Fritz Noether,1884—约1939,M·诺特之子,E·诺特之弟)系统研究具有希尔伯特核的积分方程,并证明诺特三定理,其中包括方程指标有限定理.其后,具有这种性质的算子被称为弗瑞德霍姆算子,这在大范围分析中具有重要意义.

1930年维纳和霍普夫引入的维纳—霍普夫方程是具有卷积核的奇异积分方程,他们创立了一套解法,在许多方面有重要应用.

积分方程还有许多重要推广,特别是多维积分、流形上的积分等,均有广泛的应用.

4　变分法

现在的变分法是这样的数学分支,它研究求泛函的极值及相应的极值函数的方法.可是在变分法建立的时期,不仅没有泛函的概念,就是连函数的概念也很模糊.至于函数集合及其拓扑

的观念,根本就没有.因此,对于变分法的基础,直到20世纪初才算有清楚的认识.另一方面,变分法问题作为极值问题或者极大极小问题,却古已有之,如迪多(Dido)问题,即在同样长度的闭曲线中求包围面积最大的曲线,古代已知道这是圆周,但是严密的证明很难给出.古代也知道相同表面积包围的体积最大的闭曲面是球面,这些等周问题成为后来变分法的来源之一.

4.1 前史

近代变分法的问题来源于牛顿的最小阻力抛射体问题、约翰·伯努利的最速降线问题和雅各布·伯努利的等周问题.对于这些问题,在17世纪末开始研究时,基本上是考虑使得形如

$$J=\int_a^b f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的积分达到极大或极小的函数 $y(x)$.

牛顿在他的《自然哲学的数学原理》(1687)中讨论了物体在液体中的运动,例如使运动阻力最小的旋转曲面所具有的形状,他在1694年给大卫·格雷高利(David Gregory,1659—1708)的信中给出了解法.但他对这个问题的解法应用了特殊技巧,并不是变分法的典型.直接推动变分法产生的是最速降线问题,它由约翰·伯努利在1696年6月号的《博学者学报》上提出,向其他学者挑战.他的问题是求连接一定点 $P_1(x_1,y_1)$ 到其下方另一点 $p_2(x_2,y_2)$ 的曲线,使得质点在重力作用下沿该曲线下滑所经历的时间最短.如果化为积分形式,即令

$$J=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{y(x)-\alpha}}\mathrm{d}x$$

极小,其中 $\alpha=y_1-\frac{v_1^2}{2g}$.这个问题不是新的,伽利略在1630年和

1638年曾错误地认为这是圆弧.而正确的解答是连接这两点上凹的旋轮线.牛顿、莱布尼茨、洛比达、雅各布·伯努利和约翰·伯努利都给出了解答,他们的解答都发表在 1697 年 5 月号的《博学者学报》上.值得注意的是,约翰·伯努利的解法很简单,他通过光的最小路径原理得出微分方程

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{x-a}}.$$

雅各布·伯努利则是通过冗长的几何证明,得出同样的微分方程,显然他的结果更具有普遍意义,向变分法迈进了一大步.在这期《博学者学报》上,雅各布·伯努利向他的弟弟提出一些比较复杂的等周问题.于是,约翰·伯努利提出几种解法,其中之一在 1706 年的《巴黎科学院文汇》上发表,不过都是错误的.1700 年雅各布·伯努利给出一个正确的解答,这再次显示出雅各布·伯努利对变分问题的研究已十分接近正确的途径.

在同一期《博学者学报》上,雅各布·伯努利还提出"具有变端点的最速降线"问题,并在 1698 年给出解答.

雅各布·伯努利去世后,约翰·伯努利于 1718 年改进他哥哥 1700 年的结果,于 1718 年发表.不过,他没能把他哥哥的思想推向更高的境界.他在变分法上的历史功绩是使年轻的欧拉注意变分问题,特别是 1728 年他提示欧拉利用测地线的密切平面与曲面正交这个性质得出曲面上的测地线来.显然,他还没有能够用一个一般方法来处理变分问题.

4.2　变分法的建立

1728 年欧拉开始研究变分法,他解决了特殊曲面上的测地线问题,后来推广到一般变分问题.他再次从更一般最速降线问

题入手,1736 年发表了著名的欧拉方程,即:使 J 达到极大或极小的函数必须满足常微分方程

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0.$$

1736—1744 年间欧拉改进了他的方法,解决一些更一般的问题,例如极小旋转曲面是悬链面,并给出弹性杆问题的解.这些成果发表在 1744 年出版的《求具有某种极大或者极小性质的曲线的技巧》(*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*)中,这本书的出版标志着变分法作为一门学科正式诞生.但是,他的方法仍然是几何的、复杂的,还不能统一成一个普遍的方法.

欧拉的工作引起了拉格朗日的注意,正是拉格朗日引进了纯分析的方法,并对范围很广的一个问题得到了一个系统的方法.他在 1755 年 8 月给欧拉的一封信中称这方法为变分方法.拉格朗日引进泛函 J 的变分概念

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (f_y \delta y + f_{y'} \delta y') dx,$$

他假定 δ 与 d 两个运算可交换,把一次变分化成

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[f_y \delta y + f_{y'} \frac{d}{dx}(\delta y') \right] dx,$$

他利用 δy 在端点为 0 这个事实,得出

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[f_y \delta y - \left(\frac{d}{dx} f_{y'} \right) dy \right] dx,$$

对于极大化或极小化函数

$$\delta J = 0,$$

拉格朗日断言 δy 的系数为 0,即

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

拉格朗日的结果在 1760 年发表(1762 年出版).但拉格朗日对于断言的证明,许多是错误的,直到 1848 年撒吕斯(Pierre Frédéric Sarurs,1789—1861)才给出一个正确的证明,此即变分法基本引理.

欧拉在收到拉格朗日的信之后,于 1756 年 9 月两次向柏林科学院宣读论文,他正式用《变分演算》(*Calculi variationum*)作为论文题目,表示对这种新演算方法正式承认.这篇论文发表的年份是 1764 年,实际上在 1766 年出版.

其后,欧拉及拉格朗日都发表了一系列论文,而最终拉格朗日在他的《函数演算讲义》第 2 版(1806)中把变分法纳入他的整个数学分析的庞大方案之中,即把分析代数化,使之建立在泰勒展开之上.至此,变分法已完成其形式阶段.拉格朗日更重要的贡献在于已把变分法系统地应用于力学,在他的《解析力学》(1788)中,他把最小作用原理等以变分的形式表达,推出拉格朗日方程,从而把力学数学化.

4.3　极值条件

欧拉方程只是使积分取极大或极小的解所应满足的一个必要条件,但对于什么是充分条件,直到 18 世纪末才由拉普拉斯和勒让德进行研究.1782 年拉普拉斯企图求解该问题,但没有成功;1786 年勒让德给出了由第二变分表达的必要条件,即

$$\delta^2 J \geqslant 0,\ J \text{ 取极小};$$

$$\delta^2 J \leqslant 0,\ J \text{ 取极大}.$$

由此推出,沿 $y(x)$上每点 x,

$$f_{y'y'} \geqslant 0,\ J \text{ 取极小};$$

$$f_{y'y'} \leqslant 0,\ J \text{ 取极大}.$$

但他在 1787 年认识到这仍然不是充分条件.直到 1837 年,雅可比引进了共轭的概念,并给出了第三个必要条件.他断言,如果一个函数满足欧拉方程并且沿着这条曲线有 $f_{y'y'}<0$,而且在 a 与 b 之间不存在共轭点,则这个函数就是积分 J 的一个极小.但这个条件并不正确.雅可比的理论经过 30 多年的发展,并没有得到很好的澄清,直到外尔斯特拉斯对变分法的研究,才使经典变分法理论得到完整的论述.1865—1890 年外尔斯特拉斯在柏林大学的讲课中,给变分法奠定了一个新的基础.他指出,以前的所有条件都是有局限性的,也就是说 $y(x)$适合与其他有限制的曲线类相比较,实际上要求出真正的使 J 极小或极大的曲线 $y(x)$,必须把它同连接 a,b 的所有曲线相比较,我们可以说这种变分是强变分,而以前的条件是弱变分.外尔斯特拉斯在 1879 年证明弱变分的三个条件是充分条件,并进而考虑变分的充分条件.为此,他引进了过剩函数 E:

$$E(x,y,y',p)=f(x,y,p)-f(x,y,y')-(p-y')f_{y'}(x,y,y'),$$

并且给出 $y(x)$使 J 达到极小的第四个必要条件,即对每个有限值 p,沿极值曲线 $y(x)$上,有

$$E(x,y,y',p)\geqslant 0.$$

外尔斯特拉斯的理论首先由策梅罗(Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo,1871—1953)在 1894 年的博士论文中加以阐述,后来又出现在其他一些论文中,最后在克耐泽(Adolf Kneser,1862—1930)的《变分法教程》(1900)中系统地得到发展.

4.4　19 世纪末以来的发展

19 世纪的变分法除了最终确定极值条件之外,在应用上也有重大发展.其中最主要的是物理学上的变分原理以及几何学

上的测地线与极小曲面,直到现在这些仍然是变分法、偏微分方程研究的主要推动力.19 世纪中最令人不安的理论问题是狄利克雷原理.自从外尔斯特拉斯举出反例之后,半个世纪无人问津,直到希尔伯特恢复它的名誉为止.在这个过程中,希尔伯特创立直接方法解决问题.他直接提出而不是造出极小化函数,作为函数列的极限,使得所研究的积分值趋于其极小值.对于古典的狄利克雷积分

$$D[u]=\iint_G\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

如果 u 具有连续导数且取给定边界值,则称函数 u 为可允许的.设 $D[u]$的下界为 d,对于可允许函数 u,可以定出可允许函数序列 u_n,使得当 $n\to\infty$时,$D[u_n]\to d$.由于函数序列 u_n 不一定收敛,希尔伯特采取以下处理方法:

(1)使积分光滑化.因为极限函数调和服从调和函数的平均值定理,u_n 在任一点 P 的值等于它在围绕 P 的任意小圆 K 上的平均值,这样用 u_n 在 K 上的平均值代替 $u_n(P)$,使它收敛于 $u(P)$.

(2)从 u_n 中筛出一个适当的收敛子序列,后来由于查伦巴发现一个简单不等式

$$\{D[u_m-u_n]\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\{D[u_m]-d\}^{\frac{1}{2}}+\{D[u_n]-d\}^{\frac{1}{2}},$$

而使得这一步没有必要.

经过希尔伯特修改之后,狄利克雷原理可以有条件地应用,从而可以解决一系列基本问题,例如单值化问题.他的直接方法也成为微分方程数值解法的直接方法的基础,从理论上也开辟了一个新天地.经过勒贝格、托耐利等人的发展,直接方法已有稳固的基础,近半个多世纪已经推广到高维积分的情形.

实际上,从变分法建立之初,变分法已经向各方面推广.最早的推广是由一个独立变元到两个或三个变元,这时泛函的积分也变为重积分.撒吕斯在1846年解决了这个问题,他由条件

$$\delta\iint_R f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

推出偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f_p}{\partial x}-\frac{\partial f_q}{\partial y}=0,$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

他曾获得巴黎科学院1842年的大奖.

20世纪初,变分法研究再次兴起一个热潮,以希尔伯特为首的德国学派占主导地位,特别是卡拉提奥多里(Constantin Carathéodory,1883—1950)和德国数学家波尔查(Oskar Bolza,1857—1942).波尔查曾于1893—1910年在芝加哥大学任教,从而把德国学派的成果带到美国.他提出波尔查问题,它以拉格朗日和迈耶(Christian Gustav Adolph Mayer,1839—1908)问题为其特殊情形.20世纪30年代以后,变分法在两个方向上有重大突破,一是20世纪30年代兴起的大范围变分法,二是20世纪50年代兴起的最优化理论,它们都是当前的热门.

第11章 代 数

在19世纪,代数的基本问题仍是代数方程及方程组的求解,由此引出一系列的新领域.

1 通 论

数学中代数这一分支经历过多次变化,而每一次变化都如此之大,以至于它们的对象及研究目标没有什么关系,并且后来的代数对于前面的代数来说,总要冠以“近代”,以示区别.19世纪数学的多样性在代数的转变中得到了充分的反映.

古典的代数对于贫乏的几何式代数来说是一个飞跃,它是一种求解数值方程的算法,因此,算法与代数语出同源.

16世纪末,符号代数或字母代数的产生并没有改变代数的算法本性,但是随之而来出现两类相关的新问题:

(1)计算规则,即哪些计算是合法的;

(2)计算对象,即哪些对象是合法的.

实际上,代数从某种意义上来讲是计算规则及计算对象的扩大,后者尤其明显,如通过对代数方程的求解,出现负数及虚数,对于它们,西方数学家争论了几个世纪.

从16世纪到18世纪,求解代数方程是代数的主流,其中心

问题是算,这也符合当时的潮流,因为无论算术、几何、微积分及概率演算,都是解决算的方法问题.

算的本质是构造解,因此当演算经历了数次失败之后,出现两种新倾向:

(1)数值计算或近似计算.实际上这也是构造算法,但同时要考虑计算精度、误差以及收敛的快慢等计算理论问题.

(2)方程理论.首先是存在性问题,特别是证明一般五次方程不一定存在根式解的问题,理论问题逐渐代替算法而成为代数的主流.

这两种倾向在18世纪之前已经出现,到19世纪成为主要潮流.1840年左右,以前的两种倾向又得到发展.

(1)运算规则的系统化及扩大化,主要是英国学派关于"形式永恒性原则"的提出以及超出数值运算的结合律、交换律及分配律等新规则的确立,如幂等律、德·摩根律等.

(2)运算对象的扩大,运算不限于数、量(虽然它们的基础也不牢固),而引进新对象,特别是向量、四元数以及超复数,另外还有行列式、矩阵、置换、变换等等均成为运算的对象,只是它们的运算规则不一定再服从数的运算规则.

大约1840年左右,代数学发展成为对任意对象进行运算操作的一门科学.

从1840年左右到1920年左右,代数学又酝酿着第三次变革,这一次变革的最终结果使得代数学成为研究抽象代数结构的一门结构数学.导向这条道路的途径有如下几条:

(1)代数方程论→置换理论→置换群理论→一般群理论→抽象群理论.

代数方程组理论→消去法理论→交换环论.

(2)代数数论→理想数理论→理想理论→交换代数理论.

代数函数论→代数几何学→理想与除子理论→交换代数理论.

代数方程、代数几何学、数论、型论→域论.

型论→不变式论→交换代数理论.

(3)四元数→超复数→结合代数及非结合代数理论.

(4)李变换群→李代数理论→李群理论.

2 线性代数及多线性代数

线性代数学是既古老又年轻的数学分支.说它古老,是因为解线性方程

$$ax + b = 0$$

的问题是线性代数的最原始问题,它和数学本身一样古老.虽然这个问题并不困难,但是解这个问题的原理,却是整个线性代数的思想及方法的原始标本.说它年轻,是因为线性代数学作为一门学科,不像解析几何学和微积分那样,有一个明确完成的时期,其主要内容,在数学各个分支中不断应用,是陆续完成的.直到19世纪末才算初具规模,到20世纪30年代才成为一门独立学科,并且像微积分一样成为数学基础训练不可少的内容.线性代数的成果分散在解析几何学、线性方程组、数论、二次型理论、行列式论、线性微分方程理论、斯图姆—刘维尔方程论、矩阵论、傅立叶级数展开等许多分支中.在19世纪,"线性代数"一词只用于指线性结合代数,即超复系.

线性代数学的对象可以分为三种相互关联的对象:线性空间(或向量空间)、线性变换(或线性代换或矩阵)、线性形式(或

线性型或线性函数).线性代数学的大部分内容可以采用不同的语言及观点来叙述,但它们彼此等价.另外,它们在不同学科中往往以不同的面貌出现,比如在几何学、分析学和力学中,同一线性代数问题的提法可以完全不一样.

线性代数学来源于解线性(一次)联立方程或线性方程组.创立解析几何学之后,线性方程组的重要性更加突出,关于空间中平面和直线的位置关系的所有问题,都可以归结为线性方程组来研究.许多民族很早就知道,对于两个未知数、两个方程甚至三个未知数、三个方程,可以通过消去法去求解.系统的方法最早来自莱布尼茨.他早在17世纪70年代就已经进行研究,并在1693年引进相当于现在行列式的符号,得出由三个二元方程组成的方程组的结式行列式.他证明,如果结式行列式为零,则这三个方程有解.

用行列式方法解含有两个、三个或四个未知数的联立线性方程组是英国数学家麦克劳林在1721年开创的,并发表在他的遗著《代数通论》(*A Treatise of Algebra*)(1748)之中.虽然他的记号不好,但方法与现在的方法并没有什么不同.

通常所说的克拉梅法则出现在克拉梅的《代数曲线分析引论》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques*)(1750)中.他为了得出通过给定五个点的二次曲线的方程

$$A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0,$$

需要求出系数 A, B, C, D, E 所满足的线性方程组,他把系数表成两个行列式之商,确定行列式的数值的求法,它们可以表为一些乘积的和,并根据因子的排列顺序决定该乘积符号的正负.实际上,真正完成关于 n 个未知数 n 个线性齐次方程的求解理论的是贝祖.1764年,贝祖把确定一般行列式每一项的符号的方

法系统化,并且证明,系数行列式等于零是齐次方程组有非零解的条件.

行列式是由解线性方程组得出的,但随着行列式应用的日益广泛,行列式本身成为数学的独立研究对象,行列式论也就应运而生了.第一个系统阐述行列式理论的是范德孟,他引进子式及余子式的概念,并制定了用二阶子式展开行列式的规则(1772).1773年,大数学家拉普拉斯证明了范德孟规则,并推广其展开行列式的方法,现在称之为拉普拉斯展开定理.同年,拉格朗日在解物理问题中得出三阶行列式的平方公式,但是他没有加以推广.直到1812年法国数学家比内才叙述行列式的乘法定理:两个 n 阶行列式 $|a_{ij}|$, $|b_{ij}|$ 相乘

$$|a_{ij}||b_{ij}| = |c_{ij}|,$$

则

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

但他没有给出令人满意的证明.这个行列式论的基本定理是柯西于1815年证明的.他还引进现在使用的符号和记法.1825年舍尔克(Heinrich Ferdinand Scherk,1798—1885)给出行列式的加法规则和关于常数的乘法规则.他还知道,当行列式的某些行线性相关时,行列式为零.

雅可比在1841年把行列式的元素扩大为函数,并给出导数公式.更重要的是,他在1842年引进所谓雅可比行列式或函数行列式,后来还给出乘积定理.行列式的记号(| |)是凯雷在1844年首先引进的.

在此之前,雅可比的第一篇有关线性代数的论文于1834年发表在《克莱尔杂志》上,它有一个极长的题目《论通过线性代换

(persubstitutiones lineares)把两个任意二次齐次函数变换为两个另外的二次齐次函数,它只含变元的平方项,另附许多重积分的变换和计算的定理》.实际上,他证明,如果两个二次型中的一个是正定二次型,那么可以把它们同时对角化.同时,他还得出一个线性变换保持平方和 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 不变的条件,用现代术语来说就是变换矩阵是正交的.1858 年,外尔斯特拉斯给出同时将两个二次型化为平方和的一般方法.

19 世纪中期,研究已涉及到关于 n 个未知数 m 个线性方程的解.斯密司引进增广行列式的概念,他和其他数学家对这类方程组进行了系统的叙述.第一本关于行列式论的专著是 1867 年出版的《行列式简论》(*An elementary Treatise on determinants*),作者是著名作家卡洛尔,他的《爱丽丝漫游仙境》(*Alice's Adventures in Wonderland*)(1865)等书是世界儿童文学的名著.在这本关于行列式的论著中,他给出了 n 个未知数 m 个线性方程组相容的充分必要条件.

从这时起,行列式论涌现出大量定理,其中涉及各种在应用中出现的对称行列式、斜对称行列式、正交行列式、加边行列式等等.

行列式是一种极其特殊的多线性型.在型论中,研究最多的是二次型或更广一点的双线性型.在数论中,二次型起源很早,到拉格朗日及高斯已经作了系统的研究.在结晶学中研究的也是整数二次型.在几何学、物理学和力学中出现的是一般实系数二次型,其中一个基本问题就是把二次型化为标准形式.柯西在 1826 年主要研究把二次曲线或二次曲面变形,将曲线或曲面方程化简,最后把方程化简为只有二次项,并通过二次项的符号来进行分类.直到 1851 年,西尔维斯特才提出他所谓的“惯性定

律”:实系数二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 总能用具有行列式不为零的实线性变换

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

化为 r 个平方项的和

$$y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

不管用什么变换,正项个数 s 及负项个数 $r-s$ 总是不变的.但是,他没有给出证明.雅可比独立发现并证明了这个定理,但直到 1857 年才发表.1868 年外尔斯特拉斯完成二次型理论,并推广到双线性型.双线性型是指

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n,$$

它对应行列式 $|a_{ij}|$.利用西尔维斯特的初等因子概念,他得出双线性型束 $A + \lambda B$ 的标准型,并证明其行列式 $|a_{ij} + \lambda b_{ij}|$ 的不变因子是其不变量完全集.

现在被认为是线性代数的核心的矩阵在历史上出现得很晚,但与矩阵有关的性质都表现在线性变换、二次型和行列式的理论当中.矩阵这个词首先由西尔维斯特在 1850 年使用,主要是为了与行列式的数列区别开.现在意义下的“矩阵”是 1857 年由凯雷引进的(1858 年发表),这并非一个重大的创造,实际上是为了表达方程系数(变换)而引进的.凯雷的研究实际上并没有引起多大注意.用方阵表示线性变换的思想,高斯在他的二次型理论中就已提出,他还提出把两个线性变换结合成第三个线性变换(也就是矩阵的乘法)的思想.高斯的这种符号代数后来为爱森斯坦(Ferdinand Gotthold Max Eisenstein,1823—1852)所发展,他在自己的研究中认识到,线性变换可以相加、相乘,可以求逆及幂,尤其是他注意到乘法不可交换,这与行列式有着原则性

不同.埃尔米特也曾使用过这种符号代数.

凯雷通常被认为是矩阵论的创始者,这是由于他首先把矩阵本身作为研究对象,并提出凯雷—哈密尔顿定理,即矩阵满足方程

$$|M - xI| = 0,$$

其中 x 是未知数,I 是单位矩阵,$|\,|$表示行列式.他只对 M 为 2×2 矩阵的情形进行了验证,并说曾对 3×3 矩阵验证过,并认为不必进一步证明.这表明,凯雷的贡献主要在形式方面.

矩阵论的重要问题是把矩阵化为标准型及特征值理论,这些在 1870 年之前,都以其他形式出现.我们称上述方程为特征方程(柯西,1840),其根为特征根(或谱).在天体力学中,久期运动的微扰问题就涉及特征值问题,尤其是对于特征值何时为实数难于确定.拉普拉斯曾发现,矩阵的对称性与特征根为实数有关.直到 1829 年,柯西才证明,对称矩阵的特征值是实的.1855 年埃尔米特推广到埃尔米特矩阵(即矩阵等于其转置共轭),他证明埃尔米特矩阵的特征根也是实的.

相似矩阵的概念具有明显的几何意义,它代表同一变换,这个概念原来柯西已有.如果存在一个非奇异矩阵 P,使得 $B=P^{-1}AP$,那么两个方阵 A,B 被称为相似.外尔斯特拉斯在 1868 年证明,两个相似矩阵的特征方程相同.若尔当于 1870 年证明,如果矩阵可变换到一个相似矩阵,那么它具有若尔当标准型.

把矩阵论系统化的是德国数学家弗罗宾尼乌斯,他在 1877—1879 年的几篇论文中,引进矩阵的秩的观念,并提出求矩阵所满足的最小多项式的问题,它是由特征多项式的因式构成的.1904 年亨塞尔证明,最小多项式是惟一的.弗罗宾尼乌斯还把西尔维斯特及外尔斯特拉斯的不变因子和初等因子理论引进

矩阵理论,他证明,矩阵 A 与 B 等价,即存在两个非奇异矩阵 U,V,使

$$A = UBV,$$

当且仅当 A 和 B 有相同的初等因子或不变因子.

从此以后,关于矩阵本身的研究工作,引进一系列特殊的矩阵,如正交矩阵、酉矩阵等,还引起对矩阵函数的研究,如矩阵幂级数及收敛定理. 19 世纪 80 年代中期,西尔维斯特及凯雷等人开始一般矩阵方程的研究,例如求解 $AX = XB$, $AX = XA'$, $AX = XA$ 等方程. 19 世纪 90 年代,关于无限维矩阵的研究直接导致泛函分析的产生.

3 代数方程论

3.1 阿贝尔

第一次严格证明五次和五次以上的一般代数方程不能用代数方法求解的是年轻的挪威数学家阿贝尔. 阿贝尔,1802 年 8 月 5 日生于挪威的芬杜岛,他的祖父和父亲都是路德派新教牧师. 芬杜岛是他父亲所任的第一个教区. 阿贝尔弟兄六人,他排行第二,还有一个妹妹. 1814 年,阿贝尔的父亲成为议会议员. 他们兄弟的启蒙教育都来自父亲. 1815 年阿贝尔被送进克里斯蒂安尼亚(今奥斯陆)的教会学校. 1817 年由于原来的数学教师虐待学生致死而被解聘,新来的教师是荷尔伯(Berndt Michael Holmboe,1795—1850),他是第一位对阿贝尔一生有影响的人,他很快就发现阿贝尔不同寻常的数学才能. 起初他给阿贝尔一些题做,并推荐一些课外参考书给他看,后来两人一起学习欧拉的

微分法和积分法的教科书以及拉格朗日和拉普拉斯的著作.阿贝尔进步很快,毕业时他已掌握大部分重要的数学知识.在最后一年中,阿贝尔已经研究五次方程求解的问题.他自以为找到了一般解的形式,但在挪威没有人看得懂,也没有刊物可以发表.克里斯蒂安尼亚大学应用数学及天文学教授汉斯廷(Christopher Hansteen,1784—1873)把这篇论文寄给丹麦数学家德根(Carl Ferdinand Degen,1766—1825),请他协助发表.德根没有发现文章有什么错误,但要求阿贝尔用例子来解释其方法.阿贝尔在构造例子时,发现自己的方法是错误的.于是,他接受德根的建议转而去研究椭圆函数理论.

阿贝尔的父亲于1820年去世,使这个多子女的家庭陷入了经济十分困难的境地.1821年秋天,阿贝尔进入大学,在学校宿舍里住一间免费的房间.由于他的才能,教授们用自己的薪金帮助他完成学业.一年后,他就得到学位并开始自学一切数学文献,不论是重要的还是不重要的都去看.从这时起,阿贝尔开始集中精力搞数学研究,不久就在汉斯廷办的全国性期刊《自然科学杂志》上发表有关函数方程的论文.他还写了一篇关于代数函数积分的论文,但手稿已遗失.1823年,他发表数学史上第一篇解积分方程的论文,文章讨论质点在重力影响下在曲线上运动的力学问题,因原文是用挪威文写的,未受到重视.1823年夏天,数学教授拉斯穆森(Sören Rasmussen,1768—1850)支援他100台拉到丹麦会见德根及其他数学家.回到挪威后,他又重新研究起五次方程求解的问题.这一次他采取否定的观点,并取得了成功,最终证明一般五次方程不可能根式求解.他首先证明,可以用根式求解的方程,其根的表达式中根式均可表成方程的根和某些单位根的有理函数.为了扩大这篇文章的影响,他决定写成

法文自费出版.为节约开支,他不得不大大压缩篇幅,使得这篇论文相当难懂.他把这篇论文寄给许多大数学家,结果毫无反应.在这两年时间内,他学习外语,准备出国,同时他写了一批论文.经过一段拖延之后,1825年夏天,他同其他四名留学生一同去柏林.对阿贝尔来讲,到柏林是非常幸运的,特别是结识克莱尔,实际上这是他生活中的又一转机.他的工作开始有了公开发表的场所.《克莱尔杂志》第一期发表的全是阿贝尔的论文,其后又陆续刊登他的其他许多文章.

1825—1826年的整个冬天,阿贝尔呆在柏林写论文.1826年初,他同挪威的朋友们一起在中欧旅行.他们乘马车经过波希米亚、奥地利、意大利北部,然后穿越阿尔卑斯山到法国,7月份到达巴黎,这几乎花掉他大部分的钱.途中他碰到勒让德,当时年迈的勒让德正在准备他的《椭圆函数论》,于是阿贝尔在巴黎准备了一篇长文,于1826年10月30日呈交法国科学院,题目是《论一类极广泛超越函数的一个一般性质》,其中提出比椭圆函数及超椭圆函数更广泛的阿贝尔函数(实际上是阿贝尔积分,当时椭圆函数等一般指椭圆积分),并证明阿贝尔大定理.审查人柯西及勒让德没能使它及时发表,一直压着,直到1841年重新找到后才问世.阿贝尔没有等到论文发表,在圣诞节后不得不花掉最后一点积蓄作旅费,于1827年初返回柏林.回到柏林后不久,他感染上肺结核,在贫病交迫的情况下,他继续努力工作,写出《关于椭圆函数的研究》的长文,这篇论文完成了椭圆积分向椭圆函数研究的转变,发表在1827年9月的《克莱尔杂志》上.1827年5月20日阿贝尔回到克里斯蒂安尼亚,他在家乡所面对的是一贫如洗的生活,他负了大量债务却没有希望找到职位,他想申请延长奖学金的期限也被财政部驳回.大学要给他少

量补助,也遭到财政部的非难.整个秋天,他不得不靠在克里斯蒂安尼亚做家庭教师及朋友的接济糊口.1828年初,由于替汉斯廷在大学及军事学院代课,他的情况才略有改善.这时雅可比已发表了他的椭圆函数变换理论,于是阿贝尔又写了一系列椭圆函数的论文,从而在这个竞赛中无疑处于领先地位,这时他已受到欧洲主要数学家的注意.1828年9月法国科学院的四位院士向瑞典国王卡尔十四世(一度是拿破仑的元帅贝尔纳多特(Jean Baptiste Jules Bernadotte,1763—1844))请愿,请求他照顾阿贝尔,克莱尔也为他积极活动.但是阿贝尔的病弱之躯已等不到他得到的荣誉及职位的那一天.他不顾病情恶化,坚持写论文,到1828年圣诞节,又把呈交给法国科学院的论文的主要定理证明写成短文寄给克莱尔.1829年3月阿贝尔开始大量呕血,4月6日他离开了人世.1830年6月,法国科学院把大奖授予他和雅可比,表彰他们在椭圆函数论方面的重大突破.

阿贝尔虽然只活了26岁,但是他的工作无论从广度及深度来看,都是极为了不起的.埃尔米特说得很中肯:"阿贝尔留下的思想可供数学家工作150年."阿贝尔是19世纪最重要的分析家,除了代数方程以及椭圆函数论的奠基性工作之外,他在代数数论(复数乘法)、数学分析、函数方程、分析基础以及超越时代的代数函数论方面的工作都极为杰出,成为后来新学科的萌芽.

阿贝尔还是积分方程论的先驱,他求解的阿贝尔积分方程是第一个积分方程,只是在当时没有受到注意.另外,他还首次给出一般二项式定理的严密证明.

阿贝尔的论文曾于1839年由荷尔伯编辑出版,不过常用的《全集》(*Oeuvres Completes*)是经西洛和S·李精心编辑,在1881年分两卷出版的.

3.2 伽罗华

伽罗华,1811年10月25日出生于巴黎郊区的布尔-拉-莱恩镇.他的父亲是拿破仑的支持者,在1815年拿破仑百日复辟期间,任该镇镇长,他的母亲是法官的女儿.小时候,他受母亲的启蒙教育,母亲给伽罗华打下坚实的希腊语和拉丁语的基础.但是除了普通的算术之外,没有受到什么更深的数学教育.1823年10月伽罗华进入路易大王学院,从此开始他的正规教育.这所学院是巴黎的预科学校.他从双亲那里继承了自由主义的观点,在学校里也表现出来.在入学后的第一个学期,他就参加了一次小小的造反行动:拒绝在教堂唱圣歌,拒绝为复辟的国王路易十八祝酒.虽然伽罗华没有因此被开除,但校长的镇压反而助长了伽罗华反抗权威的态度.

在路易大王学院最初的两年里,伽罗华成绩不错,并获得过奖励和表扬.第三学年因为对修辞学没有下足够的功夫而重读一年.在这次挫折之后,他才开始选学数学课.这时他已经15岁了,老师的讲课唤起了伽罗华的数学天才,他轻易地学完了普通的课程,并马上阅读当时数学大师们的著作.他学过勒让德的《几何学》,并通过拉格朗日的著作开始学到方程论,从而决定了他以后的研究方向.虽然数学老师很欣赏他的才华,但是由于他忽视其他课程而引起其他老师的不满.他在还没有读完预科课程的情况下,提前一年去考巴黎综合工科学校.由于缺乏基本训练而没有考上.于是,他继续留在学院中选修更高深的课程.在老师里夏尔(Louis Richard,1795—1849)的鼓励下,伽罗华的数学有了飞速的进步.1829年3月,他发表了他的第一篇论文,题目是《周期连分数的一个定理的证明》,登载在《纯粹与应用数学年

刊》上,这篇论文清楚地论述了拉格朗日关于连分数的结果,虽然显示了一定的技巧,但并不是特别富有创见.

据伽罗华自己讲,他在 1828 年也同阿贝尔一样,误以为自己已经解出了一般的五次方程,但他很快就发觉其中有错,并从另外的角度重新开始研究. 1829 年 5 月,他把他的关于群论的结果提交给法国科学院.这时他的生活发生了不幸的转折,1829 年 7 月初,伽罗华的父亲因受到保守势力的迫害而自杀.一个月之后,伽罗华在这种悲愤的心情之下,再次参加巴黎综合工科学校的入学考试.由于他拒绝主考人所要求的做法而再次落第,他不得不去考巴黎高等师范学校.巴黎高等师范学校是培养中学教师的学校,伽罗华由于数学成绩优秀而被录取,并于 1829 年 10 月入学.在巴黎高等师范学校里,他由阅读《数学科学通报》(*Bulletin des Sciences Mathematiques*)得知了阿贝尔不久前去世的消息,同时发现自己呈送给科学院的论文中,也有阿贝尔已经得到的结果.柯西在审定伽罗华的论文时,考虑到阿贝尔已经取得的结果,不得不劝告伽罗华修改他的论文.为了争取科学院的大奖,他精心写了一篇新论文,于 1830 年 2 月末送交科学院.可是由于审定他的论文的傅立叶于 1830 年 5 月去世,他的论文遗失了,于是伽罗华在这次竞争中莫名其妙地失败了.关于这篇论文的简要分析曾发表在 1830 年 4 月的《数学科学通报》上. 1830 年 6 月,他又在同一杂志上发表了关于解数学方程的短篇论文《数的理论》,这篇文章介绍了伽罗华的虚数理论.

正在这时,伽罗华的命运又发生了巨大的转折. 1830 年爆发了七月革命,革命的结果使得代表大资产阶级利益的路易·菲利浦上台,这完全是由于他们利用了大多数人痛恨波旁王朝的情绪.当时还不满 19 岁的伽罗华对保守的高等师范学校校方极

为不满,师范学校的生活方式同修道院差不多,要求吃饭、睡觉前都要搞宗教仪式.在革命爆发后,只有师范学校的学生不准上街参加示威活动,校长把校门上了大锁.伽罗华表示十分愤慨,他多次试图溜到街上去,但都没有成功.于是,伽罗华积极投身于政治活动中,在一份刊物上发表了激烈抨击校长的文章,为此他于1830年被开除.从此,伽罗华把自己的主要精力花在政治宣传、参加游行示威上.同时在1831年1月,他完成了关于方程可解性的研究,并送交法国科学院.但是负责审查的波瓦松绞尽脑汁也没看懂,于是最终建议科学院否定它,好让伽罗华写得更详细些、清楚些.不过,这时他已经没有时间去写了.1831年5月,在一次共和派的宴会上,伽罗华一手举杯,一手拿刀,高喊:"为路易·菲利浦干杯!"由于他明显的讥讽态度,第二天早上被逮捕.在共和派的努力下,他于6月15日被无罪释放.7月11日政府通过逮捕共和党领导人的决议.被吓破胆的政府当局禁止示威游行.在7月14日,伽罗华等人率领600名示威者游行,马上被警察抓走,关在监狱里,一直关到1832年3月16日.在监狱中,他得知1831年7月在科学院的例会上,他的论文被否定.同年10月23日,他出庭受审,被判9个月徒刑.伽罗华在监禁期间仍不停地工作,他想在获释后立即写出两部著作.在他去世后的遗稿中,发现了伽罗华攻击科学院院士特别是波瓦松的记录.1832年3月16日,伽罗华因病由监狱转到医院,不久于4月29日获释.在医院里,他结识了一个"无耻的、卖弄风情的女人",他于5月30日为这个女人参加了决斗.在决斗前夕,他给共和派的朋友们写了绝笔信,并给他的朋友舍瓦利耶(Auguste Chevalier)写了一封信,概括而简要地介绍了他的数学研究结果,希望他的朋友把他的结果告诉高斯或雅可比,要他们公开表示

对这问题的重要性的态度.5 月 30 日,他在决斗中受了致命伤后被送进医院,并于次日身亡.他参加决斗前的信发表在 1832 年 9 月的《百科评论》(*Revue encyclopedique*)上.

伽罗华的工作长期以来没有得到同时代任何人的充分理解.在当时,柯西也许是能够理解伽罗华的惟一的法国数学家,但是由于波旁王朝被推翻而流亡国外.直到 1843 年 9 月,刘维尔正式整理伽罗华的手稿,准备于 1843 年底出版,但一直拖到 1846 年 10 月才发表在《纯粹与应用数学》杂志上.同时,柯西在 1844—1846 年也发表了一系列关于置换群论的文章,这无疑对促使置换群论为大家所接受产生了积极的影响.

伽罗华的数学著作,首次由刘维尔在 1846 年编辑出版. 1897 年在毕卡的主持下,出版《埃瓦里斯特·伽罗华数学文集》(*Oeuvves mathematiques d'Evariste Galois*),还有经于勒·坦纳瑞(Jules Tannery,1848—1910)编辑整理的一些未发表遗稿,收集于《埃瓦里斯特·伽罗华的手稿》(*Manuscrits de Evariste Galois*)中.其后最完整的版本《埃瓦里斯特·伽罗华的著述及论文集》经布尔涅(R. Bourgne)和阿兹拉(J. P. Azra)编辑,于 1962 年出版.它不仅汇集了伽罗华所有已发表的著作,还收集了绝大部分尚保存的信件、手稿及草稿.

虽然伽罗华英年早逝,但他已成为不只在方程论一个领域有巨大成就的专家.尽管只活到 20 岁,但他已经显示出大数学家的广博.他在"虚数"理论中首先引进有限域的概念,这种域后来被称为伽罗华域.他还研究过当时的热门——椭圆函数,这早在 1847 年埃尔米特给雅可比的信中就提到过.伽罗华对数论及分析也有研究.

3.3 一般五次方程代数不可解性的证明

在许多数学家力求得出用根式解五次方程的公式的进程中，第一位认识到这也许办不到的是拉格朗日.对于五次方程，他无法找到低于五次的预解方程.因此他得出结论:用代数运算来解一般的高次方程看来是不可能的.他认为，或者是这个问题超出了人的智力，或者根的表达式超出当时人们所掌握的知识.但是，对于他究竟如何理解代数学基本定理以及根的表达式并不清楚.高斯在他的《算术研究》中也提到，这个问题也许是不可解的.高斯知道解的存在性，认识到解只不过不可能表示为用代数运算的公式.他们的这些说法并没有阻止以后的数学家继续探讨五次方程的根式解，阿贝尔及雅可比都曾力求找出这种公式，甚至在阿贝尔及伽罗华的工作已广泛传播之后，仍有人顽固坚持错误的观点.例如，英国数学家杰拉德到死还认为他得出了根式解，科克(James Cockle, 1819—1895)直到 1862 年还认为这问题尚未解决.而真正沿着拉格朗日的思想深入下去寻求证明的第一个人是意大利数学家鲁菲尼.他从一开始就认识到四次以上的代数方程不能用代数方法解.他与高斯的做法不同，不去研究特殊的可解方程，而主要探讨一般理论.他的第一篇主要著作的题目就反映了这个特点.1799 年，他写了《方程的一般理论:其中证明高于四次的一般方程不可能有代数解法》.但是，许多人指出他的证明中有漏洞和错误.于是，他后来一再修正自己的证明，但没能取得最后的成功.他用拉格朗日的方法证明，对于四次以上的方程，不存在拉格朗日预解函数，满足低于五次的方程.在证明中，他引进置换的考虑，而这对以后的发展无疑有着巨大的影响.他证明，当 $n>4$ 时，不存在 n 元有理函数，当对

这 n 个元素进行置换时,能只取 3 个或 4 个值.在 1813 年发表的论文中,他提供了一条辅助定理:如果一个方程能够用开根解出来,那么根的表达式就可以写成该方程的根和单位根的有理系数的有理函数.对这个定理的完全证明是阿贝尔作出的.

1824 年春,阿贝尔成功地证明一般高次方程不可能有根式解,这是一个完全清楚的证明.他自己出资出版了用法文写的一本只有 6 页的小册子《代数方程论》,论述了证明的梗概.1826 年他在《克莱尔杂志》上发表了一篇更为详尽的论文《四次以上的一般方程代数解的不可能性的证明》,两篇文章的精神是完全一样的.其中的主要之点是证明鲁菲尼的假设:如果方程的根可用根式表出,则根的表达式中的根式都可以表为这些根和某些单位根的有理函数,进而以迂回的方式证明主要定理.

阿贝尔在 1829 年 4 月去世前两个月发表了关于方程论的另一篇论文《论一类特殊的代数可解方程》.他在这篇论文中讨论了一类特殊的可用根式解的方程.他证明了下列一般性定理:

设方程满足下列两个条件:

①方程的所有根 x_i 均可表示为其中一根(比如说 x_1)的有理函数 $x_i=\theta_i(x_1)$;

②$\theta_i(\theta_j(x_1))=\theta_j(\theta_i(x_1))$;

则方程可用根式解.这类方程于 1853 年被克洛耐克称为阿贝尔方程,其中包括分圆方程.这个工作之后,阿贝尔继续探讨能用根式解的方程的特性,并把结果告诉了克莱尔和勒让德.但阿贝尔定理是伽罗华理论的主要定理的特殊情形,而伽罗华理论的主要定理是 1829 年 5 月伽罗华在呈交给法国科学院的一篇论文中证明的.

伽罗华理论不仅证明了一般五次以上代数方程不可根式

解，而且彻底解决了“哪些方程可用根式解”这个判定问题.伽罗华的思路大致如下：

(1)引进基域及基域上不可约方程的概念，也就是由在基域上不能分解成更低次因子的多项式构成的方程.

(2)考虑由所有根的置换构成的群，他是第一个从群的整体而不是个别的置换上来使用群的.

(3)引进伽罗华预解式，仿照拉格朗日的想法，设不可约代数方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根为 $a, b, c, \cdots$，取

$$V = Aa + Bb + Cc + \cdots$$

为方便起见，$A, B, C, \cdots$可适当选取某些整数，这不同于拉格朗日预解式，被称为伽罗华预解式.显然 V 满足 $n!$ 次方程，其不可约部分被称为伽罗华预解方程.于是，他证明引理：

所有根都可以表示为 V 的有理函数，即 $a = \varphi(V)$.设 V 为一个不可约方程的根，$V, V', V'', \cdots, V^{(m-1)}$为该方程的根，则易证：如果 $a = \varphi(V)$是原方程的根，则 $\varphi(V')$也是原方程的根.

(4)引进伽罗华群，他进而证明主要定理，即存在 $a, b, c, \cdots$ 的置换群，使得：

①每个在该置换群下的不变函数是有理已知的(即属于 $a, b, c, \cdots$构成的域)；

②反过来，任何有理已知的根的函数在该置换群下不变.他把这个群称为原方程的群，即现在所说的伽罗华群.

(5)群与域的对应关系.

伽罗华接着研究当基域添加辅助方程的根时，方程的伽罗华群变成原来群的子群.

如果 H 是 G 的真子群,伽罗华引进分解

$$G = H + HS + HS' + \cdots$$

和

$$G = H + TH + T'H + \cdots$$

这两种分解一般不重合,只有当 H 是 G 的"不变子群"或"正规子群"时才重合. 当所有的根都添加进来后,情况仍是这样.

(6)引进可解群的概念.

如果存在有限步终止的群 G 的子群序列

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_m = E,$$

其后每一群均为前一群的正规子群,且所有指数均为素数,他称 G 为可解群. 于是他证明:方程可根式解,当且仅当方程群 G 是可解的.

(7)证明一般五次方程不可用根式解.

设方程 $f(x)=0$ 不可约,次数为素数 p,如果方程可用根式解,当且仅当其方程的群 G 的每一个置换把 x_k 变成 $x_{k'}$,其中 k, k' 满足

$$k' \equiv ak + b(\operatorname{mod} p),$$

而一般五次方程不满足这个条件,从而不能用根式解.

3.4 伽罗华理论的传播

伽罗华理论在很长时期内并没有为数学界所广泛知晓,其传播及接受经历了三四十年的过程. 在法国,刘维尔首先在 1843 年整理伽罗华的遗稿,并于 1846 年在刘维尔的杂志上发表. 其后,塞雷(Joseph Alfred Serret)在他的《高等代数学教程》(*Cours d'algebre supérieure*)第一版(1849)中开始加以介绍,并在第三版(1866)中给予系统的阐述. 塞雷的书被译成多种文字,对其他国家也产生巨大影响. 若尔当在 1870 年的《置换论及代数方

程论》(*Traité des substitutions et des equations algébriques*)中对伽罗华理论也有大的发展,不过已偏重于置换群论了.

在意大利,从1852年起,贝蒂系统地介绍了阿贝尔及伽罗华的工作,他还证明了伽罗华宣布但未加证明的一些定理.

在德国,阿贝尔的工作由于克莱尔的努力而得到普及,在刘维尔的杂志上登载的伽罗华的工作也受到德国数学家的注意.但最早在这方面开展研究工作的是克洛耐克,他在1853年发表的论文《论代数可解方程》已被收入1854年塞雷的《高等代数学教程》第二版中.至于伽罗华理论,大概是克洛耐克在1853年去巴黎时埃尔米特等人告诉他的,在1856年他给狄利克雷的信中介绍了伽罗华理论,这传到戴德金的耳朵里.戴德金在1857—1858年的代数学课程中,第一次开出伽罗华理论的课,从此德国数学家认真对伽罗华理论进行研究,特别是克洛耐克在1879年对阿贝尔的工作给予更严密的证明.其后,克莱因于1886年夏天在格廷根也讲授伽罗华理论.这些工作结合戴德金、克洛耐克在代数数论方面的工作,导致一般域(体)理论的产生,这构成抽象代数学的一部分.用抽象代数学的观点来处理伽罗华理论的工作最终由阿廷在1942年完成,可以说他的《伽罗华理论》(*Galois Theory*)是数学中的一个美妙珍品.

3.5 伽罗华以后的代数方程论

在伽罗华理论的影响下,原来的代数方程的研究形成了三个主要方面:

(1)继续寻求高次代数方程的解,在这方面首先是1858年埃尔米特、克洛耐克及意大利数学家布廖斯奇用椭圆模函数求五次方程根的工作.

(2)寻求高次代数方程的近似解,在19世纪中期,这已成为计算数学一个重要的组成部分,与以后代数学的发展基本上没有什么关系.

(3)由于置换群的引进,产生许多有关群论的问题,群的结构的研究代替方程而成为代数学的主要对象.1870年以后,大部分群论的研究已经同方程没有什么关系,而成为一个独立的分支.

除了这三个新趋向之外,原来的代数方程论仍然还有问题,有的在后来逐步解决,有的至今尚未解决,其中包括:

(1)方程的预解式问题.给定方程,求其用车恩豪斯变换可以化成的最简形式,这个问题也构成希尔伯特第13个问题的一部分.原苏联数学家切保塔廖夫(Nikolai Grigorievich Chebotaryov,1894—1947)给出了初步的解答.

(2)求方程的群的问题.范·德·瓦尔登(Bartel Leenert van der Waerden,1903—1996)及查森豪斯(Hans Zassenhaus,1912—1991)都给出了这个问题的解法.

(3)伽罗华理论的逆问题.给定群,是否有有理系数方程以它为群?近十几年来这些问题有很大进展.

4 置换群理论

置换的概念首先是范德孟及拉格朗日彼此独自在1771年引进的.他们只关心那些使根的某个有理整函数不变的置换,而没有考虑置换的全体.首先考虑置换的集合的是鲁菲尼,他称之为置换集,并研究其性质.他的置换集后来被柯西称为“共轭置换系”,伽罗华则称之为置换“群”.鲁菲尼虽没有“群”的概念,但

他一直用到群的封闭性,即两个置换的合成仍为一个置换这个事实.鲁菲尼把置换集分为单置换集及复置换集,前者是由一个置换生成的,即现在的循环群,后者分为三类:

第一类是非可迁置换群;

第二类是可迁的非本原群;

第三类是可迁的本原群.

这与现代置换群的概念基本符合.作用在 n 个根$\{x_1,\cdots,x_n\}$的集合上的置换群被称为可迁的(传递的),如果对任意两根 x_α,x_β 至少存在一个置换,把 x_α 变到 x_β;否则,置换群被称为不可迁的.如果不存在非空真子集$\{x_\alpha,x_\beta,\cdots,x_k\}$,使置换群中的每一置换均把该真子集变成其自身或与它不相交的集合,则可迁群被称为本原的,否则被称为非本原的.可迁群中如果存在置换把任意 k 个根变成任意 k 个根,则称该群是 k 重可迁群.这些概念对以后置换群的研究是至关重要的.

鲁菲尼还引进群的阶数的概念,并引用拉格朗日的结果,即一个群的子群的阶一定整除该群的阶.鲁菲尼为了证明五次方程的不可解性,进而决定研究对称群 S_5 的所有子群.但他的研究主要还是考虑有理函数所能取值的数目,它正好是指数 s.他证明,不可能造一个 5 个元的 4 值函数.而柯西在这些工作的基础上,首先在 1812 年证明(1815 年发表),n 个元非对称函数取不同值的数目不小于整除 n 的最大素数 p,除非它是 2.这仍然是以前工作的继续,其后 $f(x_1,\cdots,x_n)$在根置换之下可以取多少种不同的值成为一个独立的研究问题.柯西在 1845 年证明,指数 s 或者是 2 或者至少是 n.在 5 次对称群 S_5 中,的确存在一个 20 阶子群,指数 $s=6$,从而 S_5 与 S_6 中一个指数为 6 的可迁子群 H 同构.但这只是一个例外,1850 年塞雷证明:若 $s>n$,

$n>8$,则

$$s \geqslant 2n.$$

其后其他数学家又证明这定理对 $n=6,7$ 也成立.塞雷还证明:若 $s>2n$,则

$$s \geqslant \frac{1}{2}n(n-1).$$

关于指数的可能值,许多数学家还在继续进行研究.但这方面的研究已不是置换群研究的主流,真正对置换群的结构进行研究并导致抽象群的发展才是大方向.在这方面,真正对置换群理论有明显贡献的是伽罗华,他引进正规子群以及同构、单群、复合群等概念,他的工作在 1846 年由刘维尔编辑发表,而在这之前鲜为人知.但就在伽罗华的工作发表前两三年,柯西发表了二三十篇论文,为置换群奠定了理论基础.他明确地区分开排列(n 个字母的某种顺序)与置换或代换,置换或代换是两个排列的变换.他引进置换的乘积及其方幂的概念,特别是引进单位置换及可逆置换的概念,这样,置换群的基本要素齐备了.柯西的研究使置换独立于方程的研究,成为独立的分支,并且证明其中的一些基本的定理,如素数 p 整除有限置换群的阶,则它含有 p 阶子群.

19 世纪长期研究的群是有限置换群,伽罗华的论文在 1846 年发表之后,吸引了凯雷、戴德金及克洛耐克的注意.但从 1861 年起,以后的 20 年间,若尔当是群论研究的主要数学家.他于 1870 年出版的《置换论及代数方程论》影响了几代数学家,成为群论的"圣经".置换群的许多概念及定理,后来都融入抽象有限群乃至一般抽象群理论当中,其中有同构、映上同态等概念.1873 年若尔当明显地引进商群的观念,他还引进组成列概念并

证明若尔当—荷尔德定理,1889年荷尔德完成了现代的形式.

置换群的算术定理中最重要的是西洛定理,它是柯西定理的深刻推广.西洛在1872年证明,如果p^v整除群G的阶数$|G|$,p^{v+1}不能整除$|G|$,则G中存在p^v阶子群,被称为西洛子群,所有西洛子群相互共轭.伽罗华的手稿中也提到西洛子群的存在,但没有证明.直到19世纪末,有限群论的研究是以置换群的名义进行的.虽然抽象有限群的概念早在1854年就已由凯雷提出,但并未受到重视,因为当时的数学家并不欢迎随意的抽象.凯雷引进有限集合的组成律的概念,它只满足结合律,存在中性元,并且所有置换$x\mapsto ax$及$x\mapsto xa$都是映上同态(由此可推出存在逆元).

对于置换群的结构及分类的研究,一开始还是有方程论的背景的.伽罗华完全定出素数p次不可约的可解方程的伽罗华群.由于方程如果是不可解的,只有当群是可迁群,因此如果p次可迁置换群是可解的,只有当置换可写成

$$k' \equiv ak + b \pmod{p}.$$

1846年发表的伽罗华的论文证明了如果可解群是本原的,则其次数必定为素数幂.伽罗华讨论过p^2次本原群,但是没有完成,他只是写道:"这就是我将要做的."而置换群论以后的工作实际上主要得力于若尔当一个人.

若尔当在他的《置换论及代数方程论》中,概述了置换群论的历史及思想来源,按照他的说法,主要是三个思想启动了这个理论:一是本原性,高斯及阿贝尔已有概述;二是可迁性,属于柯西;三是单群及复合群的区别,它远比前两个重要,是属于伽罗华的.而若尔当这本大著的目的是发展伽罗华的方法并使之形成一个完整的理论,他漂亮地达到了这个目的.若尔当在书中对

p^n 次可解本原群完成了构造及分类.他的方法是递推的,即在所有 $p^m(m<n)$次可解本原群都解决的情况下进行的,而这个问题又可化为线性群的问题.对于非本原可解群,他证明可化为本原的情形加以解决.从 1871 年起,他不断进行可解置换群的研究,直到晚年.

若尔当在 1870 年的巨著中用了很大的篇幅研究伽罗华域(即有限域)上的线性群.他主要是考虑由系数取在 p 个元素的域$GF(p)$上的线性代换 A 所构成的群,其矩阵形式是

$$x' = Ax.$$

在特殊情形下也考虑系数域为 $GF(p^v)$的情形.他主要研究下列内容:

①一般线性群 $GL(n,p)$,是由 n 个变元(mod p)的所有可逆线性变换构成的群;

②特别线性群 $SL(n,p)$,即行列式为 1 的所有线性变换群,以及 $GL(n,p)$, $SL(n,p)$对应的射影群 $PGL(n,p)$, $PSL(n,p)$.

③辛群 $Sp(2n,p)$,若尔当称之为"阿贝尔群"(groupe abélien),它把交错双线性型

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{n+k}-x_{n+k}y_k)$$

变到自身(mod p),它也有对应的射影群 $PSp(2n,p)$.

④史坦纳群,把 $2n$ 个变元的二次型变到自身(mod 2)的仿射变换群.

⑤正交群 $O(n,p,Q)$,把二次型 Q 变到自身(mod p)的群(p 为奇素数).

⑥正交群 $O(2n,2,Q)$,若尔当称之为"亚阿贝尔群"

(groupes hypoabéliens),因为它包含在"阿贝尔群" $Sp(2n,2)$ 之中.

在许多情形中,若尔当证明这些群或其指数为 2 的子群是单群.这些群后来被外尔称为"古典群"(典型群),并与李群联系在一起,从而开辟了线性群这个研究方向.

1901 年美国数学家狄克逊(Leonard Eugene Dickson,1874—1954)把若尔当的结果推广到任意伽罗华域 $GF(q)$ 中,其后还有大规模的推广,但远远超出有限置换群理论的范围.

若尔当还正式开始系统地研究纯属置换群理论的问题:可迁群及 k 重可迁群.与伽罗华理论有密切联系的是由 n 个文字(根)的所有置换构成的 n 次对称群及其中指数为 2 的子群——交错群 A_n. S_n 是 n 重可迁的,A_n 是 $n-2$ 重可迁的,且除 $n=4$ 外,伽罗华已证明 A_n 是单群,余下的问题是除了 A_n 及 S_n 之外,有没有较大的 k 重可迁群. 1861 年及 1873 年法国数学家马蒂厄(Emile Léonard Mathieu,1835—1890)构造了 5 个特殊的单群 M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24},其中下标是它们的次数.他发现 M_{12}, M_{24} 是 5 重可迁的(当然也是 4 重可迁的),M_{11}, M_{23} 是 4 重可迁的.长期以来,数学家们希望能构造 6 重及 6 重以上的可迁群,但没有成功,同时也不知道其他的 4 重及 5 重可迁群. 1981 年有限单群分类完成之后,才肯定除 S_n 及 A_n 之外,不存在其他 6 重及 6 重以上的可迁群,而且 5 重可迁群只有 2 个,4 重可迁群只有 4 个,同时定出所有 2 重可迁群,从而完全解决了这个问题.

置换群论的另一个基本问题是定出次数为 d 的所有置换群、可迁群及本原群.至今为止,只对于较小的 d 取得了完整的结果.

19世纪有关置换群的工作由内托(Eugen Netto,1848—1919)概括在他的著作《置换理论及其在代数中的应用》(*Substitutionen theorie und ihre Anwendung auf die Algebra*)(1882)之中.这时群的研究已不限于置换群,而逐步向抽象群理论过渡.但是,这种过渡并非一蹴而就,而是经历了相当长的时期,其中包括几个关键步骤:

(1)抽象地及公理地定义群,把群从置换群中解放出来,其中特别是克洛耐克定义阿贝尔群(1870),韦伯定义有限群(1882)及无限群(1893),这些都是用公理定义的.另外,若尔当在1867年引进运动群,*S*·李在1874年引进变换群,凯雷等也有抽象群的观念.

(2)研究一般群的结构.

(3)研究抽象群与具体群的关系.1878年凯雷最早引入置换表示,从而证明每个有限群都可以表为置换群,对有限群的线性表示是弗罗宾尼乌斯在1895年引进的.

5 代数方程组论

近世代数学对于代数方程及线性方程组进行了充分的研究,得出了比较完整的理论.但是,有关两个或两个以上联立代数方程(即代数方程组)的研究并不简单.从历史上看,有关研究都是从简单的情形开始逐步进行的.代数方程组可用三个指标来区别:变元(未知量)数目、方程数目和方程的次数;它们还有齐次、非齐次的差异.涉及这部门的领域不少,如线性代数学(只讨论线性方程组)、消去法、不变式论及代数几何学等.

最早研究线性方程组的是莱布尼茨.1693年,他处理两个

未知量、三个方程时，得到一个行列式，他称之为结式，结式是消去法理论的中心. 对于非线性方程组，是牛顿最先研究的. 在他的《普遍算术》(1707)中给出将一个未知数、次数同为二次到四次的两个方程消去 x 的办法，即得出公共解的条件. 其后，欧拉在《无穷分析引论》(1748)第Ⅱ卷第 19 章“曲线的交截”中给出两个二次方程、两个三次方程和一个二次、一个三次联立方程组的消元法. 1764 年欧拉在《消去方程组中未知量的新方法》一文中，以明显的结式为基础来阐述这种方法. 欧拉及克莱洛都注意到 m 次方程 $f=0$ 及 n 次方程 $g=0$ 有公共解的条件是它们的根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 及 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的差之积

$$(\alpha_1-\beta_1)\cdots(\alpha_1-\beta_n)\cdots(\alpha_m-\beta_1)\cdots(\alpha_m-\beta_n)$$

为 0，它们可以用两个方程的系数表示出来. 贝祖在他的《数学教程》(1764—1769)中考虑乘除消去法，他考虑两个 n 次方程:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0,$$

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0=0.$$

第一步，f 乘上 b_n，g 乘上 a_n，相减得一个 $n-1$ 次方程；第二步，f 乘上 b_nx+b_{n-1}，g 乘上 a_nx+a_{n-1}，然后相减，得出第二个 $n-1$ 次方程，…，最后第 n 步，得出第 n 个 $n-1$ 次方程. 这 n 个方程的 n 个系数组成的行列式就是 $f=0$ 及 $g=0$ 的结式. 对于两个次数不同的方程，贝祖也给出一个求结式的方法. 对于两个未知数、两个方程的联立方程组 $f(x,y)=0$ 及 $g(x,y)=0$，贝祖在 1764 年出版的《代数方程的一般理论》(*Théorie générale des équations algébriques*)中，给出了消去一个未知量的方法. 解决这个问题有着重要的几何意义，即定出与它们相应的平面代数曲线的交点数目. 贝祖消去 g，得出方程 $r(x)=0$，也称之为结式. 它的次数等于 mn，正好等于两条曲线的交点数目. 对于这个几

何的结果,人们早就知道,但是严格的证明直到 19 世纪才得到.贝祖的消元法后来也由雅可比(1836)及闵定(1841)独立得出.1827 年柯西也独立得出自己的方法.

1842 年西尔维斯特改进了将一个 n 次方程和一个 m 次方程消去 x 的方法,他称之为透析法(Dialytic method).他得出两个一元方程有公共解的充分必要条件,确切地写出

$$f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 = 0$$

与

$$g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$$

的结式为

$$R_{fg} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & & \\ & & a_m & \cdots & \cdots & a_0 & & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & a_m & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & & & \\ & & b_n & \cdots & \cdots & b_0 & & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & & b_n & \cdots & \cdots & b_0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n\text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m\text{ 行} \end{matrix}$$

他在 1852 年的论文中对当时已知的消去法给出总结,并同不变式论联系起来.19 世纪末,消去理论沿着不同的道路发展.一是 1840—1890 年不变式论的发展;二是从 1870 年起关于代数曲线的研究;三是 1930 年以后从抽象代数角度的研究;最后一条道路是由戴德金的理想理论经过希尔伯特的基定理及零点定理而

发展起来的.

希尔伯特的基定理和零点定理开始都是作为不变式论的定理而提出的,基的有限性定理是 1890 年证明的.基定理可表述为:多项式理想 I 中存在有限基$(f_1,\cdots,f_n)$,使得 I 中任何多项式可以表示为

$$f=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i,$$

其中 c_i 均为多项式,它们不一定在 I 中.零点定理可表述为:如果多项式 $g(x_1,\cdots,x_n)$在 $f_i(x_1,\cdots,x_n)(1\leqslant i\leqslant h)$的所有公共零点上均为 0,则存在 s 使

$$g^s=\sum_{i=1}^{h}c_i f_i,$$

其中 $c_i(x_1,\cdots,x_n)$也是多项式.这些定理同消去法密切相关,后经腊斯克(Emanuel Lasker,1868—1941)、麦考莱(Francis Sowerby Macaulay,1862—1937)等人的工作,到 E·诺特 1922 年的论文(多项式理想与结式理论)而成为抽象代数的一部分.

克洛耐克在 1882 年的大论文《代数量的算术理论纲要》中,用除子的方法讨论一般 n 个未知量 m 个方程的消去法理论,得出域的概念.这种方法为法国数学家莫尔克(Conrad Frédéric Jules Molk,1857—1914)所发展,莫尔克在 1885 年的论文中总结了一般消去法理论.

在 20 世纪抽象化的浪潮中,代数方程组理论主要以代数几何学的形式发展,并取得巨大成就.对于古典算法的研究,在 20 世纪 70 年代也取得重大突破.吴文俊继承中国古算的传统,得出了多项式方程组的完整解法,并有着大量的实际应用.

第12章 数　论

随着1801年高斯的《算术研究》的问世，近代数论已由过去的零散问题和结果逐步形成一个系统的理论.由于分析方法的引进，进而形成解析数论这一分支.1831年由高次互反律以及二元二次型理论产生出数学中最漂亮的分支——代数数论(参看第14章第1节).

1　高　斯

高斯，1777年4月30日出生在德国布隆什维克一个贫穷的工人家庭中.但是高斯显然是个天才，3岁时，他已经能纠正他父亲的计算错误，他自己曾说他学说话以前就会计数了.8岁时，他就能准确而快速地算出 $1+2+3+\cdots+100$ 的和，而其他孩子费好大力气把一个数一个数加起来，还加错了.11岁时，高斯与酷爱数学的年轻教师巴特尔斯(Johann Martin Christian Bartels, 1769—1836)一起学习，表现出非凡的数学天才.14岁时，当地的布隆什维克公爵(Carl Wilhelm Ferdinand, 1735—1806)得知自己领地上的高斯有非凡的才能，召见了他并资助他上学.次年，高斯入布隆什维克的卡罗琳学院求学，攻读牛顿、欧拉、拉格朗日等人的著作.1795年10月，高斯离开卡罗琳学院，就读于格

廷根大学.此时他面临一次痛苦的抉择,是继续研究数学呢,还是研究古代语言?因为他这两门功课的成绩同样优异,而且他同样感兴趣.1796年3月30日,高斯用尺规作出了正十七边形,终于使他下定决心献身于数学.这时他开始写日记,记下他的许多发现.18年中,他一共写了146条,由于他作风严谨,有些很晚才发表.这本日记直到1898年才被发现,1901年由克莱因编订出版.在大学期间,他阅读了费尔马、欧拉、拉格朗日、勒让德等的著作,得出一系列的结果,如重新发现并证明二次互反律,得出分圆域的概念以及二次型的许多算术结果.这时他决定写《算术研究》.除了数论的诸多结果外,他还由算术几何均值得到椭圆函数的原始概念.高斯于1798年秋离开格廷根大学回到家乡,这时他写了关于代数学基本定理的第一个证明.1799年底他到海尔姆斯台德大学,以普法夫为名义上的导师,用这篇论文取得博士学位.他利用大学的图书馆进行阅读和写作,到1800年复活节时返回布隆什维克,并完成《算术研究》.不过,这部著作远远超过当时数学家的水平,并没有为学术界所理解.高斯在19世纪初的名声主要来源于他在天文学方面的工作,特别是有关小行星轨道的确定,这使他最终就任格廷根天文台台长.

当时天文学家的一项主要工作是观测行星并研究其运行规律.1776年提丢斯(Johann Daniel Titius,1729—1796)发现了太阳和行星间的距离有着某种规律性:写出数列0,3,6,12,24,48,96,192,…每一项是前面一项的2倍,然后把每一项加上4,就得到数列4,7,10,16,28,52,100,196,…这些数字除了28以外,非常接近太阳到水星、金星、地球、火星、木星、土星的距离的比.这个规律叫做波德(Johann Elert Bode,1747—1826)定律(因为波德偷了提丢斯的成果).1781年英国天文学家威廉·赫舍尔

(William Herschel,1738—1822)在相当于196的位置上发现了天王星,这就更加使人相信在28的位置上一定还有未发现的行星.于是天文学家的注意力都集中在28这个位置上.正好在1800年除夕的夜晚,意大利巴勒摩的天文学家皮雅齐(Giuseppe Piazzi,1746—1826)发现在28这个位置上有一颗新星,后来命名为谷神星.现在知道它是以后发现的几千颗小行星中的头一名,可是当时还拿不准它是行星还是彗星.要想肯定它是行星,还得继续对它进行观察,可是到哪儿去找它呢?即使再看到它几次,至于下一次它在何时何地出现仍然不知道,因此必须算出它的轨道来.牛顿曾说过,根据少量的观测数据计算轨道是非常困难的事.于是高斯发挥他的数学天才,创造了只需要3次观察就可以用来计算星体运动椭圆轨道的方法,它可以极准确地预测行星的位置,天文学家根据他的数据马上又找到了谷神星.他的方法至今还在使用,而且可以编成程序上计算机运算.

他30岁时成为新建的格廷根天文台台长,当时新天文台刚有地基,他花了大量的时间和精力装配观测仪器,后来一直不断地进行实际天文观测,做了大量的计算及报告.他经常工作到晚上一两点钟才休息.这些"杂务"占了他许多时间,可是他认为这些实际工作是真正为人类做贡献,并没有因为自己是理论上的天才而觉得是个负担.

18世纪末19世纪初,频繁的战争和欧洲经济发展的需要要求绘制精确的地图.因此欧洲各国便开始进行本国的国土测量及地图绘制工作.1820年起,高斯虽然已过了40岁,但还用了许多年亲自搞野外测量工作.他从事大量的劳动,夏天到野外进行测量,冬天进行数据处理.当时的工作条件十分糟糕,交通不便,天气恶劣,居住条件不好,当地官吏不合作,事故很多,政府

资助又少,助手没几个,许多事情都得亲自动手.他就是在这种情况下干了8年,而且在理论上及实际上都有发明创造,后来他在物理学上也做了许多工作,还发明了最早的电报.这些都说明他不仅能动脑,还能动手,既能搞实际工作,又能把实际结果提高到理论的高度.1827年他发表的《曲面的一般理论研究》就是通过大量的观测和计算总结出来的理论.在书中他证明:曲面的高斯曲率只与弧长要素有关.这是微分几何学中的基本定理,他称之为"伟大定理".

高斯在50岁以后,兴趣又集中在物理学上面.他对于力学、毛细现象、声学、光学以及结晶学都做出了一些重要贡献,其中最主要的是他关于地磁的研究.1828年亚历山大·冯·洪堡邀请他到柏林,他在那里结识了年轻的物理学家W·韦伯(Wilhelm Eduard Weber,1804—1891),1831年W·韦伯到格廷根任物理学教授,他们两人密切合作,进行地磁的观测.高斯和W·韦伯合作发明了磁强计,而且还通过组织欧洲地磁观测网来测量各地地磁场的变化.高斯通过理论分析证明,地磁是在地球内部产生的,他把他的理论写成一本书《地磁的一般理论》,在1839年发表.1840年他和W·韦伯总结了他们的观测结果,画出世界上第一张地球磁场图,而且定出了地球磁南极和磁北极的位置.现在用"高斯"作磁场强度的单位,用"韦伯"作磁通量的单位,就是为了纪念他们的工作.

1833年高斯还发明了最原始的电报,实际上是一条连接天文台和韦伯实验室的8 000英尺导线,线的两端都有电磁铁,电流通过后推动小针敲铃,但当时还没有普遍推广,原来一条铁路想采用,最后因为太贵而最终放弃了,但是他们的确是把电流用于通讯的先驱者.

长期以来,高斯的主要精力花在自然科学上,但对数学也不断进行许多研究.他的数学成果既深且广,许多结果超过当时的学术水平.但是他追求完美,又不愿因不被理解而引起争议,所以他生前所发表的著作并不多,以致有许多结果在他发现后几年、十几年甚至几十年,让别人优先发表.如高斯1794年发现最小二乘法(1809年发表),1799年发现非欧几何学(他首先在1813年、1816年的信中谈到),1811年得到复变函数论的柯西定理,1812年发表关于超几何级数的定理.另外,他还发现了椭圆函数理论.他的数论通过狄利克雷及爱森斯坦而得到长足的发展,他的曲面理论则通过黎曼得到发展.高斯不喜欢教学,出色的学生也不多,只有黎曼、戴德金等几人,其中戴德金为编辑高斯的著作做出了重要贡献.

高斯于1855年2月23日在格廷根去世.高斯的著作收集在他的12卷《全集》(*Werke*)(1870—1927)之中.

2 《算术研究》

近代数论经历了17—18世纪的发展已经初具规模,但主要是零散的结果,在高斯的《算术研究》一书问世之后,数论才发展成一门系统的学科,并由此分化出现代数论的几大分支——型论、代数数论及解析数论.

《算术研究》在1801年出版,共分七个部分,他用的是"节",其中讨论了三大类问题.前四部分是同余理论,它把以前零散的整除性问题系统化了.第一节只有5页,定义模 m 同余,证明其初等性质.第二节证明整数素因子分解惟一性定理,求解同余方程

$$ax + b \equiv c(\mathrm{mod}\, m),$$

还研究欧拉函数 $\varphi(m)$. 第三节研究模素数的幂剩余,其基础是费尔马小定理. 他引进原根及指数的概念,并指出如何用它们来计算. 这三节构成初等数论的基本内容,实质上到今天也没有多少变动. 第四节是这部分的重点,集中证明二次互反律. 第五节和第六节是二次型理论,占了全书的大部分篇幅. 第七节实际上属于代数学,讲的是分圆方程及正多边形的作图理论. 在《算术研究》出版之后,高斯还继续研究数论,主要是高斯和、高斯复数、三次互反律、四次互反律以及素数定理等,这些都大大推动了后来数论的发展.

2.1 同余理论

同余理论也被称为模算术,是高斯把以前的整除性理论系统化的结果,由此发展出一系列新的数论问题. 同余的定义如下:两个整数 a 和 b 的差如果可被非零整数 m 整除,则称 a,b 对模 m 同余,记作

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m).$$

如果 $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$,则 $a = b + km$, k 为某个整数. 如果 a,b 对模 m 同余,则它们除以 m 的余数相等. 同余关系在所有整数之中建立了一个等价关系,按照模 m 的余数,可以把全部整数划分为 m 个等价类(剩余类),每类中任意两个整数均彼此对模 m 同余. 对于同模 m,同余式可以相加、相减、相乘. 高斯进一步研究同余方程的解,证明了拉格朗日在 1768 年建立的多项式同余式基本定理:

如果 p 是素数,则 n 次同余式

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Mx + N \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

的解数$\leqslant n$,这里 p 不能整除 A.线性同余式的解的问题实际上就是欧几里得辗转相除法.但高斯在书中提到,也可用连分数方法来求解.而二次及高次同余式问题从 18 世纪末起一直是数论研究的中心,受到高斯及其后数学家的极大关注.其结果就是 19 世纪的核心课题——二次互反律及高次互反律.

在研究 x^2+ay^2 型的整数的素因子时,导致二次互反律这个数论中最重要的定理.二次剩余又被称为平方剩余,是由欧拉在 1754 年引进的:如果存在一个整数 x,使得 x^2-p 能被 q 整除,就说 p 是 q 的二次剩余;如果这种 x 不存在,就说 p 是 q 的二次非剩余.关于二次剩余的性质及定理,用勒让德在 1808 年引进的记号是很方便的,这个记号$\left(\frac{p}{q}\right)$被称为勒让德记号,它的定义是

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\begin{cases}1, & \text{当 } p \text{ 是 } q \text{ 的二次剩余;}\\ -1, & \text{当 } p \text{ 是 } q \text{ 的二次非剩余.}\end{cases}$$

欧拉在 1783 年的一篇论文中,给出关于二次剩余的五条定理,其中包括二次互反律及两个补律:

①二次互反律:如果 $p>2,q>2$ 为素数,且 $p\neq q$,,则

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}.$$

②补律 1:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=\begin{cases}1, & \text{如 } p\equiv 1(\bmod 4);\\ -1, & \text{如 } p\equiv 3(\bmod 4).\end{cases}$$

③补律 2:

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{1}{8}(p^2-1)}=\begin{cases}1, & \text{如 } p\equiv 1,7(\bmod 8);\\ -1, & \text{如 } p\equiv 3,5(\bmod 8).\end{cases}$$

后来有人发现在欧拉 1751 年发表的论文中已出现类似的叙述,

不过在1783年的这篇论文中,欧拉只提到他是从1772年开始研究的.他通过计算给出的“证明”是不完备的,但是得出一系列特殊情形.1785年勒让德声称他独立发现了二次互反律,并给出一个不完全的证明.1798年勒让德出版他的《数论》第一版,其中给出一个证明,这个证明用到某一算术级数中存在无穷多素数这个尚未证实的假定.这个假定刺激了19世纪数学家研究这个问题的兴趣,直到1837年才由狄利克雷给出严格的证明.而二次互反律的第一个严格证明则是由高斯给出的.

对于二次互反律,高斯一共给出过8个证明,实际上用了6种不同的方法.高斯在1796年4月已经发现了二次互反律的第一个证明,证明很长而且复杂,但完全是初等方法.在《算术研究》第五节中给出的第二个证明,是在1796年6月得出的,用的是二次型理论.第四个证明用到所谓高斯和

$$S(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k^2/n}.$$

求高斯和的值曾使他伤透脑筋,经过几年的努力,他才得出

$$S(n)=\begin{cases}\sqrt{n}, & \text{如 } n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4);\\ \mathrm{i}\sqrt{n}, & \text{如 } n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4).\end{cases}$$

他生前共发表过6个证明(1808—1818).在他的遗稿中还有2个证明.这2个证明都来源于他所说的黄金定理(theorema aureum),它们不像以前被认为是二次互反律本身,而是对任何素数 p,如果 $p-1=ef$,则存在方程使得其根是 p 次单位根的 e 周期,每周期含 f 项.其后,许多数学家都曾给这个定理以新的证明,至今已有160多种.

高斯进一步研究高次互反律,即同余式

$$x^n\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$$

的解问题.1831年他建立四次互反律,为此他引进了复整数(后称之为高斯整数)$a+b\sqrt{-1}$(其中a,b为整数).他建立了高斯整数的惟一分解定理.从某种意义上讲,这是代数数论的真正开端.高斯原计划在第三篇论文中发表证明,但该论文始终没有发表,而且在他的遗稿中也没有找到.因此,定理的证明首先是由雅可比在1836—1837年的讲课中给出的,随后年轻的德国数学家爱森斯坦给出5个证明(1844—1847).高斯还研究过三次互反律,并引进三次单位根$\rho(\rho=e^{2\pi i/3})$,建立$a+b\rho$的算术.雅可比在1827年首先提出三次互反律,并在1836年的讲课中给出证明.1844年爱森斯坦首先发表自己的证明,这导致雅可比和爱森斯坦在优先权问题上的争议.他们也先后研究了高次互反律.同时,库默尔对高次互反律的研究导致他得出理想素数(而非如通常认为主要是由于费尔马大定理).一般的互反律经许多大数学家如克洛耐克(1891)、H·韦伯、希尔伯特等的研究,至1927年为阿廷所彻底解决.

2.2 二次型理论

二次型是二次齐次多项式,数论中研究整数系数的二次型,变元数目如果为2,则称之为二元二次型,即$Ax^2+Bxy+Cy^2$.数论中二次型的研究来源有两个:一是不定方程,如配尔方程$x^2-Dy^2=1$的求解问题;二是整数可表性问题,即某一整数或一类整数是否可以表为某种类型的二次型,这最早可追溯到一个整数是否可表为平方和的问题,这个问题很早已有不少研究,从丢番图、巴歇、韦达到费尔马、欧拉均得出许多特殊的结果.但是,近代二次型理论的奠基者应该说是拉格朗日,他不仅在1770年证明了每一整数可表为四个平方和,而且紧接着研究整

数被二元二次型表示的问题,并于1773年到1777年发表其研究结果.拉格朗日得到下面一些结果:

①如果一个整数 m 能被一个二元二次型 $f(x,y)$ 表示,则也可被许多其他的二元二次型 $F(x,y)$ 所表示,他称这些二次型为“可以互相变换的”,实际上即后来高斯所说的“等价的”二次型.

② $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 之间存在关系

$$F(x,y)=f(\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y),$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是整数,且 $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$.

③等价的二次型具有相同的判别式.定义 $ax^2+bxy+cy^2$ 的判别式为 b^2-4ac,记作 D.

④可以按照等价关系把二次型划分为等价类.

⑤每类中的二次型 (A,B,C) 都可以通过逐步变元代换

$$\begin{cases}(x,y)\longrightarrow(x-ry,y)\\(x,y)\longrightarrow(x,y-sx)\end{cases}$$

变成约化型,即满足 $|B|\leqslant|A|$,且 $|B|\leqslant C$.

⑥按二次型 $f(x,y)$ 的 $D<0$ 及 $D>0$,把型分为定型及不定型,其算术性质很不同,例如当 $D<0,A>0$ 时,均存在惟一一类,使 $0\leqslant B\leqslant A\leqslant C$.这方面勒让德作了改进.

比起拉格朗日的结果,高斯的结果更为接近“现代”的标准,但还存在一些差别:

①高斯研究的二次型为

$$F(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2,$$

因此判别式 $D=B^2-AC$.

②拉格朗日在对二次型进行分类时也考虑变换 $\alpha\delta-\beta\gamma=S$ 的情形.高斯只考虑 $S=\pm 1$ 的情形,并区别 $+1$ 及 -1 的情形,

前者被称为真等价类,后者被称为非真等价类.

在拉格朗日工作的基础上,高斯大大发展了二次型的工作,这成为后来代数数论及二次型理论的出发点.

①每一等价类可以选最简单的二次型约化型为其代表,对于正定二次型,约化型满足

$$2|B|\leqslant|A|\leqslant|C|.$$

②虽然等价的二元二次型判别式相等,但其逆定理不成立.高斯证明,同一判别式 D 的二元二次型只有有限多个等价类,等价类的数目被称为类数,记作 $h(D)$,每一类还可进而分成许多种.

③任意两个二元二次型 f,f',可以定义乘法 ff',如果 f 等价于 g,f' 等价于 g',则 ff' 等价于 gg',即乘法可以扩充为类的运算.

④高斯还求出不定方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=N$ 的所有解.

高斯在得出二元二次型的完整理论后,进而研究三元二次型,得出一些类似的结果,特别对历史上著名的三元二次不定方程

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

给出具有非零解的充分必要条件,建立相当于后来的闵可夫斯基(Hermann Minkowski,1864—1909)—哈塞(Helmut Hasse,1898—1979)局部整体原理的原始形式.1830 年吉伯尔(Ludwig August Seeber,1793—1855)写了一本关于三元二次型的书,高斯在该书的书评中发表了型的几何表示,这是后来闵可夫斯基的几何表示的先声.

高斯的二次型理论开辟了数论的两大领域.一是狄利克雷发展的二元二次型理论,给出类数公式、单元型概念,并且同二

次域进行类比,得出单元公式,从而开辟了代数数论这个新方向.二是除了二次域之外,三次域、四次域乃至一般代数数域与二次型没有关系,同时多元二次型与代数数论也没有关系.这样,多元二次型理论发展成二次型理论乃至更一般的型论.在19世纪末经闵可夫斯基的努力,型论成为一门重要的数论分支.

高斯之后,数论沿着他所开辟的方向迅猛发展.英国数学家斯密司在1859—1865年发表一个300页的综合报告《数论报告》,简化并改进了前人的许多结果,并加进自己的许多成果.其中特别应该提到的是关于平方和表法数 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=n$ 的整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 数目 $r_k(n)$ 的公式.

拉格朗日早在1770年证明了著名的四平方和定理,但是并没有指出一个正整数可用多少种方式表为四个平方和,而这是雅可比通过对椭圆函数的研究得到的.雅可比还给出两个平方和以及六个平方和的表法数.爱森斯坦给出了三个平方和的表法数.斯密司进而研究五个平方和以及七个平方和的表法数,他在1864年把他的结果写成一个摘要,1868年给出更一般的公式,但是没有证明.1881年,法国科学院在不知道他的工作的情况下,提出了数学大奖的竞赛题目:表一整数为五个平方和的表法数.1882年,斯密司给出一般定理的详细证明.1883年,在斯密司去世后,法国科学院把这项大奖授予斯密司和闵可夫斯基两人.

在19世纪,二次型的算术理论还在其他方面有很大发展,其中特别是 n 元整系数二次型的约化理论,即约化成等价的典范形式,正定二元二次型由拉格朗日及高斯成功地化成约化型

$$0\leqslant 2|B|\leqslant A\leqslant C.$$

正定三元二次型的约化由德国数学家泽林(Eduard Selling,1834—1920)在1874年解决,四元二次型的约化由夏尔复(Léon Charve,1849—?)在1881年完全解决,而一般二次型的约化问题首先由埃尔米特在1850年正式提出,他还设计了一些算法.1885年闵可夫斯基在自己的博士论文中完全解决了正定型的约化问题,他还由此得出几何方法的思想,并从1891年起在一系列论文中只手创立"数的几何"这一分支.1896年他的《数的几何》(*Geometrie der Zahlen*)出版,给这个分支以系统的论述.

3 解析数论

解析数论是应用数学分析方法来研究数论问题的分支,从这个意义上来讲,它类似于微分几何及分析(解析)力学,却与解析几何中的"解析"意义大不一样.与解析数论相对的应该是综合数论,虽然后者见诸某些著作,但并未形成一门公认的学科.另外,解析数论也不能与代数数论区别得很清楚,因为代数数论中许多问题的解决,特别是类数的计算,仍需仰赖解析方法,不过通常解析数论大都处理整数的问题.

从费尔马到高斯,数论取得了巨大的进步.但是,解决问题所用的方法大都是初等的代数方法.这种初等方法对于数论中的许多问题几乎完全无能为力,例如华林问题及哥德巴赫问题.另外一些猜想,例如等差级数是否存在无穷多素数,也不是初等方法所能解决的.为了解决这些问题,不得不求助于更有力的解析工具——数学分析,例如微积分、无穷级数、复分析乃至函数论,从而形成解析数论这一分支.第一个用解析方法解决数论大问题的是狄利克雷,他在1837年用所谓狄利克雷级数 $L(s,\chi)$

证明一般等差级数中的素数有无穷多.因此,从历史上来讲,解析数论的创始人是狄利克雷,时间是1837年,大大晚于其他应用分析方法的学科.

正如其他学科一样,解析数论也有一段前史,它至少可追溯到分析大师欧拉.欧拉大胆使用无穷分析方法,特别是对无穷级数及无穷乘积引进ζ函数以及分拆函数$p(n)$,并研究其性质,他应该是解析数论的先驱.狄利克雷以后,切贝舍夫向素数定理迈进了一大步.1859年黎曼把欧拉ζ函数复化,提出黎曼ζ函数,进行系统研究,给解析数论提供了有力的工具.几乎数论的每一步进展都同ζ函数和$L(s,\chi)$有关,特别是1896年阿达马和瓦莱-布桑分别独立证明素数定理.20世纪初,经过德国数学家朗道(Edmund Landau,1877—1938)、英国数学家哈代(Godfrey Harold Hardy,1877—1947)和李特尔伍德(John Edensor Littlewood,1885—1977)的开创性工作,解析数论成为一门专门的技术,数论的背景已经淡化了.因此魏伊讲,它是数学分析的一个分支而非数论的分支.更广义地说,雅可比用椭圆函数研究平方和的表法数,希尔伯特用多重积分解决华林问题等也属于解析数论,不过19世纪解析数论的主流主要是素数定理及ζ函数,它们由于黎曼的工作而联系在一起.

3.1　素数定理

(1)素数的数目.

欧几里得已经证明,素数有无穷多.其后有不少新证明,其中欧拉及库默尔的证明均极为简单而巧妙.

(2)素数表.

近代许多数学家花费大量的时间和精力来计算整数的因

子，特别还列出素数表来．布兰科尔（Thomas Brancker）在 1668 年列出100 000以下整数的最小因子，克鲁格（Johann Gottlob Krüger）在 1746 年列出 10^5 以下的素数，维加（Georg Freiherrvon Vega，1756—1802）在 1797 年列出素数到400 031，切尔那克（Ladislaus Chernac，1740—1816）在 1811 年列出 10^6 以下整数的素因子，布尔克哈特（Johann Karl Burckhardt，1773—1825）在 1816—1817 年扩充到 3×10^6．1856 年克莱尔呈递给柏林科学院的素数表一直到6 000 000，1861 年达塞（Zacharias Dase，1824—1861）扩张到 9 000 000，而库利克在他 1863 年去世时已花了 20 多年时间把这个纪录推到100 330 200，他的 8 大卷手稿（共4 212页）于 1867 年 2 月存放到维也纳科学院，不过后来发现其中有丢失也有些错误．1909 年雷默尔（Derrick Norman Lehmer，1867—1938）出版因子表，1914 年出版10 000 000以下的素数表，这张表得到广泛流传及使用．

计算机出现之后，用计算机搜寻素数的工作一直在进行．1959 年达到 104 395 289，刚超过 100 年前手算的结果，不过这次是准确的．1976 年计算到 1.2×10^{12}，1985 年达到 4×10^{16}，求得 $\pi(4\times10^6)=1\,075\,292\,778\,753\,150$，1994 年达到 10^{17}．下面把 10^{17} 以下素数的个数列举如下（其中 $\pi(x)$ 表示 x 以下素数的数目）．

$$\pi(10)=4,$$
$$\pi(10^2)=25,$$
$$\pi(10^3)=168,$$
$$\pi(10^4)=1\,229,$$
$$\pi(10^5)=9\,592,$$
$$\pi(10^6)=78\,498,$$

$\pi(10^7) = 664\,579,$

$\pi(10^8) = 5\,761\,455,$

$\pi(10^9) = 50\,847\,534,$

$\pi(10^{10}) = 455\,052\,512,$

$\pi(10^{11}) = 4\,118\,054\,813,$

$\pi(10^{12}) = 37\,607\,912\,018,$

$\pi(10^{13}) = 346\,065\,536\,839,$

$\pi(10^{14}) = 3\,204\,941\,750\,802,$

$\pi(10^{15}) = 29\,844\,570\,422\,669,$

$\pi(10^{16}) = 279\,238\,341\,033\,925,$

$\pi(10^{17}) = 2\,623\,557\,157\,654\,233,$

到20世纪末,已得到 $\pi(10^{20}) = 2\,220\,819\,602\,560\,918\,840$.

(3)素数计数函数 $\pi(x)$的估计.

18世纪末,勒让德和高斯根据各自的计算以及当时的素数表,估计不大于某实数 x 的素数的数目即 $\pi(x)$的大小.勒让德在1798年提出猜想

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - A(x)},$$

其中 $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = 1.083\,66\cdots$,但这个猜想在1850年为俄国数学家切贝舍夫所否定.更正确的猜想属于高斯,据他讲,他在15岁时已猜想 $\pi(x)$与 x 的对数积分 $\mathrm{Li}(x)$渐近相等,记作

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t},$$

或者说

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1.$$

由于 $\mathrm{Li}(x)\sim\frac{x}{\log x}$,所以 $\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$,这通常被称为素数定理.注意,这里的 log 是以 e 为底的自然对数,也常写作 ln.素数定理被认为是解析数论中最重要的定理,由它出发发展了解析数论的一系列重要工具和问题.对素数定理的第一个突破是俄国数学家切贝舍夫所取得的,他在 1850 年证明

$$c'\frac{x}{\log x}<\pi(x)<c\frac{x}{\log x},$$

其中常数 c,c' 是接近 1 的常数,$0<c'<1<c$. 1892 年,西尔维斯特改进为:当 x 充分大时,

$$0.956\,95\frac{x}{\log x}<\pi(x)<1.044\,23\frac{x}{\log x}.$$

但是真正证明素数定理的是法国数学家阿达马和比利时数学家瓦莱－布桑,他们在 1896 年分别独立得出,用的都是黎曼引进的函数 $\zeta(x)$.其后,素数定理又有许多证明,用的都是分析工具.令人惊叹的初等证明直到 1949 年才由挪威数学家塞尔伯格(Atle Selberg, 1917—)以及匈牙利数学家埃多什(Paul Erdös, 1913—1996)各自独立得到.

(4)素数的分布.

素数定理特别是黎曼猜想是解析数论中的主要课题,除此之外,还有一系列有关素数分布的主要问题,其中最重要的是关于等差级数中的素数.欧拉临终前曾猜想,等差级数 $a+nd$(其中 a,d 互素,$d\geqslant 2$,a 是任意正整数)中也含有无穷多个素数,显然这里面包含无穷多种情形,证明要困难得多. 1788 年勒让德也提出同样的猜想,并在他的《数论》第二版(1808)中给出一个证明,但证明有错误.直到 1837 年狄利克雷才给出第一个证明,他用到分析工具,特别是所谓狄利克雷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}.$$

狄利克雷级数在数论中最常用的被称为 L 级数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

有两点值得注意,一是黎曼 ζ 函数是其特殊情形,二是其中隐含着群的特征标观念.这个定理被证明以后,历代的数学家又进而证明等差级数中的素数定理,并提出解析数论中一个重要的未解决问题:每个等差级数中的最小素数为何? 更进一步还可把这个问题推广到特殊序列中的素数,例如:

①是否存在无穷多形如 k^2+1 的素数?

②是否存在无穷多形如 2^n-1 的素数(马桑素数)?

③是否存在无穷多形如 $2^{2^n}+1$ 的素数(费尔马素数)?

④是否存在无穷多菲波那奇素数?

这些问题都极为困难,离解决尚远.

3.2 黎曼 ζ 函数

从素数定理的历史即可看出,解析数论中头等重要的工具是黎曼 ζ 函数,它是由黎曼在 1859 年首先提出的,即

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

当 $s=1$ 时,即调和级数,$\zeta(s)$发散;当 s 为大于 1 的整数时,欧拉证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}=\prod_{p} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

其中 p 通过每一素数.这个公式已经显示 $\zeta(s)$与素数之间的关

系.欧拉在 1737 年利用这个表示证明素数有无穷多,即$\sum_{p}\frac{1}{p}=\infty$.此外,欧拉还证明

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

并求出 $\zeta(2k)$的值

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!},$$

其中 B_{2k}是伯努利数. 1749 年,欧拉还得出 $\zeta(s)$,$\zeta(1-s)$与 $\Gamma(s)$满足函数方程

$$\zeta(1-s)=\frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s),$$

并且对实变量加以验证.这篇论文在 1761 年发表(1768 年出版).但直到黎曼把它推广到复变量之后,它才真正成为解析数论的有效工具.

黎曼是现代意义下解析数论的奠基者,他生前只是在 1859 年发表过一篇论文《论给定量以内的素数数目》(*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*).在黎曼之前,高斯早已对 x 以内的素数数目 $\pi(x)$猜想有渐近公式

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x},$$

但高斯并没有证明素数定理,甚至连提也没有提到它.他的目标是具体求出 $\pi(x)$,或者更确切地说,是得出与 $\pi(x)$密切相关的函数 $\zeta(s)$的无穷级数的明显表示.黎曼第一个指出要解决这个问题,首先要研究作为复变量 $s=\sigma+\mathrm{i}t$ 的 ζ 函数,特别是它的零点分布.欧拉在证明素数无穷多时已经得出过实变量的 ζ 函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_{p}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right),$$

但黎曼第一个把 ζ 函数由实变量过渡到复变量,并证明:

①$\zeta(s)$是 s 的解析函数,除了在 $s=1$ 处有一个单极点之外,在全平面正则.

②$\zeta(s)$满足函数方程

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

③$\zeta(s)$在 $s=-2,-4,-6,\cdots$处有零点(后来称之为平凡零点),且除了 s 的实部在$[0,1]$的带状区域上时可能有复零点外,没有其他的零点.

黎曼在论文中提出6个猜想:

①他断言,事实上 $\zeta(s)$有无穷多个复零点,全部都位于临界带状区域 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 上.

②设 $\zeta(s)$在矩形 $0\leqslant\sigma\leqslant1,0\leqslant t\leqslant T$ 间,零点的数目为 $N(T)$,他用简单的复变函数论推断,当 $T\to\infty$时,$N(T)$近似等于

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}.$$

他希望得到更强有力的证明.

③他定义复变函数

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s),$$

用 ρ 表示$\xi(s)$的复根,则$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|}$发散,$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^{2}}$收敛,其中$\sum_{\rho}$表示对所有复根求和.

④他简单证明 $\xi(s)$的乘积公式

$$\xi(s)=\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right),$$

但他没有考虑

$$\sum_{\rho}\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$$

的虚部,也没有考虑其收敛性,因此证明是不完全的.

⑤他猜想“非常可能”(sehr wahrscheinlich)全部复零点的实部都等于$\frac{1}{2}$,这就是通常所说的黎曼猜想.

⑥黎曼在论文的后半部得出 $\pi(x)$与 $\zeta(s)$的关系公式,即

$$\Pi(x)=\mathrm{Li}(x)-\sum_{\rho}\mathrm{Li}(x^{\rho})+\int_{x}^{\infty}\frac{1}{u^{2}-1}\frac{\mathrm{d}u}{u\log u}+\text{常数},$$

其中 ρ 跑遍 $\zeta(s)$的所有复零点,且

$$\Pi(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}})+\cdots,$$

$$\mathrm{Li}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{0}^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\log a}.$$

通过黎曼的工作及他的猜想,$\zeta(s)$在解析数论中处于中心的地位.

黎曼这篇划时代的论文虽然引起数学界的普遍关注,但是经历 30 年却不能向前移动分毫.德国分析大师外尔斯特拉斯年逾 70 岁,正在编辑自己的全集.法国数学界的头面人物、分析大师埃尔米特又不懂德语,于是他于 1889 年 3 月 28 日写信给他的朋友、旅法荷兰数学家斯蒂尔捷斯,让他告诉自己黎曼这篇 8 页的论文究竟有些什么内容.作为法国数学界的权威,埃尔米特在 1890 年以“决定一定界内素数个数”为题,设立 1892 年度法国科学院数学科学大奖,其中特别提出:通过更深入地研究黎曼 ζ 函数以填补黎曼文章中的漏洞.埃尔米特的确邀请斯蒂尔捷斯参与竞赛大奖,但斯蒂尔捷斯因生病及一些个人原因没有参加.1893 年 1 月,法国科学院宣布 27 岁的法国数学家阿达马获

奖.阿达马的论文题目是《整函数,特别是黎曼考虑的函数的性质研究》.他严格证明了黎曼不完全证明的猜想①和④,并证明猜想③成立.这个突破掀起了研究解析数论的热潮.1894年德国数学家曼戈尔特(Hans Carl Friedrich von Mangoldt,1854—1925)证明猜想⑥,他引进曼戈尔特函数 $\Lambda(n)$,通过一些素数定理的等价形式,得出素数定理与 ζ 函数零点之间更明显的关系.这样大家所关注的素数定理与 ζ 函数明显地挂上钩,虽然黎曼当时并没有明显提到素数定理,却为素数定理的证明铺平了道路.1896年,阿达马和比利时数学家瓦莱-布桑分别独立证明素数定理,在当时造成轰动.实际上他们所依据的只是

$$\zeta(1+\mathrm{i}t)\neq 0,$$

也就是 $\zeta(s)$的非平凡零点不在实部为1的轴上,显然这与黎曼猜想相距甚远,但这已经显示了 $\zeta(s)$的威力.1900年瓦莱-布桑还得出带余项的公式:

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}+O(x\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{\ln x}}),\alpha>0.$$

1895年曼戈尔特证明黎曼的猜想②,不过有些错误,他最终于1905年给出一个完全的证明,而且误差项也比黎曼当时估计的更为精确,即

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T).$$

30多年之后,黎曼的6个猜想中的5个都已获得证明,同时,沿着黎曼所指明的道路使素数定理也得到证明,而只有黎曼猜想始终未得到证明或反证,它仍然是解析数论中头等重要的问题.1859年黎曼在给外尔斯特拉斯的信中提到 $\zeta(s)$在临界带上的另外一种表示,西格尔(Carl Ludwig Siegel,1896—1981)追查

这个表示的下落，在格廷根图书馆手稿部发现黎曼的一个不完全的手稿. 西格尔对它进行了仔细的研究，得出所谓黎曼—西格尔公式，它大致是把 $\mathrm{Re}s>1$ 的级数部分同 $\mathrm{Re}s<0$ 的函数方程所得出的表示部分结合在一起，给出 $\zeta(s)$在临界带上的较好的渐近表示. 黎曼给出误差的完全渐近展开，还做了许多数值计算. 但西格尔的工作发表时，哈代和李特尔伍德于 1921 年已发表了类似的结果并给出误差项的上界，这说明黎曼方法对求临界带上 ζ 函数的行为很重要.

19 世纪末，解析数论得到突飞猛进的发展. 1894 年，第一部以解析数论为题的专著问世，它是巴赫曼(Paul Gustav Heinrich Bachmann，1837—1920)的《数论》(5 卷)中的一卷.

这时解析数论的中心仍是素数定理及黎曼 ζ 函数. 朗道在他的博士论文(1899)中证明同素数定理等价的定理，他还引进无穷大阶的记号 O，与 o 一起成为渐近估计的标准记号. 估计误差项也成为解析数论的主要工作，特别是科赫在 1901 年证明黎曼猜想与估计

$$\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

等价，这样素数定理与黎曼猜想真正变得密不可分了. 关于素数分布的早期成果，朗道总结在他的专著《素数分布论手册》(*Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*)(1909)中.

1910 年起，哈代、李特尔伍德的合作使解析数论产生新的突破. 1914 年哈代证明 $\zeta(s)$在临界线$\left(\sigma=\frac{1}{2}\right)$上有无穷多零点. 1921 年两人证明，在临界线上，$|t|<T$ 的零点数大于AT，其中 A 是某个常数. 1942 年塞尔伯格证明零点数大于 $AT\log T$. 1974 年莱文松(Norman Levinson，1912—1975)证明有$\frac{1}{3}$以上的复

零点在临界线上.1989年$\frac{1}{3}$被进一步改进为$\frac{2}{5}$.时至今日,黎曼ζ函数及其种种推广仍是解析数论研究的中心.我们相信,在不久的将来,这个领域会取得重大突破.

4 不定方程

4.1 通论

不定方程又称丢番图方程,是最古老的数学领域,它的问题往往没有实际背景,一经偶然提出,再不断推广而得到.最典型的不定方程是

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{1}$$

这也是最古老的不定方程.巴比伦泥版文书上已出现它的多组解,最大的一组解是

$$\begin{cases} x = 12\,709, \\ y = 13\,500, \\ z = 18\,541. \end{cases}$$

其后证明,当$(x, y) = 1$时,设x为偶数,则方程(1)的正整数解均可表成

$$\begin{cases} x = 2ab, \\ y = a^2 - b^2, \\ z = a^2 + b^2. \end{cases}$$

其中a, b为任意互素的正整数,$a > b$.这个结果是一个不定方程的最好的结果了.以这个方程为模式,我们希望求出某一不定方程的全部解,也就是证明除此之外没有正整数解(或整数解或

有理数解)，要不就证明它根本没有正整数解.这样的不定方程很多，许多可以看成是方程(1)的推广.第一个推广是费尔马大定理，费尔马说他证明了

$$x^n + y^n = z^n \tag{2}$$

没有正整数解.实际上，他真正证明的只有

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{3}$$

没有正整数解.欧拉在 1770 年证明

$$x^3 + y^3 = z^3 \tag{4}$$

没有正整数解，但没能证明其他情形.不过欧拉又做了第二步推广，他指出

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \tag{5}$$

有解，因为

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

仿照三次的情形，他在 1778 年猜想

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = u^4 \tag{6}$$

有解，但

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4 \tag{7}$$

没有解.注意到(5)和(6)的左边项数都等于方程的次数，还可以作类似的推广：不定方程

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 + u^5 = v^5 \tag{8}$$

有正整数解，而

$$x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = u^5 \tag{9}$$

没有正整数解，如此等等.

大量不定方程就是这么推广来的，这种推广虽然不费事，可是却够几代数学家干一辈子，而且还不一定有什么结果.费尔马大定理已经有 350 年的历史，直到 20 世纪 90 年代才得到解决.

对于欧拉猜想,1911 年得出方程(6)的一组解

$$30^4+120^4+274^4+315^4=353^4,$$

但直到 1987 年才用椭圆曲线理论及计算机推翻方程(7)无解的猜想,给出了一个反例

$$95\,800^4+217\,519^4+414\,560^4=422\,481^4,$$

而对于方程(9)无解,在 1966 年也给出了反例

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5,$$

但方程(8)的解至今尚未得出.

这个问题还可以从不同的方向推广,一是向高次幂推广,一是左边项数增多,一是右边项数增多.当方程(6)的左边再加上一项,100 年前就找到一组解

$$4^4+6^4+8^4+9^4+14^4=15^4.$$

方程(8)的左边再加上一项也有解

$$4^5+5^5+6^5+7^5+9^5+11^5=12^5.$$

可以看出,单是等幂次的不定方程就可以无尽无休地推广下去.

由上面的例子可以看出,丢番图方程,即使是同一类型,其难易程度大不相同,解法也不一样,因此很难用同一观点加以处理及分类.为了方便起见,还是从方程的次数考虑较为适宜.而从变元数目、方程数目以及求解的范围、方法来分类也可以,特别是近年来丢番图几何的发展,这样处理有一定优越性.

在 19 世纪之前,主要研究的丢番图方程是一次不定方程及二次不定方程.二元、三元一次不定方程在古代已经解决,一般 n 元一次不定方程已由巴歇统一处理.特殊的二次不定方程,如方程(1),早已完全解决,而配尔方程正如前所述,已于 1766 年由拉格朗日解决,他的方法可推广到一般的二元二次非齐次方程. n 元二次方程则可归结为二次型理论,1969 年西格尔最终证

明,它可以有一般的算法解法.

高次不定方程的求解问题,在19世纪有一系列零散结果,其中绝大多数是用初等方法得到的.而有重大意义的两项研究是费尔马大定理(见下节)和闵可夫斯基—哈塞局部整体原理.19世纪末,两个有力的新方法(逼近方法和几何方法)促使两个新的分支产生,即丢番图逼近和丢番图几何,它们使丢番图方程理论出现系统的重大成果.

丢番图逼近问题最早来源于用有理数逼近无理数问题,系统研究开始于1844年刘维尔关于代数数的逼近问题,丢番图逼近的重大突破来源于挪威数学家图埃(Axel Thue,1863—1922),他于1908年把求出整数 n 次不可约二元型方程

$$f(x,y)=A$$

的解 x,y 的上界归结为多项式 $f(x,1)$ 的根 α 的有理逼近问题,从而证明,当 $n\geqslant 3$,A 是整数时,它只有有限多个解.

丢番图几何方法的主要依据在于多项式方程组的解(也就是它的零点)是方程组定义的代数簇上的整点或有理点(也就是坐标为整数或有理数的点).最简单的情形当然是代数曲线,有关代数曲线上的有理点的研究始于1890年,希尔伯特和胡尔维茨证明亏格为零的代数曲线上的有理点有无穷多,这个结果很一般.1901年庞加莱研究亏格 $g=1$ 的曲线,即椭圆曲线,他发明弦—切线法来求有理点.1922年英国数学家莫德尔(Louis Joel Mordell,1888—1972)用庞加莱方法研究椭圆曲线的有理点,证明它们构成群,它们是有限生成的阿贝尔群.他猜想亏格 $g\geqslant 2$ 的代数曲线只有有限多有理点,这就是著名的莫德尔猜想.1928年魏伊研究亏格 $g\geqslant 2$ 的情形,只证明了相应的阿贝尔簇有限生成的定理,但没能证明有限性定理.1929年西格尔把丢番图

逼近法与莫德尔和魏伊的结果联系在一起，证明亏格 $g\geqslant 2$ 的代数曲线上的整点数目是有限多的，这是图埃定理的重大推广，但离莫德尔猜想相距甚远．在没有任何初步结果的情形下，最终法尔廷斯(Gert Faltings，1954—)于1984年证明了莫德尔猜想，使一大批三元齐次高次不定方程问题原则上得到解决．

4.2 费尔马大定理

作为 $x^2+y^2=z^2$ 的直接推广，费尔马在1637年左右提出了费尔马大定理，即对于

$$x^n+y^n=z^n,$$

当 $n\geqslant 3$ 时没有非平凡的整数解．1621年巴歇校订注释丢番图的《算术》，出版了希腊文—拉丁文对照本．费尔马在看这本《算术》时，在论述方程 $x^2+y^2=z^2$ 的页边，用拉丁文写下这段具有历史意义的文字：

“但一个立方数不能划分为两个立方数，一个四次方数不能划分为两个四次方数，一般说来，除平方之外，任何次幂都不能划分为两个同次幂，我发现了一个真正奇妙的证明，但书上的空白太小，写不下．”

费尔马去世后，他的儿子把原书连同书上的评注一起编辑出版，费尔马这个断言才以费尔马大定理或费尔马最后定理流传下来．显然，费尔马的无穷递降法可以证明 $n=4$ 的情形，但他没有明显写出．欧拉证明 $n=4$ 及 $n=3$ 的情形．欧拉关于 $n=3$ 的证明把费尔马的无穷递降法与二次型 x^2+3y^2 的理论结合起来，1753年他称费尔马大定理是非常漂亮的定理，但他只能证明 $n=3$，$n=4$ 两种情形．直到1825年狄利克雷才在巴黎科学院宣读一个 $n=5$ 的证明，但证明不够完全，为勒让德所指

出.勒让德独立地给出一个完备的证明,1828 年狄利克雷也补全了自己的证明.1832 年狄利克雷又证明 $n=14$ 的情形.1839 年,法国数学家拉梅证明 $n=7$ 的情形,不久勒让德简化 $n=7$ 的证明,他巧妙地运用了恒等式

$$(x+y+z)^7-(x^7+y^7+z^7)$$
$$=7(x+y)(x+z)(y+z)\times$$
$$[(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz)^2+xyz(x+y+z)].$$

大约同时,法国女数学家热尔曼(Sophie Germain,1776—1831)得出一个一般的定理:如果 p 是奇素数,$2p+1$ 也是素数,则费尔马大定理的第一情形成立,也就是不存在 x,y,z 使得 $p\nmid xyz$ 且 $x^p+y^p=z^p$.勒让德发展了热尔曼的思想,证明如果 p 是素数,且 $4p+1,8p+1,10p+1,14p+1$ 或 $16p+1$ 也是素数,则第一情形成立.1847 年,柯西得到定理:如果费尔马大定理的第一情形不成立,则

$$1^{p-4}+2^{p-4}+\cdots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-4}$$

是 p 的倍数.

1840 年法国数学家柯西、拉梅等热衷于证明一般情形的费尔马大定理,为此,他们不约而同地把注意力集中到分圆整数上,也就是变元取值不仅限于有理整数,而且还包括单位根.柯西、拉梅都已经走到了关键的一步:如果分圆整数能满足惟一因子分解定理,则费尔马大定理可以证明.

1847 年,费尔马大定理取得了最重要的突破,取得这次突破的原因一是引进分圆整数,二是注意惟一因子分解定理.

分圆整数不是什么新东西,早在 18 世纪,拉格朗日研究费尔马大定理时就引入一些 1 的 n 次复根 d 来使 x^2+y^2 分解成 n

个因子,为了简单起见,假定 n 是奇素数 p, $\alpha^p=1$,于是

$$x^p+y^p=(x+y)(x+\alpha y)(x+\alpha^2 y)\cdots(x+\alpha^{p-1}y),$$

其中每个因子都只含 x 和 y 的一次幂.也就是说,x^p+y^p 的每一个因子都是形如 $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{p-1}\alpha^{p-1}$的数,其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$是通常的整数,这种数被称为分圆整数,因为 α 是 1 的 n 次方根,也就是把单位圆分成 n 等份的分点.分圆整数也像 $a+b\sqrt{3}$这类数一样,它们相加、相减、相乘也是一个分圆整数.

1847 年 3 月法国数学家拉梅再一次重犯前人的错误,他把惟一因子分解定理套用在分圆整数上,从而完全"证明"了费尔马大定理.他过于激动,结果犯了不能挽回的错误.其实,三年之前,德国数学家库默尔已经发表了重要的结果:对于分圆整数,惟一因子分解定理一般不成立.当拉梅正陷入错误的泥沼中不能自拔时,库默尔已经在那里考虑怎样绕开惟一因子分解定理所带来的障碍.结果,他在 1847 年 4 月取得了决定性的进展.

库默尔的想法很巧妙,他引进所谓理想数来代替通常的数.比如[2]表示所有数的 2 倍的集合,在通常整数集合中包括{0, ±2, ±4, ±6, ±8, …},在分圆整数集合中包括所有形如 $2(a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_{p-1}\alpha^{p-1})$的数.不难看出,通常的数 2 只是理想数的代表,或者说 2 生成这个理想数.像[2]这样由一个数 2 生成的理想数被称为主理想数.理想数相加、相乘也是理想数,比如[6]=[2]·[3].如果一个"整数"集合里所有的理想数都是主理想数,那么惟一因子分解定理成立,否则就不成立.要是惟一因子分解定理不成立,过去的数学家就一点办法也没有了.库默尔的主要贡献在于,他发现要证明费尔马大定理不一定非得要对任何 p,惟一因子分解定理都成立,因为这实际上是办不到的事.他提出一个较弱的假设,就是要求这个 p 满足下面的

正则性假设：

任何非主理想数的 p 次幂都不是主理想数.

后来称这样的 p 为正则素数. 在 100 以下的奇素数中，除了 37，59，67 以外，其余的都是正则素数. 于是，库默尔进而证明，对于正则素数，费尔马大定理成立. 他声称，他已对无穷多素数证明了费尔马大定理，不过这个想当然的结论并没有证明. 正则素数到底有多少呢？西格尔估计，有 60% 左右的素数是正则的，而证明其无穷多却极为困难. 反过来，1915 年，丹麦数学家延森(K. L. Jensen)却证明了非正则素数有无穷多个，因此，非正则素数的问题也还得另外想办法.

库默尔后来进一步研究非正则素数的费尔马大定理，他只能一个一个去解决，终于证明对 37，59，67 这三种情形，费尔马大定理也成立(原证明不太严密，后来得到改进). 这样他由以前的 3，5，7 一直推进到 100 以下的所有奇素数，以及 100 以上的所有正则素数. 从这里可以看出库默尔的成就是多么巨大！

1816 年以及 1850 年，巴黎科学院两次设置大奖，提供一枚金质奖章及3 000法郎的奖金，奖给解决费尔马大定理的人. 应征这个奖赏的人很多，但没有一个能完全解决. 1856 年审查委员会终于决定把这项大奖撤销，而只奖给对费尔马大定理贡献最大的库默尔一枚金质奖章，以表彰他对费尔马大定理的贡献.

库默尔之后，费尔马大定理有一些零星的进展. 1908 年，沃尔夫斯克尔(Paul Wolfskehl，1856—1906)遗赠 10 万马克奖金，奖给完全证明费尔马大定理的人. 这样一来，大批业余"数学家"自己印的小册子纷纷出笼. 据不完全统计，只是在 1909—1911 年这三年中，发表的错误证明就达1 000种以上. 第一次世界大战以后，德国战败，要负担高额的赔款，马克急骤贬值，到 1923 年，

10万马克几乎变成废纸一张,但各国还有不少业余研究者.据1958年一份银行报告,这一款项还剩余5 600德国马克.

对于费尔马大定理,又进一步分成两种情形,一般用反证法,假设有正整数解(x,y,z)的话,把p不能整除x,y,z的情形,称为第一情形,而把p能整除x,y,z的情形,称为第二情形.对于第二情形至今所知甚少,而对于第一情形,则有相当大的进展.1909年,魏菲利希(Arthur Wieferich)证明,如果费尔马大定理的第一情形不成立,则p满足

$$2^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2). \tag{10}$$

但几年之内没有找到这种p,到1913年才首先发现1 093满足这个必要条件,1922年又发现3 511也满足.其后,直到1971年用计算机计算发现,在3×10^9之内的素数中,还没有第三个满足上述条件的素数.1910年,米利马诺夫(Dmitry Mirimanoff,1861—1945)更进一步发现p不仅满足(10),还满足$3^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$,这样连1 093及3 511也不满足了.不久,这个判据被进一步推广.如果对于奇素数p,费尔马大定理的第一情形不成立,则$2^{p-1}-1,3^{p-1}-1,5^{p-1}-1,7^{p-1}-1,\cdots,43^{p-1}-1$都能被$p^2$整除.满足这样条件的素数相当少.1989年这个必要条件又被推广到$47^{p-1}-1,53^{p-1}-1,\cdots,89^{p-1}-1$(即前24个素数)都能被$p^2$整除.由此从计算机得出在费尔马大定理第一情形下成立的p的范围:

1988年,$p<7.14\times 10^{14}$;

1989年,$p<1.56\times 10^{17}$;

1990年,$p<7.568\times 10^{17}$;

1995年,$p<8.858\times 10^{20}$.

如此看来,对绝大多数素数来讲,费尔马大定理第一情形成立.

不过对于第二情形，只知其成立的 p 满足

$$p < 15\,000 = 1.5 \times 10^4.$$

在历史上还有另外一条试图证明费尔马大定理的途径，这就是：如果费尔马大定理有反例，也就是如果存在解 x, y, z，$0 < x < y < z$，满足 $x^n + y^n = z^n$，那么 x 至少有多大？1856 年，格隆耐特(J. A. Grünert)证明，如果有反例，则 $x > n$，如果 n 为素数 p，可改进为

$$x > 6p^3.$$

根据计算机的结果，如果有反例，则 $x > 10^{2 \times 10^6}$，这是一个几百万位数字，比天文数字还要大得多.因此，即使求助于计算机去寻求反例，恐怕也是徒劳的.解决费尔马大定理还要靠证明.

近十几年来，费尔马大定理与椭圆曲线联系起来.1993 年 6 月，外尔斯(Andrew Wiles，1953—)声称已经完全证明费尔马大定理，引起了轰动.不久，发现他的证明中有一些漏洞.1994 年 10 月，他对关键的定理采取不同的途径，最终完成了费尔马大定理的证明，论文在 1995 年 5 月全文发表.

外尔斯的证明的关键一步是证明关于椭圆曲线的魏伊—谷山—志村猜想对于半稳定曲线(费尔马方程 $x^p + y^p + z^p = 0$ 所属的曲线)成立.1999 年证明这个猜想对所有椭圆曲线均成立.这成为 20 世纪数学最辉煌的成就之一.

第13章　几何学

19世纪几何学比起前、后两个世纪来，可以说发生了翻天覆地的变化.经过一系列分化及重组，大部分内容趋于式微.20世纪中，属于几何学范畴的拓扑学、代数几何学、微分几何学，在新观点的指引下成为当前的热门（参看第14章第3节及第18章）.

1　通　论

19世纪是几何学的黄金时代.据统计，19世纪的所有数学文献中，几何学文献的数量占总数的一半以上，也就是超过数论、代数学、数学分析、函数论等学科文献的总和.几何学不仅在文献数量上遥遥领先，在质量上也取得许多突破性进展.这一时期几何学的特点在于几何学对象的扩大，几何学研究方法的多样性以及几何学成果的多姿多彩、美不胜收，特别是几何对整个数学产生了持续的不可忽视的影响.下面我们分三个时期具体地叙述一下.

（1）前期（1800—1840）.

这一时期的主要特点是综合几何学的复兴及其与解析几何学的对立.19世纪初，几何学的一大特点是综合几何学的复兴.

解析几何学的方法虽然精细而有力,但在许多问题上未免显得间接而繁琐,特别是在研究图形的过程中摒弃了我们的直观而只是诉诸机械的计算,而且在计算过程中也看不到其几何意义.这就导致许多数学家倡导综合的方法(即不用坐标的方法),特别是这种方法导致射影几何学的产生.射影几何学在17世纪已初具规模,但在解析几何学的强大攻势下湮没无闻,一些著作到19世纪才被发现.这时法国数学家庞塞莱已经建立起自己的射影几何学,这标志着综合几何学的新生.同时,与之对立的解析几何学也有巨大的突破,一是各种坐标系以及坐标变换方法的出现,二是用分析方法得出许多新的概念并有各种应用.19世纪上半叶的几何学家可分为两大对立的阵营:一些数学家走到一个极端,坚持综合方法,反对任何形式的分析方法,如法国数学家庞塞莱、沙勒以及出生于瑞士的德国数学家史坦纳等人;另一个极端是高举解析几何学的大旗,反对综合方法的几何学家,如德国数学家普吕克尔等.他们之间的斗争是如此激烈,以至于在史坦纳等人的排挤之下,普吕克尔不得不中断几何学研究二十几年,转而去研究物理,直到史坦纳去世后,他才再捡起几何学来研究.不过,许多数学家并不坚持任何一种极端观点,他们从实际出发,吸收各种方法的长处为我所用,例如法国数学家蒙日、德国数学家高斯及莫比乌斯等,他们的成就自然更为杰出,特别是高斯的曲面论,对后来的微分几何学有着深远的影响.

(2)中期(1840—1870).

这一时期几何学产生了革命性的变革,打破传统欧几里得几何学的一统天下,这就是非欧几何学的产生以及黎曼对几何学观念的五大革新.黎曼不仅仅提出黎曼式的非欧几何,同时发展了高斯的曲面论,创立了内蕴几何学,以流形为研究对象,从

此几何学由图形的研究转变为对空间的研究，而且这空间不再局限于现实的三维空间，而成为任意维的，这导致后期的高维几何学的发展．黎曼的第四个观念革新是明确区别几何对象的拓扑性质及度量性质，他应该说是现代拓扑学的缔造者．另外，黎曼也是把解析几何学转变为代数几何学的关键人物．这样，几何学研究的对象一下子大大膨胀起来，形成了多种多样的学科．除了上面提到的欧氏几何学、平面几何学、立体几何学、球面几何学、非欧几何学、高维几何学、拓扑学、射影几何学、解析几何学、微分几何学（1894 年才有这个名称，当时称之为无穷小几何学）等之外，还有反演几何学、线几何学、运动几何学、代数几何学等，这使几何学出现了精彩纷呈的多样化局面．

（3）后期（1870—1900）．

这一时期几何学发展的特点是：一方面继续研究中期所产生的一系列对象及方法，一方面寻求多种几何学间的统一性以及几何学的基础．例如，研究高维流形的几何学产生出张量演算，这为黎曼几何学提供了重要工具．而这一时期在寻求统一性及基础方面对后来几何学乃至数学的发展影响最大．这方面首先是 1872 年克莱因的埃尔兰根纲领的提出，以变换群的观点统一几何学，其后挪威数学家 *S*·李提出连续变换群的概念，形成了李群这一重要分支．基灵（Wilhelm Karl Joseph Killing，1847—1923）对李群（实为李代数）及空间形式的研究为后来的研究奠定了基础，并为后来的几何学提供了一系列可以处理的理想对象．希尔伯特在 1899 年发表的《几何学基础》为几何也为整个数学的基础性研究制定了新的纲领，通过几何学公理的增减变化产生一系列新几何学，如非阿基米德几何学、非德萨格几何学等．各种非欧几何学及射影几何学等也仿照希尔伯特的办法公

理化.这些几何学的公理中,几何性质的公理最终归结为基域的代数性质的公理,例如欧氏几何学的基域为实数域,从而几何学的问题转变成代数的问题,而且数域的变化又导致一些新几何学的产生,除了复数域上的几何学之外,研究最多的是有限域上的几何学——有限几何学,现在有限几何学已不属于几何学范畴,而成为组合数学的一个分支.另外,环、半环、群等代数结构也产生一些新几何学,它们更是连几何的影子也没有了.时至今日,原来意义下的几何学领域已经大大缩小了.

2 综合几何学与解析几何学的对立

射影几何学的建立是有着深刻的历史背景的,其中最主要的是综合方法与解析方法的对立.在20世纪初出版的《数学百科全书》中,就有专章讲述"综合几何与解析几何的对立",许多人一直坚持综合几何学的严格标准,但由于解析几何学以及解析方法的普遍性使得综合方法在17—18世纪中一直处于劣势,连综合方法新的倡导者庞塞莱也认识到解析方法的优越性,他说:"解析几何学以其特有的方法提供通用而一致的手段去解决出现的问题……它得出的结果其普遍性是无限的……"而综合方法却需要使用者的技巧,而且结果总是局限于他所考虑的特定图形.吴文俊曾一针见血地指出,综合几何学需要奇招怪招,而且一题一证,难以推广;而解析几何学完全可以机械化,一种方法可以普遍适用.但是在19世纪初,许多人仍不喜欢解析方法,其理由有三方面:一是传统的几何学是数学严密性的典范,代数及分析方法在逻辑上还很难说是靠得住的;二是几何学的优美及直观在解析方法中完全看不到,证明难题的过程中所用

的直观技巧也都淹没在符号演算的汪洋大海之中，而且有些问题通过综合方法可以很简单而清晰地加以解决，无需繁琐的机械过程；三是解析方法把中间过程的几何意义完全忽略掉，证明的出发点与最后的结论之间的联系则完全不清楚.这些理由导致许多数学家产生复兴综合几何学的愿望并付诸行动.这些人，除了蒙日、卡诺等人，主要是庞塞莱、沙勒以及德国数学家史坦纳、史陶特(Karl Georg Christian von Staudt，1798—1867)等.

射影几何学的建立除了综合方法与解析方法的对立之外，还有学科内容及方向上的差异，在当时几何学研究的对象仍是现实空间中的图形性质及其间关系，在很久以前人们就知道这些性质有两方面，一是度量性质，一是非度量性质，后者包括相交、平行等定性的、描述性的性质，不涉及线段和角的度量.射影几何学所研究的图形性质主要属于非度量性质，而图形的度量性质，后来已是微积分与微分几何学的内容，但对于某些度量性质的关系，射影几何学仍有用武之地，而且对于非度量性质，射影几何学不仅显示了其威力，而且开辟了几何学的新方向，即从变换以及变换群的观点来研究几何学、统一几何学，这就给几何学奠定了一个新基础.

摆在射影几何学建立者面前的任务非常明确：要使综合方法也像解析方法那样具有普遍性.为此，庞塞莱考虑的不是特殊图形的特殊问题，而是考虑一般问题：几何图形在任一投影之下保持不变的性质，这里投影指的是中心投影.这样，庞塞莱在欧几里得几何学内部创立了一个新的几何学科.在他1822年出版的《论图形的射影性质》一书中，已经包括了射影几何学的主要内容：区别图形的射影性质与度量性质，列举射影变换，提出连续原理从而引进虚元素.他还发展了对合及调和点列的概念，以

及配极变换的理论.他给出有关从极点到极线和从极线到极点的变换的一般论述,其目的是建立对偶原理.当时他已经注意到,帕斯卡定理与布里安香(Charles-Julien Brianchon,1783—1864)定理只不过是把定理中的“点”与“线”互换、“点共线”与“线共点”互换的结果.在平面几何学中,许多定理这样对换之后,所得的定理不仅讲得通,而且还是正确的,这就是所谓对偶原理.数学家对于这个原理持不同的态度,布里安香等人怀疑这个原理的正确性,但庞塞莱认为这个原理之所以成立,配极关系是其原因.但是,配极关系需要有一个圆锥曲线为中介,因此,庞塞莱的对偶原理有局限性.另一位法国数学家热尔岗(Joseph Diaz Gergonne,1771—1859)则主张对偶原理是普遍原理,对除了涉及度量性质之外的命题一律适用,而配极关系是不必要的中介.他还注意到三维情形,点与面互为对偶,线与线自成对偶,这当然扩大了对偶概念的应用范围.他在 1825—1826 年的论文中,把德萨格定理对偶化,并写成两栏的形式,但是他并不能给出证明.在庞塞莱与热尔岗之间,先是(1818 年)在综合方法与解析方法各自的优越性方面有所争论,其后又在发现对偶原理的优先权上争吵.而对偶原理直到后来经过莫比乌斯、沙勒及普吕克尔等人才逐步得到澄清.

沙勒是综合射影几何学的集大成者,他引进一系列新术语,如对射变换,特别是射影几何学的基本不变量——非调和比(即交比),并追溯其历史到帕普斯时代,过去把共线的四点 A,B,C,D 的交比定义为

$$(A,B,C,D)=(AC/CB)\cdot(AD/DB),$$

其中所有线段均为有向线段.同样可以定义平面上四条共点线 a,b,c,d(依序)的交比为

$$(a,b,c,d)=(\sin ac/\sin cb)(\sin ad/\sin db),$$

其中 ac,cb,ad 和 db 分别指两线间的夹角.1829年沙勒证明:圆锥曲线上的四个固定点 A,B,C,D 与该圆锥曲线上的任意第五个点所确定的四条线有相同的交比.他的另一贡献是把射影几何学建立在两大原理之上,即对偶原理及射影变换原理.由此他明确指出,在射影几何学中,点与线是一样基本的.沙勒在1837年出版的著名数学史著作《几何方法的起源与发展的历史概述》可以说是法国学派的工作总结,因为沙勒不懂德文,也不了解同时代几何学家莫比乌斯及史坦纳等人的工作,但其后的射影几何学则主要由德国学派所发展.

同法国学派一样,德国的射影几何学派也分为综合方法与解析方法两派,综合方法的主要维护者是史坦纳和史陶特.史坦纳的思想反映在他的早期著作中.他的主要贡献是用射影方法从最简单的元素(如点、线、线束)出发,来构造(或生成)比较复杂的曲线、曲面.例如,圆锥曲线既不像过去那样用平面截圆锥来构造,也不是通过解析方法来定义,而是通过两个射影相关的线束所有各对应直线的交点的集合.他还用类似的方法定义二次曲面以及更高阶曲线、曲面.这样,他充分研究二次曲线及曲面,而且从一开始就运用对偶原理.由于在证明中使用交比的概念,所以人们认为他的射影几何还不够纯粹,因为定义交比还是要靠长度之类的度量概念,而长度显然在射影变换下不是不变的.第一个把射影几何学从度量概念中解放出来的是史陶特.史陶特给自己规定的任务是在交比的定义中去掉长度.他的办法是选定直线上的三个点,分别给它们指定符号 $0,1,\infty$,然后通过一定的作法,给直线上的每一个点配上有理数坐标,再定义四点 x_1,x_2,x_3,x_4 的交比为

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \Big/ \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4},$$

这样上面的困难就迎刃而解了.

庞塞莱在1822年的书中就已指出,图形的射影性质和度量性质之间有所区别,射影性质更为基本,而长度和角度在射影变换之下都有变化.为此,史陶特力图把这些度量性质都抛弃掉而建立纯粹的射影几何.但是,如何从射影概念来建立欧氏几何的度量性质却被忽视了.完成“度量几何是射影几何的一部分”这个纲领的是克莱因.他在1871年不仅把欧几里得几何,而且把各种非欧几何都包括在射影几何当中,他的思想建立在凯雷的结果之上,而在凯雷之前,拉盖尔(Edmond Nicolas Laguerre,1834—1886)已经做了初步的工作.

法国数学家拉盖尔以他的分析成就而著名,他是巴黎综合工科学校的毕业生,1854—1864年参军,没有发表任何著作,后来回到母校教书.1883—1886年曾任法兰西学院教授.还是在巴黎综合工科学校读书时,他曾考虑射影变换之下角度如何变化的问题.1853年他发表了著名的直线交角公式,这里的角度是通过射影性质——交比来表达的.

拉盖尔的工作在当时并没有引起注意,直到克莱因发表他完整的论文之后才看到.实际上,在此之前,凯雷已经有意识地把度量几何看成射影几何的一部分.他说过,“度量几何是画法几何的一部分,而画法几何就是全部几何学,反之亦然”.这里的画法几何就是射影几何.凯雷的方法完全是代数的,为了定义两点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 及 $y=(y_1,y_2,y_3)$ 间的距离,他引进二次型

$$F(x,x)=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j,\quad a_{ij}=a_{ji}$$

与双线性型

$$F(x,y)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_iy_j,$$

这样,他把 x,y 之间的距离 δ 定义为

$$\delta=\arccos\frac{F(x,y)}{\sqrt{F(x,x)F(y,y)}},$$

类似地,可以定义角度.当然,这种距离和角度的定义与二次型 $F(x,x)$ 的选取有关,也就是相对于 $F(x,x)=0$ 这个二次曲线取的,因此,凯雷把 $F(x,x)=0$ 称为绝对型.当绝对型退化成无穷远点(1,i,0)及(1,-i,0)时,距离和角度就化为通常欧几里得几何的公式.

克莱因看到了凯雷工作的灵活性,也看到了其中的坐标概念相当含混.他吸收了史陶特直接的射影定义,但去掉了其中不必要的平行公设.这样,通过射影几何不仅可以定义欧几里得几何的度量,而且也能定义各种非欧几何学的度量.他最终完成了凯雷的工作,并且进一步阐明,射影几何在逻辑上是独立于欧氏几何的,而且欧氏几何同非欧几何一样,都是射影几何的子几何,是射影几何学的一部分.

综合射影几何发展到 1870 年左右基本上已经定型,其后的发展包括:

①把射影几何学中史坦纳的构造法由二阶曲线推广到高阶曲线及高阶曲面,这是德国数学家瑞厄(Theodor Reye,1838—1919)等人发展的.

②定义射影变换群,这是 1872 年由克莱因首先提出的.

③定义与欧氏空间不同的射影平面并推广到高维射影空间,这也是由克莱因完成的,这样就把射影几何学变成与欧氏几何学不同的几何学.

④射影几何学的公理化,由于与欧氏几何学不同,射影几何

学的第一组公理首先是由意大利数学家法诺(Gino Fano,1871—1952)给出的(1892),1899年意大利数学家皮埃利给出另一组,其后又在希尔伯特公理化的影响之下,得到其他的公理系统.

在综合射影几何学发展的同时,也开始用代数的方法来研究射影几何学.要用代数的方法,当然要引进坐标.一般的笛卡尔坐标不适用,因为它无法表示无穷远点、无穷远线等理想元素.为此,需要设计出新的坐标——齐次坐标.

第一类齐次坐标是由德国数学家莫比乌斯在1827年引进的,他表示平面上点的方案是所谓重心坐标.他从一个固定的$\triangle ABC$出发,表示一点P的坐标是在这三角形的三个顶点上各加一定的质量(可正可负),使其重心是点P.这时A,B,C处的质量就取作(A,B,C).当然A,B,C不惟一确定,都要乘上一个常数$\lambda\neq0$,$(\lambda A,\lambda B,\lambda C)$也是点$P$的重心坐标,从而$P$与$A:B:C$一一对应.

另一位德国数学家普吕克尔在1828年引进了第二类齐次坐标.他也从一个固定的三角形出发,取一点P的坐标为点P到三边的垂直距离(可正可负).他还举出一个特殊情况,把固定三角形的一条边看成无穷远直线,这也就相当于把通常笛卡尔坐标x,y换成$x=\frac{x_1}{x_3}$,$y=\frac{x_2}{x_3}$,曲线方程对于x_1,x_2,x_3为齐次的,这是现在广泛使用的射影坐标.在齐次坐标系(x_1,x_2,x_3)中,无穷远直线的方程是$x_3=0$.

平面上的点有了坐标,与它对偶的线也应该有坐标.普吕克尔对几何的一大贡献在于他通过引进线坐标而建立新的几何——线几何.变点坐标为(x,y,z)的直线方程是齐次线性方程

$$ux+vy+wz=0,$$

所以可以把(u,v,w)或其常数倍$(\lambda u,\lambda v,\lambda w)(\lambda\neq 0)$当做这条直线的齐次坐标.当直线用坐标$(u,v,w)$表示时,方程 $au+bv+cw=0$ 就表示一个点,这个点无非是满足这个方程的所有直线的公共交点.在这里,点与线的对偶性是非常清楚的.他不仅得出了这种最简单的对偶关系,而且通过线坐标建立了更一般的对偶原理.通过解析方法,对射影变换群也给出了明确的表示,对曲线、曲面也可以得到射影分类,同时也得出"射影几何学基本定理",使射影几何学体系最终完成.

平面射影几何学建立之后,仍有一些新发展:

①建立空间射影几何学,其中点与平面成对偶,直线自对偶.

②构成实射影空间及复射影空间.

③建立仿射几何学,形成变换几何学.

3　非欧几何学

3.1　非欧几何学的前史

欧几里得的《几何原本》第一卷中提出 23 个定义,5 个公理,5 个公设.麻烦出在第五公设,也就是平行公设上.《几何原本》的平行公设是这么叙述的:平面上两直线被一直线所截,如果截线一侧的两内角之和小于两直角,则此二直线必相交于截线的这一侧.《几何原本》中的第 23 个定义是平行线,它们必须在同一平面上,并且两边无限延长后均不相交.这个公设不像其他公理和公设在直观上明显,而且直到命题 29 才需用第五公设来证明.因此,从古到今有许多学者企图利用其他公理和公设来

证明这个平行公设.

长期以来,这种“证明”并未取得成功,却大大简化了第五公设,使它变成了直观上明显的等价命题.其中最常用的是苏格兰物理学家、数学家普雷范尔(John Playfair,1748—1819)的命题:过不在给定直线上的一点,可作一条且仅可作一条直线与该给定直线平行.他在1795年证明这个命题与平行公设等价之后,成为平行公设的通用提法.实际上,公元5世纪普罗克留斯已经提到过.沿着这条路走下去,得到了一些与平行公设等价的命题:

(1)至少存在一个三角形,其三个内角之和等于两直角;

(2)存在一对相似三角形但不全等;

(3)过任意不共线的三点总可以作一圆;

(4)在小于60°的角内一点,总可以作一直线与该角的两边相交;

(5)两条相交直线不能同时平行于第三条直线.

这些命题都同平行公设一样,不能单独从其他几条公理中推出,如果推出来,必定都隐含运用一条等价的公理.这样一种办法行不通,于是许多人采取第二种办法:用与平行公设相矛盾的命题代替平行公设,即:①罗氏公设,过一直线外一点可作两条直线与该直线平行;②黎氏公设,过一直线外一点不能作直线与该直线平行.由此试图推出矛盾但没有成功,而导致非欧几何学的产生.

萨开里(Girolamo Saccheri,1667—1733)受过耶稣会教育,1694年被任命圣职.他曾在帕威亚耶稣会学校教书,1699年以后任帕威亚大学教授.他仔细研究过纳希·埃丁(Nasir Aldin,1201—1274)及沃利斯的工作,力图通过自己的方法来证明第五

公设. 他的方法在 1697 年出版的《证明逻辑》一书中已有所阐述，其实就是欧几里得已经用过的归谬法. 他引进著名的萨开里四边形 $ABDC$（如图 7），其中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 是直角，$AC = BD$，不难证明 $\angle C = \angle D$. $\angle C$ 及 $\angle D$ 有三种可能性：

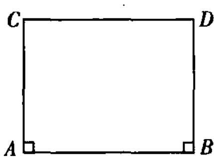


图 7

(1) 直角假设：$\angle C = \angle D$ 且都是直角；

(2) 钝角假设：$\angle C = \angle D$ 且都是钝角；

(3) 锐角假设：$\angle C = \angle D$ 且都是锐角.

他试图用其他 9 条公理和公设以及由它们推出的前 26 条定理来推出第五公设. 要证明平行公设，就是要证明直角假设，也就要证明由钝角假设及锐角假设导出荒谬的结果.

在证明钝角假设荒谬时，他默认直线长度无穷这个假设，从而否定了该假设. 但在证明锐角假设荒谬时，他遇到了很大困难. 他得出在无穷远点相交的直线在交点处应有公共的垂直线，他认为这是与直线的本质相抵触的，从而他认为他证明了平行公设，并于 1733 年发表在《免除污点的欧几里得几何》一书中.

这部书虽然并没有从锐角假设中真正找到矛盾，但它的确包含后来非欧几何学中的丰富内容. 例如，他证明，锐角假设与三角形内角和小于两直角可以互推（即等价），钝角假设与三角形内角和大于两直角等价. 他还证明，由锐角假设可以推出过一直线外一点，可以作无穷多条直线不与该直线相交，而由钝角假设可以推出过一直线外一点没有直线不与该直线相交. 这些结果虽被用来说明欧几里得平行公设的可靠性，实际上却预示了非欧几何学的结果，而且由钝角假设可以直接得出黎曼式非欧几何学的结论，这大大超出了罗氏几何学的内容.

归根结底,萨开里并没有真正找到矛盾,也没有证明第五公设.德国海尔姆斯台德大学教授克吕格尔(Georg Simon Klugel,1739—1812)看过萨开里的著作之后,于1763年指出:平行公设的正确性是基于经验,他对平行公设没能够证明表示怀疑.兰伯特在看到这篇论文之后,于1766年写了《平行线论》一书,于1786年出版.这本书的第三部分考虑三个角为直角的四边形,对第四个角也分别提出直角、钝角、锐角的假设.他也放弃了钝角假设,但不认为锐角假设将得出矛盾.他注意到,钝角假设可以给出球面上图形的定理,而锐角假设可以应用于半径为虚数的球面上的图形,这实际上是后来非欧几何学模型的先声.为此,他于1768年把三角函数推广到虚角,实际上得出了双曲函数的概念.

德国法学教授史外卡特(Ferdinand Karl Schweikart,1780—1859)的研究更进一步,他在萨开里及兰伯特工作的基础上,明确区分两种几何学:欧几里得几何学与三角形三内角和不是两直角的星界几何学.他引进一个常数,即当等边直角三角形两边增长时,斜边上的高线的增长不会超过一定长度,这个长度被称为史外卡特常数.他的手稿于1816年写出后,于1818年送给高斯看,1819年3月高斯在一封信中表示赞同,但又说他已经大大推广了其中所有的结果.史外卡特没有发表自己的结果,但他在1820年劝他的外甥塔乌林努斯(Franz Adolph Taurinus,1794—1874)进一步研究星界几何学.塔乌林努斯到1824年才认真地加以研究,1825年发表《平行线论》,并进一步修订成1826年的《几何原理初步》,在这本书的附录中,他根据锐角假设建立了新型的解析几何学,得出许多半径为虚数的球面几何学(他称之为对数球面几何学)基本公式.同兰伯特一样,他认识到锐角假设

与钝角假设分别对应于对数球面几何学与球面几何学.总之,在非欧几何学建立之前,有些人已逐步有了一些新概念:

①承认平行公理的独立性;

②可能建立另外逻辑上相容的几何;

③这种几何甚至可能应用于星空.

不过,他们都没有破除现实空间只可能是欧氏空间的先验观点,而这一步首先是高斯迈出的.

3.2 非欧几何学的创立

现在公认非欧几何学的奠基人是高斯、罗巴切夫斯基和雅诺什·波耶,他们是彼此独立地得到所谓罗巴切夫斯基几何(克莱因称之为双曲几何)的.

高斯早在1792年就开始深入研究这个问题,但他并没有公开发表过任何著作.1799年他声称他已掌握一种违背平行公理的新几何学.1813年他进一步发展了他的新几何学,他称之为反欧几何,后称之为星空几何或非欧几何.他在后来的书信中一再明确指出,平行公理不能由其他公理证明,而且认为这种新的几何学确有实际应用.他曾实际测量由三个山峰构成的三角形的内角和是否180°,由于实际误差而没有得到确切的结论,他认识到只有更大的三角形才会显示出明显的差别.

罗巴切夫斯基在1826年宣读了非欧几何学的第一篇论文,而且在1837年和1840年分别用法文和德文发表在西欧的主要杂志上,但直到他去世也没有得到理解和重视.

罗巴切夫斯基,1792年12月1日生于俄国的诺夫戈罗德.因家境贫寒,最后靠公费才在喀山中学完成了学业.他在中学时已经对数学产生浓厚的兴趣,1808年进入喀山大学后继续攻读

数学,成绩出色.在喀山大学里,他的老师巴特尔斯是高斯的朋友,很可能将高斯对非欧几里得几何的思想告诉过他.1811 年毕业时他被授予硕士学位,其后留在喀山大学任教.1814 年,他已经独立授课.1822 年,他升为正教授,1827 年被任命为喀山大学校长,1846 年去职,其后任喀山教育管区的助理督办,1856 年 2 月 24 日去世.

早在 1815 年,罗巴切夫斯基就已开始研究平行公设问题.从 1815—1817 年他在喀山大学的授课笔记中可以看出,他多方设法企图证明第五公设,得到过一些与勒让德接近的结果.直到 1823 年的一份手稿中,罗巴切夫斯基还认为这样一个证明或许是可行的.

1823—1825 年间,罗巴切夫斯基把自己的注意力转向所谓"虚几何学".他用法文写了《平行线理论和几何学原理概述及证明》,在 1826 年 2 月提交喀山大学数学物理系并于同年 2 月 12 日宣读.这篇论文第一次宣布一种与欧氏几何完全不同的新几何学,其中过直线外一点可以画两条直线与该直线平行,而且三角形的三内角和小于二直角.这样一来,非欧几何学正式诞生了.遗憾的是,这篇论文没有出版,手稿也下落不明.他正式发表的第一篇非欧几何学论文是《论几何学原理》,1829—1830 年发表在《喀山公报》上,其中包括 1826 年论文的主要内容,而且加上新理论的应用.其后在《喀山大学科学报告》上发表有关虚几何学的几篇论文(1835),其中用解析方法建立非欧几何学.他在已知球面三角的公式中把长度用纯虚数代入而得出非欧几何的公式,这样就论证了他的几何学的无矛盾性.

1837 年,罗巴切夫斯基在克莱尔杂志上发表《虚几何学》,并于 1840 年用德文写了《平行线理论的几何研究》,希望能够引

起欧洲数学家的注意，但是成效甚微.与他同时代的凯雷、奥斯特洛格拉德斯基以及布涅亚科夫斯基(Victor Yakovlevich Bunyakovsky，1804—1889)都不能很好地理解它.高斯当然懂得罗巴切夫斯基的工作，并且说了好话，支持他当选为格廷根科学会会员(1842)，不过高斯从来不公开宣扬任何关于非欧几何学的工作.1855年，罗巴切夫斯基的眼睛几乎瞎了，他用俄文及法文口授一部《泛几何学》，这本书总结了自己过去的非欧几何学成就及其在分析上的应用，不久之后他就去世了.直到19世纪60年代后期，罗巴切夫斯基著作的译本才被一些大数学家所研究，罗巴切夫斯基几何学的意义才被世人公认.罗巴切夫斯基被称为几何学的哥白尼，他大胆突破当时占统治地位的空间哲学，即由柏拉图首先提出又由康德发展的空间是先天观念的思想.他提出测量大边三角形的三内角和，并根据当时的数据计算天狼星与地球两对顶点所构成的三角形与π的差为0.000 372秒(由于计算错误，实际值是它的1%).而且他认为这个差随空间而不同，可能由于“力”而产生，这个思想是相当先进的.

非欧几何学的另一位创立者是匈牙利数学家雅诺什·波耶.他的父亲法卡什·波耶(Bolyai Farkas，1775—1856)于1796—1799年在格廷根大学学习，从此认识高斯，两人结下终身友谊.1804年起法卡什·波耶在马洛斯法沙黑利城一所学院担任数学、物理、化学教授.长期以来，他在相当孤立的情况下集中研究平行公设的证明问题.他曾经写过一本书详尽谈到这个问题的解法，但高斯指出其中有错.雅诺什·波耶16岁时去维也纳帝国工程学院学习，1822年毕业后成为一名军官，1833年退役回家.

雅诺什·波耶很早就继承了父亲对于平行公设研究的热情.早在学院学习时，他已试图开始证明平行公设.他的父亲根据自

己多年失败的经验力图劝阻他别干，在1820年写给他的一封信中说："你必须像痛恨淫荡的交际一样痛恨它，它能剥夺掉你所有的闲暇、你的健康、你的休息以及你一生中所有的快乐.这个无底的黑暗也许能够吞没1 000个灯塔一样的牛顿……"但他不顾父亲的劝告，仍继续努力干.雅诺什·波耶在发现自己的证明错误之后，开始从另外一个角度研究这个问题，他把平行公设换成另外一条公理：过直线外一点可以作无穷条直线不与该直线相交，并研究建立在这条公理上的几何学的结论.他进一步发现这种新几何学也不自相矛盾.1823年他写信给父亲说他已作出一个新的平行理论，"我已得到如此奇异的发现，连我自己也觉得惊叹不已".1825年他把手稿寄给父亲及他的老师审阅，1829年又送去更详细的手稿.父亲不太满意，因为他不明白雅诺什·波耶的公式中为什么出现一个不确定的常数，但他还是希望儿子的结果迅速问世.1831年6月及1832年1月，作为法卡什·波耶的两卷著作《为好学青年写的数学原理试论》(*Tentamen Juventuten Studiosam in Elementa Mathescos*)的一个附录《绝对空间的科学》(*Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens*)送到高斯手中.1832年3月6日，高斯回信给法卡什·波耶说："我不应该称赞它……称赞它也就是称赞我自己.实际上这个工作的全部内容，你儿子所用的方法以及由此导出的结果几乎完全同我的想法一致，而这些想法的一部分我已经考虑了30年或35年了."虽然高斯在这封信的最后表示欣赏雅诺什·波耶的成就，还是带给雅诺什·波耶巨大的打击.从此，他陷入精神抑郁状态，再也不发表任何著作.他认为高斯是个"贪心的巨人"，想夺去他的优先权.而在看到罗巴切夫斯基的著作时，又怀疑罗巴切夫斯基是剽窃他的.这个仅有26页的附录一直没有引起注意.他在不满、酗

酒、决斗、潦倒中于 1860 年 1 月 27 日离开人世.

雅诺什·波耶的著作题目为《关于绝对真确的空间科学附录,而不依赖欧几里得公理Ⅺ的真伪》(这不能先验地判定),通常简称为《附录》. 这里公理Ⅺ即平行公理,他把公理Ⅺ成立的几何体系记作$\sum$,而把相反公理成立的体系记作 S,他尽量推导出在这两个体系中均成立的几何学命题,这种几何现在被称为绝对几何学. 例如,他推出正弦定律

$$\frac{\sin A}{O_a}=\frac{\sin B}{O_b}=\frac{\sin C}{O_c},$$

其中 O_r 表示半径为 r 的圆的周长,这个定律在欧氏几何及罗氏几何中均成立,因此是绝对几何学中的定理. 雅诺什·波耶还明确提出与欧氏几何体系$\sum$相对立的体系 S,特别是雅诺什·波耶、罗巴切夫斯基和高斯分别独立发现极限球面,这是球心在无穷远点的球面,他们还发现极限球面一个惊人的事实,即极限球面的几何是欧氏几何,而不是非欧的双曲几何或罗巴切夫斯基几何. 这个发现实际上预示着欧氏几何可以看成双曲几何的特殊情形或极限情形.

由数学史的研究可知,这个事实早在 1816 年为高斯的学生法赫特(Friedrich Ludwig Wachter, 1792—1818)所发现,他在给高斯的信中谈到,一球面当半径趋于无穷时,这个球面是欧氏平面,甚至当平行公理不成立时也对. 现在看来,他的说法是正确的. 不过他似乎并没有建立非欧几何的意思,因为正如他在 1817 年出版的一本小册子的题目《欧几里得第 11 公理的证明》所示,他的前提是"四个任意点决定四点面,而两个四点面交于一条三点线",他试图证明前者是球面,后者是圆,而这显然是不可能的.

从历史上看,真正明确表述非欧几何实质内容的是罗巴切夫斯基.他在否定平行公设的假设前提下引进一些新内容:

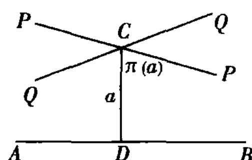


图 8

(1)平行角 $\pi(a)$.如图 8,设 AB 为一直线,C 为直线外一点,点 C 到直线 AB 的垂直距离为 a,过点 C 的直线可分为两类,一类与 AB 相交,一类不与 AB 相交,则不与 AB 相交的直线与 CD 所成角度的最小者定义为 a 的平行角,记作 $\pi(a)$.罗巴切夫斯基和高斯独立得出

$$\tan\frac{\pi(x)}{2}=\mathrm{e}^{-\frac{x}{k}},$$

其中,k 被称为空间常数.

(2)三角公式.罗巴切夫斯基认识到,他的几何的三角公式就是球面三角公式,其中边长及角度均用虚数即可得到(如图 9):

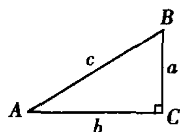


图 9

$$\sin A\tan\pi(a)=\sin B\tan\pi(b);$$

$$\cos A\cos\pi(b)\cos\pi(c)+\frac{\sin\pi(b)\sin\pi(c)}{\sin\pi(a)}=1;$$

$$\cot A\sin C\sin\pi(b)+\cos C=\frac{\cos\pi(b)}{\cos\pi(a)};$$

$$\cos A+\cos B\cos C=\frac{\sin B\sin C}{\sin\pi(a)};$$

$$\cot\pi(a)=\cot\pi(c)\sin A;$$

$$\sin A=\cos B\sin\pi(b);$$

$$\sin\pi(c)=\sin\pi(a)\sin\pi(b).$$

(3)面积公式.$\triangle ABC$ 的面积与 $\pi-(A+B+C)$ 成正比,这个数值被称为角亏.

(4)境界线(极限圆)的导入.罗巴切夫斯基在《平行线论》中

导入境界线和境界球面的概念. 境界线是平面上的曲线,其所有弦的垂直等分线(称为轴)都互相平行. 而境界球面是境界线绕其中任意一轴旋转所得到的球面. 境界球面的几何学是欧氏几何学,从而可以看出欧氏几何学是罗氏几何学的极限情形.

(5)平面上的两条直线间存在三种关系,除了两条直线相交及平行之外(这时它们都不能有公垂线),还可能有第三种关系,被称为超平行,它们没有交点,但有惟一一条公垂线(如图 8). 在 PQ 之间任意过点 C 的直线都与 AB 超平行.

3.3　非欧几何学的传播及发展

非欧几何学的三位创造者去世之时(1855,1856,1860),他们的工作仍然默默无闻,虽然他们的思想激发了对古典几何学的完全革命. 实际上,这个革命的起点是黎曼 1854 年的就职演说,这篇演说在许多方面是历史上的里程碑,特别是他引进了 n 维几何、n 维流形以及第二类非欧几何学——球面非欧几何学,但是他的论文直到他去世后才发表(1868),也是在这时,非欧几何学突然得到各方面的注意,并进而得到越来越广泛的承认. 1866 年,乌埃尔(Jules Hoüel,1823—1886)把罗巴切夫斯基等人的工作传播到法国,巴塔里尼把它们传播到意大利,克里福德把它们传播到英国,而高斯的遗著在德国的发表更加促进人们认识到非欧几何学的重要性,非欧几何学很快在欧洲成为热门话题,其中做出最大贡献的是意大利数学家贝尔特拉米以及凯雷、克莱因、克里福德和稍后的庞加莱的工作. 他们的工作在于把非欧几何学实现为(或翻译成)当时大家所熟悉的几何学——射影几何学和微分几何学.

非欧几何学的发展虽然是 19 世纪上半叶数学中的一大成

就,但是一直没有受到数学家们的重视,这是因为:

(1)在19世纪20—50年代,几何学的中心是射影几何学,到19世纪60年代,随着几位大家的相继去世,射影几何学,尤其是综合射影几何学的发展才趋于停滞.

(2)非欧几何学仍然不能战胜根深蒂固的几何学传统观念,他们采取一种“虚几何学”的推广形式,但看不到这种推广形式的意义及后果.

(3)非欧几何学的独立性及无矛盾性并没有彻底解决.雅诺什·波耶在晚年仍然致力于证明平行公设,因此需要对非欧几何学提供欧氏模型或射影模型,从而增加大家对非欧几何学的信心,使之成为与欧氏几何学平起平坐的几何学,微分几何学的发展促进了模型的出现.

1872年之前,贝尔特拉米研究了曲线及曲面的微分几何学.在比较罗巴切夫斯基几何学及德国数学家闵定(Ferdinand Gottlieb Minding,1806—1885)关于伪球面的微分几何学之后,发现了其中的联系.1868年他第一次给出罗巴切夫斯基几何的欧氏模型,从而使这个“虚几何学”具有现实的意义.

伪球面是曳物线绕其渐近线旋转而得到的曲面.曳物线上每点的切割到 Oy 的切线段都相等(如图10).曳物线(tractrix)方程为

$$x = \pm a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{x} \mp \sqrt{a^2-x^2},$$

满足 $PQ = P'Q'$.

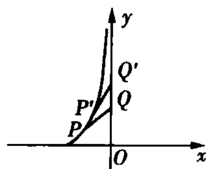


图10

伪球面是一个曲率处处为负的常曲率曲面,而这正好符合罗巴切夫斯基关于半径为虚数的球面的要求.这个伪球面就是

实现罗巴切夫斯基几何学的模型，但是其中的术语需要翻译成曲面上的语言：

罗巴切夫斯基几何学	**对应**	**伪球面**
点	↔	点
直线	↔	最短线
两点距离	↔	连接两点最短线的长度
三角形	↔	测地三角形
内角和小于 π	↔	有 $\angle A+\angle B+\angle C-\pi=$ 曲率 $\times\triangle ABC$ 的面积 $< C$

由于贝尔特拉米的模型，罗巴切夫斯基几何学的相容性归结为欧氏几何的相容性. 由于一般承认欧氏几何学是真的，所以罗巴切夫斯基几何学也有了可靠的基础，不再是虚无缥缈的了.

贝尔特拉米之后，克莱因和庞加莱又分别给出非欧几何学的平面模型，它们的对应关系如下：

罗氏几何学	**克莱因模型**	**庞加莱模型**
平面	圆内区域	圆内区域
点	圆内点	圆内点
直线	圆内弦	圆内与圆周正交的弧（包括直径）
两直线平行	两弦无交点	两弧无交点

当然在解释角度及重合等概念时，两个模型各有各的麻烦之处. 可是，根据上面的解释，过“直线”外一点，可有无穷多直线与该直线平行，这点在直观上是一目了然的. 这样从 19 世纪 70 年代起，非欧几何学为大多数数学家所接受，并随着克莱因的埃尔兰根计划而被纳入几何学大家庭之中，成为几何学合法的一员.

黎曼以后，克莱因是发展非欧几何学最主要的数学家，而且通过几何学的统一分类方案，最终使非欧几何学在整个几何学

中占有明确的位置.克莱因在1871年发表著名的论文《论所谓非欧几何学》,开始他的一系列研究,并将研究成果发表在1871—1876年的一系列论文之中.克莱因在这方面的贡献概括起来主要有:

(1)建立双曲几何学的克莱因模型,使模型不再依赖欧氏空间中的曲面.

(2)明确建立黎曼式非欧几何学,他称之为椭圆几何学,他首先指出它有两类:除了二重椭圆几何学即球面几何学之外,还引入单重椭圆几何学,并建立其射影平面的模型.

(3)把包括各种非欧几何在内的所有度量几何都建立在同一个基础上,具有同一距离及角度公式,它们由绝对型的不同选取而区别,从而完成非欧几何学的统一.

4 微分几何学

微分几何学是用数学分析方法来研究几何学.因此,微分几何学的对象同其他几何学并没有差异.长期以来,研究平面图形主要是研究平面曲线以及三维欧氏空间中的曲面及曲线.19世纪末,几何对象的高维化与内在化,导致黎曼空间和黎曼流形的出现,黎曼几何从而诞生.古典微分几何与黎曼几何在微分几何学的统一名称下现在成为几何学的主体.这里的历史主要还是古典的曲线与曲面的微分几何学,它是随着微积分(即无穷小演算)一起产生的,因此长期以来,被称为无穷小几何.它的更正确的名称应该是解析几何或分析几何,不过这个名称已被用于笛卡尔坐标几何上,特别是20世纪50年代以来被再次用于复解析簇的几何上,因此,微分几何的名称保留了下来.这个名称实

际上最早见于比安奇的《微分几何教程》(*Lezioni di geometria differenziale*)(1894),不过其后仍有人使用诸如无穷小演算或分析在几何上的应用之类的老名称.到 20 世纪 40 年代,微分几何学主要研究微分流形的几何学.

4.1　平面曲线

真正属于微分几何学的概念是曲率,曲率是对曲线或曲面弯曲程度的度量.牛顿在 1665 年对曲线上每一点定义曲线的密切圆,这圆的圆心被称为曲率中心,这圆的半径(即曲率半径)ρ 的倒数被称为曲率 k.牛顿在 1671 年发现,在笛卡尔坐标之下,曲率半径可由下面的公式表出:

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}.$$

曲线 C 的曲率中心的轨迹 C' 被称为 C 的渐开线.C 和 C' 之间有着密切的关系.1673 年惠更斯利用旋轮线的渐开线也是旋轮线这个事实设计旋轮摆.约翰·伯努利于 1691 年发现曳物线是悬链线的渐开线,1692 年雅各布·伯努利发现对数螺线的渐开线仍是对数螺线.高斯的老师、德国数学家凯斯特纳在 1761 年发现曲率的一个直观的定义,它非常有用且与牛顿的定义等价,它表示切线(角度 θ)沿曲线(弧长 s)转动的速率,即

$$k = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

4.2　空间曲线

17 世纪人们的兴趣主要是平面曲线,空间曲线只有个别的

例子.1731年克莱洛在他的《双曲率曲线的研究》中才开始系统地进行研究,他采用将曲线投射到三个坐标平面的解析几何方法,研究切线(没有给出明显方程)和求长法.蒙日在1771年呈送给法国科学院的论文(1785年发表)中给出空间曲线的法平面方程以及曲率半径,他还定义了可展曲面.他虽有挠率的直觉观念,但没有精确地表现出来,直到1805年才由他的学生朗克利(Michel Ange Lancrét,1774—1807)得出,挠率的名称是1819年由瓦莱(L.I.Vallée)给出的.1826年柯西在他的著作《无穷小分析在几何学中的应用》中使用弧长(s)为参数,得出更精确的曲率表示

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

和挠率表示

$$\frac{1}{\tau}=\frac{d\Omega}{ds},$$

其中Ω是曲线的密切平面与固定平面的角度.他在密切平面内定义主法线,其方向余弦$\cos\lambda,\cos\mu,\cos v$分别与$\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}$成正比.他实际上已得出弗瑞内—塞雷公式,下面的公式是弗瑞内(Jean-Frédéric Frenet,1816—1900)在1847年和塞雷在1850年得出的:

$$\frac{d(\cos\alpha)}{ds}=\frac{\cos\lambda}{\rho},$$

$$\frac{d(\cos\beta)}{ds}=\frac{\cos\mu}{\rho},$$

$$\frac{d(\cos\gamma)}{ds}=\frac{\cos v}{\rho},$$

$$\frac{d(\cos L)}{ds}=\frac{\cos\lambda}{\tau},$$

$$\frac{d(\cos M)}{ds}=\frac{\cos\mu}{\tau},$$

$$\frac{d(\cos N)}{ds}=\frac{\cos v}{\tau},$$

$$\frac{d(\cos\lambda)}{ds}=-\frac{\cos\alpha}{\rho}-\frac{\cos L}{\tau},$$

$$\frac{d(\cos\mu)}{ds}=-\frac{\cos\beta}{\rho}-\frac{\cos M}{\tau},$$

$$\frac{d(\cos v)}{ds}=-\frac{\cos\gamma}{\rho}-\frac{\cos N}{\tau},$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是切线的方向余弦,$\cos\lambda,\cos\mu,\cos v$ 是主法线的方向余弦,$\cos L,\cos M,\cos N$ 是次法线的方向余弦. 这些公式由于达尔布引进“活动标架”而简化,即在空间曲线上每一点 M 都有互相垂直的三个轴,切线、主法线及次法线可用单位向量 $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$表示,这时弗瑞内—塞雷公式可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{t}}{ds}=\dfrac{\vec{n}}{\rho},\\[2ex] \dfrac{d\vec{n}}{ds}=-\dfrac{\vec{t}}{\rho}-\dfrac{\vec{b}}{\tau},\\[2ex] \dfrac{d\vec{b}}{ds}=\dfrac{\vec{n}}{\tau}.\end{cases}$$

柯西在 1820 年已经证明常微分方程的存在与惟一性定理,从而证明曲率 $1/\rho$ 及挠率 $1/\tau$ 作为弧长的函数惟一决定空间曲线(除了欧氏空间的位移以外). 这样,空间曲线的局部微分几何理论就完整地建立起来. 据数学史研究,爱沙尼亚数学家森夫(Karl Edard Senff)在 1831 年首先列出了所有方程.

4.3 三维空间中的曲面

首先研究曲面微分几何学的是法国力学家帕朗(Antoine Parent,1666—1716),他在1700年定出球面等特殊曲面的切平面方程.其后,克莱洛、欧拉及蒙日等都进一步推广,但他们都隐含假设在曲面上每个非奇异点均有切面.直到杜潘(Pierre-Charles-Francois Dupin,1784—1873)在1813年,柯西在1826年才明显证明曲面上所有通过某一给定点的曲线在该点的切线均在同一平面上,他们把这平面定义为该点处曲面的切平面,柯西给出了方程的微分形式.

曲面微分几何学最重要的概念是曲率.欧拉在1760年开始这方面的研究,他用十分复杂的三角方法证明欧拉定理:曲面上每一点 P 均有法线,用包含法线的平面来截曲面可得平面曲线,可以计算这些曲线在 P 处的曲率.欧拉证明,在 P 点的切平面上,各个方向的曲率如果不恒等,则存在两个互相垂直的方向使曲率分别达到极大$\frac{1}{f}$及极小$\frac{1}{g}$,这两个方向被称为主方向.设某方向与极大主方向成夹角 φ,则该方向的法截线曲率$\frac{1}{\rho}$由下面的公式给出:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\varphi}{f}+\frac{\sin^2\varphi}{g}.$$

1776年穆尼埃(Jean-Baptiste-Marie-Charles Meusnier de La Place,1754—1793)推广欧拉的结果到曲面的任意截面的曲率,如果该截面与通过同样切线的法截面的交角为 ω,则截线曲率

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\sin\omega}\left(\frac{\cos^2\varphi}{f}+\frac{\sin^2\varphi}{g}\right).$$

蒙日在1784年开始研究曲面法线,他引进曲率线的概念(其上

每一点的切线均为主方向),并证明,曲面沿着曲率线的法线构成可展曲面.

欧拉及蒙日的工作为杜潘所继续.杜潘的著作代表19世纪初法国微分几何的最高成就,不过很快就为高斯所超过.杜潘的工作集中于下面两本著作,一是1813年出版的《几何学的发展》(*Developpments de geometrie*),一是它的续篇《几何学及力学的应用》(1822).在前一本书中,他引进共轭方向的概念.曲面上沿着曲线Γ上各点的切平面,其包络构成可展曲面,Γ上一点P的特征直线被称为Γ在P点的切线的共轭.然后,杜潘引入杜潘指标线(indicatrice).在曲面上每一点P,如果主曲率非0,在P点的切平面上的杜潘指标线定义为由P点沿每一个方向所画一线段的端点的轨迹,线段长度为该方向法截线曲率半径的平方根.假设P点处两主曲率半径为R_1, R_2,若$R_1R_2>0$,则指标线为以P点为中心的椭圆

$$\frac{x^2}{|R_1|}+\frac{y^2}{|R_2|}=1;$$

若$R_1R_2<0$,则指标线为以P点为中心的双曲线

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=\pm 1.$$

杜潘指标线有很好的性质,如共轭方向关于指标线共轭.

当$R_1R_2<0$时,他定义曲面上两族渐近线,即在每一点都切于该点的指标线的渐近线.后来他还引进"正交三重系"的概念,并证明这两两正交的曲面相交于曲率线.这对达尔布的工作有直接影响.杜潘还引进杜潘圆纹面(cyclide)的概念,对几何也很重要.

到这时,曲面的微分几何学还不能说开始了,真正为曲面微

分几何学奠定基础的是高斯.高斯从1816年起开始进行大地测量的实际工作,这些实践不仅大大改进了测量学,而且从根本上一举建立了曲面的微分几何学.他发表的成果不多,1825年写的《曲面的新研究》直到1901年才发表.他只在1827年发表了《曲面的一般理论研究》(*Disquisitiones generales circa superficies curvas*),其中他用曲纹坐标 u,v 代替 x,y,z 来表示曲面的局部图,得出弧元

$$\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2,$$

其右端被称为第一基本形式,特别是在天文及测地工作的启发下,他通过把曲面映射到球面上,引进了曲面的球面表示,后来称之为高斯映射.借此他定义在曲面上一点 P 处的总曲率(后来称之为高斯曲率)$k(P)$为

$$\frac{\mu(U)}{U}$$

在 U 趋于零时的极限,其中 U 为包含 P 点的曲面块的面积,$\mu(U)$为 U 映射到球面上的球面块的面积.接着高斯证明 k 只与第一基本形式有关,他称之为"伟大定理"(theorema egregium),由此他建立内蕴几何学,即考虑曲面的性质与它所嵌入的外围空间(通常为欧氏空间)无关.他还得出

$$k=\frac{1}{R_1\cdot R_2},$$

这个公式实际上在1815年已由罗德里格斯(Olinde Rodrigues,1797—1851)得出过.在计算 k 的过程中,高斯还引进所谓第二基本形式

$$D\mathrm{d}u^2+2D'\mathrm{d}u\mathrm{d}v+D''\mathrm{d}v^2.$$

1856年迈因那迪(Gaopare Mainardi,1800—1879)及1867年柯达

齐(Delfino Codazzi,1824—1875)独立发现曲面的两组函数 E,F,G,D,D',D'' 及其导数之间的某些相容条件(被称为高斯—柯达齐条件):

$$D_v - D'_u = D\Gamma^1_{12} + D'(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - D''\Gamma^2_{11},$$

$$D'_v - D''_u = D\Gamma^1_{22} + D'(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - D''\Gamma^2_{12},$$

其中下标 u,v 表示对 u,v 的导数,Γ^i_{jk} 为 E,F,G 及其偏导数的函数.这两个条件是可积性条件,常被称为迈因那迪—柯达齐方程.另一可积条件被称为高斯方程:

$$DD'' - D'^2 = F[(\Gamma^2_{22})_u - (\Gamma^2_{12})_v + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}]$$
$$+ E[(\Gamma^1_{22})_u - (\Gamma^1_{12})_v + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}],$$

首先由外因加登(Julius Weingarten,1836—1910)在 1862 年发表. 1867 年邦内证明,这些条件也是充分的,也就是对于满足这些条件的两个基本形式,惟一存在一个由它们所决定的曲面(可差一个平移),从而完全证明曲面论的局部存在定理.从数学史上看,俄国(拉脱维亚)数学家彼德森(Karl Peterson,1828—1881)在 1853 年的学士论文中已经建立所有这三个可积性条件,并明确提出曲面论的基本定理,但生前未出版.

19 世纪中期,曲面微分几何学的一个中心问题是所谓"可贴合性"(applicabilité)问题,也被称为可变形性问题,即两曲面 Σ,Σ' 是否可以局部等距对应,也就是使 $ds^2 = ds'^2$ 或保持第一基本形式.按高斯伟大定理,其必要条件是对应点的高斯全曲率相等,但曲面如果不是常曲率的,这条件一般不一定充分.

"可贴合性"有三个基本问题:

①确定两个给定曲面在什么条件下可彼此贴合;

②确定可贴合到给定曲面上的所有曲面;

③在什么条件下,两个互相可贴合的曲面只相差一个欧几里得位移,也就是实际上不存在非平凡的变形,在这种情况下称曲面是(无穷小)刚性的.这个问题也被称为刚性(rigidité)问题.

这些问题从欧拉开始已有研究,拉格朗日在1812年猜想,一个凸面不能变形.19世纪中期,邦内开始研究这些问题.由邦内的存在定理,如果一个等距变换还保持第二基本形式,则它相当于一个欧氏位移.邦内证明这个条件等价于该局部等距变换把一族(非直线)渐近线变成另一族渐近线.

1860年法国科学院设置大奖,题目就是"研究可互相贴合的曲面".对此,法国的布尔(Edouard Bour,1832—1866)和邦内、意大利的柯达奇、德国的外因加登投寄了论文.结果布尔荣获一等奖.他原则上解决了第二个问题,他证明,可贴合到给定曲面的曲面集合局部上满足蒙日—安培方程,但这是一个高度非线性的偏微分方程,它的理论直到最近才有重大突破.因此,许多数学家只能满足于对特殊情形的研究,其中最主要的是常曲率曲面,它与非欧几何学有着密切的关系,蒙日已研究过曲率 k 处处为零的曲面,这些曲面无非是可展曲面,它们可贴合到平面上.对于常曲率 $k>0$ 的曲面,其度量可以化为

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 \frac{u}{\sqrt{k}} dv^2,$$

这种曲面可以贴合到半径为 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 的球面上.对于常曲率 $k<0$ 的曲面, ds^2 可以化为

$$ds^2 = du^2 + \sinh^2 \frac{u}{\sqrt{-k}} dv^2,$$

这种曲面可以贴合到伪球面上.总之,对于任何两个常曲率曲面

Σ,Σ',其上分别有两点 P,P' 及过 P,P' 的测地线 Γ 和 Γ',总存在局部等距映射把 Σ 的开集映到 Σ' 的开集上,使 P 映到 P',Γ 映到 Γ' 上.这是闵定在 1839 年证明的.从大范围观点看,李伯曼(Karl Otto Heinrich Liebmann,1874—1939)在 1899 年证明 R^3 中常曲率 $k>0$ 的完全曲面只有球面,同年希尔伯特证明 R^3 中常曲率 $k<0$ 的没有奇点的完全曲面不存在.

关于曲面论的整体性质,最主要的定理是高斯—邦内定理.设 S 为封闭曲面,则

$$\iint_S k\mathrm{d}\sigma = 2\pi\chi,$$

其中 k 是面积元 $\mathrm{d}\sigma$ 处的高斯曲率,χ 是欧拉—庞加莱示性数.它把局部的微分几何性质(曲率)与整体的拓扑性质联系在一起,这个定理首先由高斯在 1827 年对测地三角形证明,得出

$$\iint_S k\mathrm{d}\sigma = A + B + C - \pi,$$

其中 A,B,C 表示三角形的三个角,等式右边被称为角余.其后他推广到测地多边形并应用于大地测量.1848 年邦内对闭曲线 C 围成的曲面块 U 得出

$$\int_C \mathrm{d}\omega - \int_C \frac{\mathrm{d}s}{\rho_g} = \iint_U k\mathrm{d}\sigma,$$

其中 ρ_g 是测地曲率,ω 是 C 的切线与固定方向的交角.这个公式被称为高斯—邦内公式.对于一般曲面,上述整体公式到 20 世纪才得出.陈省身将它向高维推广并给出内蕴证明,开辟了微分几何学的新纪元.

微分几何学的重要问题除了曲率以外,还有测地线问题.在曲面上两点之间有无穷多条曲线相连接,其中最短的一条(或最长的一条)被称为测地线.在高斯之前,已有许多结果.伯努利兄

弟在研究变分问题时已如此定义,其后欧拉开创系统变分法时,把这个问题化为微分方程的求解问题.高斯从另一角度研究这个问题.1825年,他这样定义曲面 S 上一曲线 C 在一点 P 的测地曲率 k_g:把 C 正交投射到 S 在 P 点的切平面上,这个切平面上曲线的象在 P 点的曲率被称为测地曲率.正是测地线的测地曲率为0,邦内在1848年就反过来以此为测地线的定义.由此马上就可以证明,球面上的测地线是大圆,正圆柱面上的测地线是垂直线、水平圆以及螺线.

1836年雅可比发展了测地线理论,他引进雅可比场、共轭点等概念.共轭点即一对点可以通过两条无限接近的测地线相连接.达尔布在他的巨著《曲面的一般理论讲义》(1887—1896)中证明了负曲率曲面上不存在共轭点.雅可比提出下面的命题:连接 P 与 P' 的测地线弧是 P 与 P' 之间的最短路径,当且仅当这个弧上没有任何点与 P 共轭.他没有给出了证明,后来邦内给出了证明.

1849年起,比利时物理学家普拉托(Joseph Antoine Ferdinand Plateau,1801—1883)进行一系列实验,用金属丝弯成各种形状的框架,浸入肥皂水中,然后拉起来看框架是否沾上肥皂膜.这样的肥皂膜由于表面张力之故是所有沾在同样框架上的曲面中面积最小的.用数学语言来讲,即以某个封闭曲线为边界的所有曲面中求面积最小的曲面.这种面积最小的曲面被称为极小曲面,这个问题也被称为普拉托问题.事实上,早在普拉托实验之前100多年,数学家已经研究极小曲面问题了.

1760年还不知道具体的极小曲面之前,已经由拉格朗日作为变分问题提出来,他证明,如果

$$z = z(x, y)$$

是极小曲面方程,则 z 满足

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2pq\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(1+p^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

其中

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

其后蒙日发现,这个方程的解曲面满足面积极小的条件为中曲率 $H=0$,因此以后称 $H=0$ 的曲面为极小曲面.但 $H=0$ 只是一个必要条件.1784 年蒙日首先试图积分这个方程,但是其中有错.1787 年勒让德改正其错误,他引入著名的勒让德变换,由此得出蒙日公式,把极小曲面表示为平移曲面.由于复分析尚未发展,这个公式用处不大.直到 1832 年,波瓦松才对边界接近一个平面曲线的情形求解这个方程.

直到这时,只知道两类曲面是极小曲面:悬链面(欧拉,1774 年;穆尼埃,1776 年)和螺旋面(穆尼埃,1776 年).1834 年舍尔克发现五种极小曲面,其中最简单的两种极小曲面的方程是

$$e^z=\frac{\cos y}{\cos x},$$

$$\sin z=\sinh x\sinh y.$$

第三种以悬链面及螺旋面为特例.1842 年卡塔兰证明螺旋面是惟一的直纹极小曲面.

1855—1890 年是极小曲面论的黄金时代,当时所有大数学家如黎曼、外尔斯特拉斯、S·李、施瓦茨、邦内、贝尔特拉米、达尔布等人都研究过极小曲面,成果累累.

1866 年外尔斯特拉斯得出表示单连通极小曲面 $S(x,y,z)$ 的公式:

$$x = x_0 + \mathrm{Re}\int_0^w (f^2 - g^2)\mathrm{d}w,$$

$$y = y_0 + \mathrm{Re}\int_0^w \mathrm{i}(f^2 + g^2)\mathrm{d}w,$$

$$z = z_0 + 2\mathrm{Re}\int_0^w fg\mathrm{d}w,$$

其中 $f(w)$, $g(w)$ 是定义在圆盘或全平面 (u,v) 上的 $w = u + \mathrm{i}v$ 的全纯函数,Re 表示实部.

20 世纪 30 年代以后,极小曲面论又迎来新的黄金时代,不仅普拉托问题于 1930—1931 年获得解决,而且被推广到高维情形,在三维空间中也发现许多新的奇形怪状的极小曲面.

5 高维几何学

5.1 高维空间与向量分析

长期以来,人们把几何学的对象局限在可感觉到的物理空间中,因此所研究的对象也就不外乎三维空间及其中的曲线、曲面和立体图形.由于代数上的考虑与物理学的研究,把三维空间推广到 n 维空间似乎是自然之事.不过,直到 20 世纪仍然有些数学家把几何学的范围局限在三维之内. n 维几何的想法由来已久,1685 年沃利斯首先提出把几何学扩张到研究 n 维空间.力学发展之后,达兰贝尔及拉格朗日都把时间看成第四维,而把力学看成是四维形式的几何学.拉格朗日在考虑描述质点状态(位置与速度)的位形空间与状态空间时,从解析上也用 n 维空间来描述,不过他们只是把空间作为描述的工具,并无意把几何学推广到高维. 18 世纪和 19 世纪之交,德国哲学家赫尔巴特强

调定义一般空间的重要性，他的思想影响了黎曼等数学家. 第一批提出并认真研究 n 维几何学的数学家是凯雷和格拉斯曼(Hermann Günther Grassmann, 1809—1877)，特别是稍后的黎曼.

凯雷在 1843 年只是把通常的二维、三维解析几何学形式地向 n 维推广. 例如用 n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 n 维欧几里得空间中的一个点，两点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 间的距离为 $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{\frac{1}{2}}$，不难得出 n 维空间中超平面、超球面等的方程以及其他几何关系.

格拉斯曼在 1844 年发表《线性延量论》(*Die lineale Ausdebungslebre*)，内容晦涩，不易理解，影响不大. 1862 年他又出版修订版，称之为《延量论》，改进了原来的论述，但仍然不大清楚. 直到汉克尔在 1867 年出版的《复数及其函数讲义》中谈到"交错数"，它就是格拉斯曼的"延量"，这时人们才对格拉斯曼的思想有进一步的理解. 格拉斯曼的思想是从哲学出发的，目的是建立一种"普遍的形式学说"，它可以成为所有数学的基础. 他比形式的推广有远为丰富的内容，他的"延量"实际上是 n 维向量，而且空间也不局限于度量空间，首先是 n 维仿射空间. 更重要的是，他的延量不仅有加法及数量乘法，他还定义了内积及外积，并指出其几何意义，如三个三维延量 α, β, γ 构成的平行六面体的体积 $= [\alpha\,\beta]\gamma$. 1855 年他进一步考虑高阶乘积，给出 16 种不同类的乘积，并指出它们的几何意义. 这些乘积在力学、磁学、结晶学上都有应用. 他的一些乘积实际上就是后来的张量. 在研究实际问题时，圣维南(Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, 1797—1886)在 1845 年，奥布林在 1847 年，柯西在 1853 年也独

立发现外积.格拉斯曼的发现后来逐步被吸收到代数学中去,而几何学只用到他的与向量、张量有关的概念及算法.格拉斯曼的几何演算的传播经历了较长的时期.大约在1860年左右,才有少数数学家理解格拉斯曼的工作,并加以传播和发展.其中包括哈密尔顿、莫比乌斯、圣维南、克雷莫纳和贝拉维蒂斯(Giusto Bellavitis, 1803—1880)等.而传播最力者是施莱格尔(Victor Schlegel,1843—1905),他从1872年到1885年写了4本著作,直接推动了向量分析的普及.

向量分析首先是英国伟大的物理学家及数学家麦克斯韦在1871年引进的.他引进梯度、散度、旋度等概念,得出一些基本公式,但他没有能够同四元数彻底决裂,形成独立的向量代数及分析体系.直到19世纪80年代,美国物理学家吉布斯及英国物理学家亥维塞德(Oliver Heaviside,1850—1925)才独立地做到这点.吉布斯在他的小册子《向量分析基础》(*Elements of Vector Analysis*)(1881,1884)中指出,他同格拉斯曼的联系要比哈密尔顿更加紧密.亥维塞德在他的三卷著作《电磁理论》(*Electromagnetic Theory*)(1893,1899,1912)中,自由应用向量分析系统叙述向量方法,并且第一次将麦克斯韦方程写成向量形式.19世纪90年代,以英国数学家台特为首的用四元数派与用向量派进行了多次论战.由于物理学家及工程师欢迎向量分析,到20世纪初,向量分析已成为他们的基本工具.吉布斯在1901年出版的《向量分析》(*Vector Analysis*)一书成为这方面的经典著作.向量分析在力学、物理学、晶体学、电工学等各个领域得到了广泛的应用.另外在数学方面,向量代数及向量分析也被用于微分几何及分析的各个领域,其几何形象——向量空间也被推广到无穷维情形,从而构成现代泛函分析的基础.

对于三维空间,向量分析中的基本概念,如梯度

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

散度

$$\nabla \circ \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z},$$

旋度

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

及它们之间的关系,早已建立起来,但是只有在向量分析广泛使用之后,许多定理才得到漂亮的简化形式.

上面谈到的形式的 n 维空间几何学在英国为凯雷、西尔维斯特及克利福德所发展.瑞士数学家施累夫利从 1852 年起对于 n 维多面体得出重要结果,作为正多边形及正多面体的推广,提出了正多胞形,高维多胞形理论至今仍是重要的研究领域.古代已知五种闭凸正多面体,被称为柏拉图多面体,即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体.施累夫利得出 4 维及 4 维以上的所有正多胞形.4 维欧氏空间的正多胞形共有 6 种,列表如下:

4 维正多胞形	**其 3 维面种类**	**其 3 维面个数**	**顶点数**
正五胞形	正四面体	5	5
正八胞形	正六面体	8	16
正十六胞形	正四面体	16	8
正二十四胞形	正八面体	24	24
正一百二十胞形	正十二面体	120	600
正六百胞形	正四面体	600	120

5 维及 5 维以上欧氏空间的正多胞形,对于每一维数 $n(n \geq 5)$,

只有 3 种,它们是正 $n+1$ 胞形(以低一维的正 n 胞形为面,共有 $n+1$ 个顶点),正 $2n$ 胞形(以低一维的正 $2n-2$ 胞形为面,共有 2^n 个顶点),正 2^n 胞形(以低一维的正 n 胞形为面,共有 $2n$ 个顶点).

5.2 黎曼

黎曼,1826 年 9 月 17 日生于德国汉诺威的布雷斯塞伦茨.他的父亲是路德教牧师,母亲是法官的女儿,他们共有 6 个孩子(二男四女),黎曼排行第二.由于家庭生活困难,他们都营养不良,身体虚弱,这导致几个子女夭亡,他们的母亲在他们长大成人之前就去世了.

黎曼还是小孩子的时候,他的父亲就把家搬到奎克博恩的牧师管区去,这时黎曼从他父亲那里受到入门教育,从一开始就表现出如饥似渴的学习欲望.他最早的兴趣是在波兰历史方面,刚刚 5 岁,就要父亲一遍又一遍地讲述这个英雄国家的悲壮故事.大约 6 岁时,他开始学习算术,他天生的数学才能便显露出来,他不仅解决了所有留给他的问题,而且提出更多的难题来捉弄他的兄弟姐妹.10 岁时,他跟着一位职业教师学习更高级的算术和几何,而学生很快就超过老师,他往往得出更好的解答.14 岁时,黎曼到汉诺威同他的祖母一起住,进入当地的文科中学学习.两年后,他的祖母去世,黎曼又转到吕耐博格的预科中学,他在这里一直学习到 19 岁.

文科中学校长施马尔夫斯(C. Schmalfuss)早已观察到黎曼的数学才能,曾把他的私人藏书借给黎曼,而且允许他不去听数学课.在施马尔夫斯的建议下,黎曼借走勒让德的《数论》,这是一本 859 页的书.6 天之后,黎曼归还了这本书.他很快掌握了

这本书,这无疑就是黎曼对于素数的兴趣的来源.他还通过研究欧拉的著作而掌握微积分及其各个分支.

1846年春,19岁的黎曼在格廷根大学注册为专修语言和神学的学生,他也去听数学及物理课程,如斯特恩关于方程论和定积分的课、高斯关于最小二乘法的课以及哥德什密特(C.B. Goldschmidt)关于地磁学的课.不久,父亲就同意他专攻数学. 1847年春,黎曼转到柏林大学,他从雅可比、狄利克雷、史坦纳、爱森斯坦那里受教育,从而进入新的、活生生的数学领域.他从这几位大师那里学到了许多东西.他从雅可比那里学习高等力学和高等代数,从狄利克雷那里学习数论和分析,从史坦纳那里学习近世几何学,而从只比他大3岁的爱森斯坦那里学习椭圆函数.这时他钻研过柯西等人的著作,已经得出单复变函数以及柯西—黎曼方程的概念.黎曼在柏林上了两年大学,在1848年政治动乱之际,他参加保王的学生联合会的活动,而且参加累人的16小时轮流值班来保护王宫中惊恐不安的国王.1849年春,他回到格廷根去完成他的数学学业,并准备取得博士学位.

他在格廷根大学又念了三个学期,他听哲学课并且非常有兴趣地上W·韦伯的实验物理课.他热衷于研究赫尔巴特的哲学结果.黎曼在1850年得出结论:"能够建立起一套完备的、周密的数学理论,它包括从单个质点的基本定律进而到现实连续充实的空间中我们所见到的过程,不管是引力、电磁还是热学的."这表明,黎曼反对物理中的"超距"作用理论,而赞成场论. 1850年秋,他参加了刚刚由W·韦伯、乌尔利希(Georg Karl Justus Ulrich, 1798—1879)、斯特恩、李斯亭(Johann Benedikt Listing, 1808—1882)发起的数学物理学讨论班.在这个讨论班上,由于所做的物理实验耗费了许多时间,耽误了他写博士论文.但是李

斯亭的拓扑思想无疑对黎曼有着巨大影响.李斯亭在高斯的影响下于1848年出版的《拓扑学初步研究》(*Vorstudien fur Topologie*)是这方面的第一部著作.

1851年11月初,黎曼在高斯的指导下提交他的博士论文《单复变函数一般理论基础》(*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer Veranderlichen Complexen Grösse*),同年12月10日通过答辩取得博士学位.高斯对黎曼的博士论文的评论是:"黎曼先生提交的博士论文提供了可信的证据,说明作者在他的论文中对论述主题的大部分进行了充分、完全和深入的研究,显示出一个具有创造性的、活跃的、真正数学的头脑以及了不起的富有成果的创造性.文章清楚、简洁,有的地方很漂亮,大多数读者将会喜欢这个更清楚的安排,它不仅符合博士论文所要求的各项标准,而且远远超出了它们."

取得博士学位后,黎曼没有积极谋取格廷根观象台助手的空缺,而是进一步去取得讲师资格,为此,黎曼计划提交一篇关于三角级数(傅立叶级数)的论文.1852年秋,狄利克雷来到格廷根度假,使黎曼受益匪浅.黎曼就自己的论文征求狄利克雷的意见,黎曼写道:"狄利克雷和我在一起谈了两个小时,他把他的笔记给了我,而这正是我准备就职论文所需要的,否则就要在图书馆花费大量时间进行艰苦的研究才能得到这些.他还和我一起通读我的论文,对我非常友好.考虑到我们之间地位的巨大差异,这是我根本不敢想像的.我希望他以后还能记得我."1853年,他又热衷于考虑数学物理问题,这耽误了论文的写作,直到年底,他才完成了讲师资格论文.

在黎曼取得他所谋求的无薪讲师职位之前,他还必须通过一次试验性的演讲.黎曼给系里提供了三个题目,他原本希望他

们选择前面两个题目中的一个,因为这两个题目他已经有所准备,他还提出了第三个题目——几何学基础.这个题目是高斯已经考虑了 6 年之久的问题,而且黎曼也没有什么准备.而高斯却指定了第三个题目.黎曼的讲演《论作为几何基础的假设》(*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*)不仅是整个数学中一篇伟大的杰作,而且在表述上也是一个典范.高斯特别兴奋,他感到黎曼的结果远远超过了他的预料.高斯在从系里的讲演会回来时,向 W·韦伯表达了他对黎曼所提出的思想的高度评价,他在谈话时所带有的热情对高斯本人来说是十分罕见的.

1854 年夏,黎曼取得讲师资格后,回家乡奎克博恩稍事休息,同年 9 月回到了格廷根,在德国自然科学家及医师协会第 31 届年会上,他发表了一篇仓促准备的讲演(熬了大半夜写成一个简短的提纲),内容是关于电在非导体中的分布规律的.同时,他继续进行关于电的数学理论的研究,并完成一篇关于诺比里色环的论文,这是他最早公开发表的两篇论文.他第一次开课,题目是"偏微分方程及其在物理学上的应用",有 8 个学生来听他的课,使他非常高兴.他也逐渐改变了害羞的毛病,能够更好地讲课.

1855 年初高斯去世,狄利克雷继承了高斯的职位.他试图帮助黎曼获得副教授的职位,但没有成功,不过黎曼可以得到 200 塔勒的年薪.1857 年,黎曼终于获得副教授的职位,年薪 300 塔勒.1859 年 5 月,狄利克雷去世,黎曼成了狄利克雷的继任者,经济状况才有所改善.

1855—1856 年冬季学期,黎曼开了一门全新的阿贝尔函数论课程,听讲者只有 3 位,其中之一是戴德金.1857 年黎曼发表了他最有创见的论文《关于阿贝尔函数理论》.大约同时,他发表

了关于超几何级数的论文及其摘要.1856—1857年冬季学期,他开的复变函数论课程中也涉及超几何级数,特别是常微分方程的所谓黎曼—希尔伯特问题.1859年8月,他被选为柏林科学院通讯院士,9月同戴德金一起去柏林,受到外尔斯特拉斯等人的热情接待.同年10月黎曼把他关于ζ函数的数论论文提交柏林科学院.11月他在格廷根科学会上宣读了关于空气柱中不连续波的传播的论文,这是历史上激波理论的第一篇论文.同年12月他被格廷根科学会接纳为正式会员(相当于后来的科学院院士).1860年复活节假期,黎曼到巴黎访问一个月,受到法国数学家埃尔米特等人的友好接待.当时巴黎科学院已设置大奖(1858),提出的问题是热传导问题.为此,黎曼继续他1854年演讲的研究,对黎曼几何学进一步加以发展.1861年6月,他写成拉丁文的论文呈交巴黎科学院,这篇论文后来被称为“巴黎之作”.但是因为他的文章过于简略,而且没有把必要的计算完全写出来,因此没有获奖(也没有别人获奖,最后巴黎科学院于1868年撤销了这个大奖).1861年他关于平衡椭球形流体的运动的论文发表.

1862年,36岁的黎曼结婚了.他的妻子爱丽丝·科赫(Elise Koch)是他妹妹的朋友.结婚后还不到一个月,黎曼在1862年7月得了肋膜炎,由于康复得不完全,结果染上肺结核.他的有影响的朋友劝说政府给黎曼一笔钱,让他到气候温和的意大利去休养,于是他到意大利过了这个冬天.次年春天,他在返回德国的旅程中受了风寒.1863年8月,他回到意大利,先在比萨停留,他的女儿伊达(Eda,随他的姐姐命名)出生了.这年冬天格外寒冷,阿诺河也结了冰.1864年5月,他移居到比萨郊外的一个小镇上,在这里,他的妹妹海伦去世.他自己的病由于并发黄疸

症而发展得越来越严重,使他非常遗憾的是,他被迫拒绝比萨大学提供给他的教授职位.格廷根大学慷慨地延长他的休假期,以使他能在比萨度过下一个冬天.在比萨,他被意大利数学界的朋友所包围.意大利数学家贝蒂、布廖斯奇及卡索拉蒂在1858年访问格廷根时就结识了黎曼,在黎曼等人的影响下,意大利现代数学得到了复兴.这时黎曼的病情进一步恶化,他非常想家.在莱格豪恩和热那亚谋求恢复健康未成之后,他在10月份回到了格廷根,在那里度过了冬季.整个这段时期,一旦他的体力许可,他就进行研究工作.1865年黎曼发表了生前最后一篇论文《关于θ函数的零点》(*Über das Verschwinden der Theta-Functionen*).为了恢复他的体力,黎曼再次来到意大利,他最后的日子是在大湖畔的谢拉斯卡的别墅中度过的.1866年7月20日黎曼去世,被安葬在比甘左勒公墓.

在黎曼去世之前,他又得到一系列荣誉.1866年3月他被选为柏林科学院国外院士(因当时德国尚未统一,柏林科学院属普鲁士王国,而黎曼所在的格廷根属汉诺威王国),同时被选为巴黎科学院通讯院士,1866年7月14日被选为英国皇家学会国外会员.

黎曼的著作不多,生前除了博士论文之外,只发表了10篇论文.在黎曼去世之后,戴德金接手他的全集的编辑工作,戴德金在1868年发表了黎曼的就职演说、就职论文等3篇文章,连同另外4篇文章一共18篇论文是黎曼正式发表的全部论文.这18篇论文连同12篇遗稿由戴德金及H·韦伯编辑,作为《黎曼全集》(*Bernhard Riemann Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*)于1876年出版,后来加进一些遗稿并补充一些遗稿内容于1892年出版《黎曼全集》第二版,这是由H·

韦伯单独编辑的.1902年,M·诺特和维尔廷格编辑出版《黎曼全集·附录》(*Gesammelte mathematische Werke Nachträge*),其中收进3份讲演及一些数学注记.1892年版及1902年版合订本于1953年再版.1990年纳拉西姆汉(Narasimhan)编辑出版《黎曼全集》最新版本,除了1892年版及1902年版的全部内容外,还加进一些新材料及十几篇研究论文和资料.黎曼讲课的笔记已有多种出版,但有的很难说是对黎曼讲课的忠实记录.

5.3 黎曼几何

黎曼的空间观念对数学及物理学造成了空前的变革,但是这种先进的思想直到半个多世纪之后才逐渐变得明显起来.黎曼的几何论文有两篇,一篇是他获得授课资格的演讲,另一篇是所谓"巴黎之作",他在这两篇论文中的思想后来为许多数学家所发展.

(1)黎曼的空间观念.

黎曼的演讲是面对整个哲学系的教师的,为了使听众理解,整个讲演充满哲学味道,没有太专门的数学,通篇只有一个数学公式.黎曼在讲演中提到他受到两方面的影响:一是高斯关于曲面的研究;二是赫尔巴特的哲学思想.全文共分三大部分:第一部分是 n 维流形的观念;第二部分是 n 维流形的测度关系;第三部分是对空间的应用.

黎曼首先引进 n 维流形的概念.他的 n 维流形实际上是 n 重延量.他把流形的部分称为量子,把流形分为连续流形和离散流形,他的重要思想是把连续流形的理论区分为两类,一类只涉及区域关系,另一类涉及大小关系,用现代术语来讲,前者是拓扑的理论,后者是度量的理论.康德认为空间是先验的概念,黎

曼不同意这种观点,他认为如果空间是先验的,那也只是空间的拓扑部分,至于空间的度量则必须由经验确定.黎曼所提到的空间的构造,其造法与现代定义不同.他造的 $n+1$ 维流形是通过 n 维流形同一维流形递归而构造出来的.反过来,低维流形可以通过高维流形固定某些数量简缩而成.

黎曼的空间观念发展了高斯内蕴几何学的思想,流形不依赖于外围空间,它本身可以是弯曲的,因此每一点的局部度量不一定相同.为了刻画局部度量,黎曼选择最简单的度量

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

其中 $|g_{ij}|$ 是正定对称二次型,具有这种度量的流形或空间,后来被称为黎曼流形或黎曼空间.但黎曼指出,高阶度量也是容许的,因此,他从某种意义上预示了芬斯拉(Paul Finsler,1894—1970)空间.如果流形的线元平方为

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i^2,$$

他称之为平坦的.在 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个独立变量中,n 个变量决定其位置,另外 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个变量决定流形的度量关系.因此,如果每一点在 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个独立的曲面方向上的曲率给定之后,这流形的度量关系就完全确定了.假如每一点在每个方向上的曲率都相同,等于 α,那么这个常曲率流形的线元可表示为

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum\mathrm{d}x^2}.$$

这就是黎曼在就职演说中惟一提到的公式.特别地,当常曲率流形的曲率为0时,可得出平坦流形,即与欧氏空间局部等度量.

黎曼的就职演说的第三部分涉及我们所在的三维空间,实际上是三维流形.首先他给出空间为局部欧氏的三个条件.由于空间即使为局部欧氏的(平坦的),我们也可以赋予它不同的度量,因此我们不可能期望只从拓扑的考虑中得出欧氏平行定理.空间的度量必须由实验来确定.黎曼认为天文学将判定哪种几何学适合我们这个物理空间,数学家所能做的只是分析我们的基础假定是什么.黎曼还明确指出,空间的无界性比我们对外在世界的其他经验有着更大的经验确定性.他认为,作为现实基础的空间或者是离散流形,或者是连续流形.如果是这样,度量关系的基础必须从外界通过作用其上的结合力得到.判别这点,则是物理学而非数学的事.最后,他暗示了他的空间的非欧性.

(2)黎曼几何学.

在 1854 年的就职论文中,黎曼已经建立了黎曼空间的几何学(即黎曼几何学)的基础.他给出黎曼度量,提出截面曲率的概念.在所有这些曲率中,可以由$\frac{n(n-1)}{2}$个推得其余,他还引进常曲率空间的概念,并给出常曲率空间的黎曼度量.在巴黎之作的第二部分,黎曼研究了下列问题:在什么情况下,$\sum\limits_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j$ 可以变成已知形式 $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$,其中 a_{ij}是给定的常数系数.他引进了 Γ_{ij}^k以及(ij,kl),此即相当于(略有不同)后来所谓克里斯托菲尔记号及黎曼曲率张量的分量.他给出一个二次微分变成另一个的必要条件,并用(ij,kl)来表示.他还给出 $\mathrm{d}s^2$ 可变成常系数的条件.

5.4 张量分析

1869 年克里斯托菲尔把 1868 年黎曼发表的论文推广到 n

维,由于黎曼的巴黎之作当时并未发表,他独立得到黎曼的大部分结果,并开拓了张量分析的新领域.

克里斯托菲尔也考虑黎曼流形的两个局部参数系 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 及 $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \cdots, \overline{u_n}$,他研究变换方程

$$\overline{u_i} = \varphi_i(u_1, u_2, \cdots, u_n),$$

它具有非零函数行列式

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\alpha}\right| \neq 0,$$

其中 $i, \alpha = 1, 2, \cdots, n$,那么何时使

$$ds^2 = \sum g_{ij} du_i du_j,$$

$$d\overline{s^2} = \sum \overline{g_{ij}} d\overline{u_i} d\overline{u_j}$$

相等? 他得出基本度量张量 g_{ij} 的变换公式

$$g_{\overline{ik}} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \overline{u_i}} \frac{\partial u_\beta}{\partial \overline{u_k}},$$

其中 $i, k, \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n$. 他引入第一类及第二类克里斯托菲尔符号 $\left[{ik \atop j}\right]$, $\left\{{ik \atop j}\right\}$,现在用 $\Gamma_{ij,k}$ 及 Γ_{ij}^k 表示,其中

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right),$$

并得出它们的变换公式,而且通过计算三阶导数

$$\frac{\partial^3 u_\lambda}{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_k} \partial \overline{u_j}},$$

再依据求偏导顺序可交换规则得出黎曼—克里斯托菲尔曲率张量

$$R_{k,lm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial u_l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial u_m} - \Gamma_{lr}^i \Gamma_{km}^r - \Gamma_{mr}^i \Gamma_{kl}^r,$$

从而证明对应曲率相等是度量张量对应相等的条件. 他的这篇

论文实际上系统地预示了后来的绝对微分法与黎曼几何的主要内容.同时李普希茨也发表了一系列论文,得到大致相同的结果.

把这一套技术脱离开几何内容单纯抽出来,就形成现在所说的张量分析,它是由里奇在1887年开始建立的.里奇不考虑微分形式而直接处理张量及其分量,提出协变及反变张量的区分,并且系统得出求协变导数的方法.他称之为绝对微分法.1892年里奇发表一个系统报告,指出张量分析在微分几何学及物理学中的应用.1901年里奇和他的学生列维-奇维塔写出著名的总结性论文《绝对微分法及其应用》,使得算法系统十分明确.不过这个算法十分繁复,只有少数人才能理解并应用它.正是由于爱因斯坦在创立广义相对论时,发现它正好是表达自己的物理观点的工具,特别是张量作为向量的推广,是表达物理量的不可少的记号,从此用向量分析、张量分析的名称代替老的绝对微分法而大行其道.

到20世纪,几何学研究的重点是高维的微分流形,目标也由局部性质逐步过渡到整体性质,特别是度量性质与拓扑性质之间的关系.在技术上也逐步由局部的张量分析过渡到外微分形式等整体表示.近半个世纪,几何学研究进入了一个新时代.

第 14 章　通向交换代数的诸理论

本章是全书最长的一章.本章的内容在一般的著作中分属于数论、代数、几何及分析四个互不相干的数学领域,但是从发展上看,它们经过上百年的进步,逐步形成一种共同的代数结构——交换代数.现代抽象的交换代数学已经看不到这些具体的背景,可是,作为数学史的著作,应该提供统一的思想.从历史上看,代数数论中的惟一分解定理、理想、模等提供了交换代数学最早的框架,而 E·诺特的戴德金环则完全是代数整数环的抽象.戴德金及克洛耐克不约而同地认识到数域与函数域的相似性,后者从中发展了除子的观念,它直接引向赋值论.代数几何学最原始的公共零点由希尔伯特以不变式论的外衣,形成诺特环的基础理论,反过来,交换代数学为代数几何学提供了有力的工具及广阔的前景,两者之间的界限现在已经逐步消失,融入数学中最前沿的领域,在理论及应用方面起着核心的作用.

1　代数数论

正整数是数学,特别是数论最自然的研究对象.经历或长或短的时期之后,零、负整数及有理数也加入其中.1801 年高斯的《算术研究》的出版,标志着"初等"数论的成熟及系统化:加法数

论中的一个基本定理——四平方和定理,导致二次型理论的研究;乘法数论的基本定理——惟一因子分解定理的证明,导致同余理论的系统阐述;以及二次互反律的证明及推广.这两条研究路线都导致不自然的数——代数整数的产生.在当时,数学家对于新的对象并不欢迎,除非它证明自己有独立存在的价值.第三条研究路线——费尔马大定理的求证,再次引出另一种代数整数——分圆整数,而且发现它具有通常整数所没有的性质——惟一因子分解定理不一定成立.库默尔为了推广二次互反律而建立理想因子理论,但他无意把它推广到一般的代数整数上.因此,建立代数数理论的工作历史地落在戴德金及克洛耐克身上.

如果说 1831 年高斯第一个引进了代数整数这个新对象,那么 1871 年戴德金第一个建立了与通常数论不同的新理论——代数数论.虽然代数数论的问题来自通常的数论(加法理论、乘法理论、丢番图方程理论)以及分析(椭圆函数论),但是,它的理论已不完全是对象理论而是结构理论,也就是它研究某种代数数集合的整体性质.

所谓代数数是指满足整系数多项式方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

的根.而当 $a_0 = 1$ 时,其根被称为代数整数.显然,代数整数与代数数有着类似于通常整数与有理数的关系,但是代数数论主要不是研究它们的特殊数论性质,而是研究整体结构.正如有理数的全体构成域,其中整数构成环一样,满足方程(1)的代数数构成域,而其中代数整数构成环,我们的主要目标是研究其结构,特别是整数环中的理想及素理想的结构.它们的第一个不变量是理想的类数 h,从某种意义上来讲,它度量代数整数对惟一因子分解定理的偏离程度(若 $h = 1$,则惟一因子分解定理成立).

时至今日,计算类数仍是老大难的问题.

代数数论的发展大致经历了下面几个阶段:

(1)史前时期(1830 年之前).代数数论是隐含在二次互反律和二元二次型理论当中的,在本书中参见第 12 章“数论”.

(2)代数整数论时期(1831—1871).1831 年高斯引进代数数论的对象——代数整数,并研究其数论性质;1845 年,库默尔引进分圆整数,建立理想因子理论.

(3)代数数论的建立(1871—1895).主要是戴德金在编辑狄利克雷的《数论讲义》(*Vorlesungen uber Zahlentheorie*)时,在第二版(1871)的附录 X 中正式建立代数数理论,在第四版(1894)中建立系统的代数数理论以及理想理论.

(4)类域论(1895—1930).一开始类域论是研究代数数域,首先是有理数域、二次数域等的阿贝尔扩张问题,它来源于克洛耐克的主要猜想(即有理数域 Q 的任何有限次阿贝尔扩张都包含在分圆域中)及其推广——青春之梦.克洛耐克的主要猜想在 1886 年由 H·韦伯证明之后,H·韦伯于 1891 年提出“类域”的概念,后来他和希尔伯特提出更一般的概念.类域论是把代数数论的特殊成果推广到一般情形.希尔伯特提出的一系列基本定理,都在 20 世纪最初的 30 年中陆续得到证明,特别是阿廷在 1927 年证明一般互反律之后,经典类域论可以说大功告成.

(5)代数数论及类域论的简化、发展及推广阶段(1930—1970).这是一个多样性时期,不仅表现在方法上,也表现在把类域论推广到更一般的域上.首先是 1930 年类域论被推广到局部域及有限单变元函数域上.其后,由于引进伊德尔(Idele)而使类域论算术化.1950 年引进群的上同调方法,构成推广的基础.

(6)朗兰兹纲领.1970 年朗兰兹(Robert Langlands,1936—　)

把代数数论与群表示论联系起来，从而把代数数论纳入更大的框架之内，不过这个伟大建筑才刚刚开始，许多猜想还有待证明.

1.1 早期的代数数论

第一个严格引入代数整数概念的是高斯，这与他在 1828—1832 年研究四次互反律有关. 为了推广二次互反律，他感到有必要把原来的有理整数概念加以推广，而建立一种全新的整数概念，即形如

$$a + b\mathrm{i}$$

的“数”，其中 a, b 是通常的有理整数，i 是 $x^2+1=0$ 的根. 他称这种数为复数（Complexen Zahlen），为了与通常的复数区别开，我们这里称之为复整数. 高斯对于复整数引进加法、减法及乘法，发现它们也具有通常有理整数的性质，只是有理整数的“单位”为 $+1$ 及 -1，现在变成 4 个，即 $+1, -1, +\mathrm{i}, -\mathrm{i}$. 如果两数相差一个单位因子，则称之为相伴，在分解因子时可不加区别. 高斯的重要贡献在于他把通常整数的惟一因子分解定理推广到复整数上，从而开辟了代数数论的新领域. 为此，他对每个复整数 $\alpha = a + b\mathrm{i}$ 引进一个范数

$$N\alpha = (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i}) = a^2 + b^2,$$

从而可推出

$$N\alpha\beta = N\alpha \cdot N\beta.$$

然后他定义素数：如果一个复整数不是单位，也不能表为两个非单位复整数的乘积，他称这个复整数为素数. 由这个定义，虽然通常的合数仍然是合数，但通常的素数不一定仍是素数，例如

$$2 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}),$$

$$5=(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}).$$

更一般地讲，$4n+1$ 型素数 p 都不再是素数，因为

$$p=m^2+n^2=(m+n\mathrm{i})(m-n\mathrm{i}).$$

另一方面，高斯证明，$4n+3$ 型素数在复整数中仍是素数，他证明下述定理：

$a+b\mathrm{i}(a\neq 0, b\neq 0)$ 是素数当且仅当其范数是素数或 $4n+3$ 型素数的平方.

然后他对复整数引进欧几里得算法并证明惟一因子分解定理，还部分证明四次互反律. 因此，他意识到他的理论开辟了无限广阔的前景. 他说，"这个理论，从某种意义上来讲，是高等算术的无限推广"，"我们必定可以从算术领域的扩张中找到一般理论的天然宝藏". 他充分意识到，通过复数可以得出通常整数的许多结果，而这是用通常方法所办不到的. 例如，他注意到三次互反律与 $a+b\rho$ 型整数的数论有关，其中 $\rho^3=1, \rho\neq 1$.

正是因为"复数"如此有用，长期以来便用它称呼一般的代数整数，甚至对 $m+n\sqrt{D}$ 型的代数整数 $(D>0)$ 也不例外.

19 世纪 40 年代，狄利克雷、爱森斯坦及埃尔米特独立地推广高斯复数成一般的 n 次代数整数，即 n 次多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为有理整数. 爱森斯坦还注意到，有必要证明代数整数的和、差、积仍是代数整数. 这样，代数数论的对象正式得到确认.

仿照通常整数及复整数的理论，代数数论的基本定理也应该是惟一因子分解的问题. 为此，首先要定义单位，其次要定义素数，然后再研究惟一因子分解的问题.

单位理论的特殊情形先是由爱森斯坦在 1844 年对三次代

数整数,克洛耐克在 1845 年对分圆整数,以及埃尔米特对更一般情形给出的,但是 1846 年狄利克雷最终建立了完整的一般代数整数单位理论.

设 θ 为 n 次代数整数

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (2)$$

的根,$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 为 $f(x)=0$ 的 n 个根,则形如

$$\varphi(\theta)=b_0+b_1\theta+\cdots+b_{n-1}\theta^{n-1} \quad (b_i \text{ 为有理整数})$$

的复整数被称为单位,如果

$$\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)\cdots\varphi(\theta_n)=1.$$

假如方程(2)有 r_1 个实根,r_2 对共轭复根,$r=r_1+r_2-1$,则单位均可表成

$$\varepsilon_i e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_r^{m_r}, \quad i=1,2,\cdots,r$$

的形式,其中 ε_i 是单位根,$m_1,\cdots,m_r$ 是非负整数,$e_1,\cdots,e_r$ 被称为基本单位.但是对于具体的代数整数,明显造出单位决非易事.对于二次代数整数,这需要求解配尔方程;对于高次代数整数,就更加困难.直到最近,它们都是代数数论研究的一个课题.

在代数数论产生之前,高斯的二元二次型理论实际上已是二次代数整数的代数数论,至于个别的代数整数,欧拉及狄利克雷在证明费尔马大定理的特殊情形时都用到过.但一般的二次代数整数最早是由狄利克雷在 1832 年首先引进的,当时他只是考虑形如 $t+u\sqrt{a}$的代数整数,其中 a 无平方因子,t,u 是通常整数,他当时并没有意识到它们与高斯复整数有多大区别.狄利克雷对代数数论的另一项重大贡献是于 1838—1839 年给出二次域 K 的类数公式,不过他同高斯一样,是用二次型的语言来表述的:

$$h(d)=\begin{cases}-\dfrac{w}{2|d|}\sum\limits_{x=1}^{|d|}\left(\dfrac{d}{x}\right)x, & d<0;\\ -\dfrac{1}{\log\varepsilon}\sum\limits_{0<x<\frac{d}{2}}\left(\dfrac{d}{x}\right)\log\left(\sin\dfrac{\pi x}{d}\right), & d>0,\end{cases}$$

其中 d 为二次域 K 的判别式，w 是 K 中包含单位根的个数，$h(d)$为 K的类数，$\varepsilon>1$ 表示 $d>0$ 时 K 的基本单位.

1844 年，库默尔引进另一类重要的特殊代数数——分圆数 ζ，它们是分圆多项式

$$\Phi(x)=x^{\lambda-1}+x^{\lambda-2}+\cdots+x+1=0$$

的根，其中 λ 是素数. 他研究分圆整数

$$\varphi(\zeta)=b_0+b_1\zeta+\cdots+b_{\lambda-2}\zeta^{\lambda-2},\quad b_i\in\mathrm{Z}$$

时注意到，这种形式的素数与通常的素数不同，通常的素数 p 满足下列两个条件：

①它们不能表示成两个非单位的因子之积；

②如果 p 整除 ab，则 p 整除 a 或 b.

库默尔发现，分圆整数具有性质①，但不一定具有性质②. 为了挽救这种惟一因子分解定理失败的情况，他引进“一种新的复数，我称之为理想复数”. 他的论文于 1846 年在柏林科学院的一次会议上宣读，1847 年发表. 1847 年他还发表另外两篇论文详细叙述他的理论. 1856 年他把他的理论推广到任意分圆域(即 λ 不一定是素数)，1859 年又推广到库默尔扩张.

库默尔理论有两个最伟大的创造性思想：

(1)为了分解分圆整数，只需分解通常的素数；而分解通常的素数，只需研究 $\Phi(x)\bmod p$ 的分解. 库默尔证明：如果 $p=m\lambda+1$，则 $\Phi(x)\bmod p$ 可分解成线性因子，即

$$\Phi(x)=\prod_{k=1}^{\lambda-1}(x-u_k).$$

在这种情况下,他假设素数 p 有如下的分解

$$p = p_1p_2\cdots p_{\lambda-1},$$

其中因子 p_i 或是真正的或是理想的.

设 p 满足 $p^f \equiv 1(\bmod \lambda)$,当 $k<f$ 时,$p^k \not\equiv 1(\bmod \lambda)$,且 $ef=\lambda-1$,库默尔引进

$$\Phi_e(y)=(y-\eta_0)(y-\eta_1)\cdots(y-\eta_{e-1}),$$

$$\Phi_e(y)=\prod_{k=0}^{e-1}(y-v_k)(\bmod p).$$

仿照前面的作法,他得出

$$p = p_0p_1\cdots p_{e-1},$$

而这些 p_i 是所有的素理想因子.

(2)对于 p 的每个素因子引进局部单值化元素,这实际上是后来的赋值.这样他得到分圆整数的可除性理论,并且证明惟一理想因子分解定理.

库默尔还定义理想因子的等价关系,并且在这种等价关系下把理想因子分成等价类,而且证明理想因子的类数是有限的.对于每一类,他都找到一个元素,其范数最小,并且算出类数.在这些方面,拉格朗日及高斯关于二次型的理论为他提供了样板.

这样,他只差一步就走进抽象代数的大门,这要等戴德金的理想理论和克洛耐克的除子理论来完成.库默尔始终把理想因子看成"数",而没能把它们区别开.他证明,理想因子的适当有限次幂总是一个"复数".因此,他无法构造出一般的代数数论,这个任务只有等戴德金去完成.

尽管如此,保守的库默尔运用他的分圆整数足以完成两大伟业:

①1847—1850年间,对所有正则素数证明费尔马大定理.

②1858—1864 年间，对素数指数表述并证明幂剩余互反律(最后论文于 1887 年发表).

1.2　戴德金的代数数论

到 1871 年之前，代数数论只不过是"代数整数"的乘法理论，而所谓代数整数是整系数多项式方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根 θ. 狄利克雷、爱森斯坦、柯西和库默尔都把代数整数写成

$$b_0 + b_1\theta + \cdots + b_{n-1}\theta^{n-1}, \tag{3}$$

其中所有 b_i 均为通常整数. 但是，代数整数是通常整数的推广. 整数不仅仅有加法、减法、乘法运算，而且，它们还相除(分母不为 0)产生有理数. 由 θ 和有理数经过加、减、乘、除之后，可以得出"代数有理数"，那么它们中间的"代数整数"是否完全具有(3)的形式呢? 戴德金在狄利克雷的《数论讲义》第二版(1871)附录 X 中第一次明确提出这个问题.

有趣的是，牛顿在他的《通用算术》(1707)一书中对于实二次代数整数，已完全解决这个问题. 设 D 为没有平方因子的正整数，则对于实二次代数整数，当 $D \equiv 2$ 或 3(mod 4)时，具有

$$m + n\sqrt{D}, \quad m, n \in \mathrm{Z}$$

的形式，但 $D \equiv 1 \pmod 4$ 时，整数具有

$$\frac{m + n\sqrt{D}}{2}$$

的形式，且 $m \equiv n \pmod 2$. 不过到 19 世纪，牛顿的著作早被人遗忘了.

从这个问题出发，戴德金建立了系统的代数数论，他的理论框架至今仍然被采用. 其主要特点有：

(1)对应于有理数、整数及素数,他建立起代数数论的三级结构.

(2)与以前的局部观点不同,他采用整体(或全局或大范围)观点,即主要考虑集合而不是数,这样,他得出代数数体、代数整数环、理想三级结构,并引入他的公理化方法,这些成为后来抽象代数中相应概念的出发点.

(3)他把数之间的关系(如被…整除,是…的倍数)系统地表为集合论的语言(如包含于…中),这样,数论的定理就成为数学结构的定理.

1.2.1 数体及代数整数理论

戴德金的观点是非常现代的,他所定义的体与现在的不同之处只是局限于复数域或实数域的子域,他通过扩张引进体,然后引入模(Module)的概念:对于一个实数系或复数系 A,其中数的和及差均属于 A 的被称为模.

如果 $\alpha-\beta\in A$,则戴德金记作

$$\alpha\equiv\beta(\bmod a).$$

对于自由 Z 模 m,以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为基,则定义 m 的判别式为

$$D(m)=\begin{vmatrix}\alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_1^{(n)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^{(1)} & \cdots & \alpha_n^{(n)}\end{vmatrix},$$

其中 $\alpha_i^{(j)}$ 表示 α_i 的共轭数. $D(m)$是有理数,不依赖于 m 的选取.一个代数数域 K 的代数整数全体构成环(他称之为 Ordnung)O_K,这时 $D(O_K)=D_K$,也被称为代数数域的判别式(他称之为基数 Grundzahl).戴德金证明的第一个重要定理是 K 中代

数整数环 O_K 的整基存在，也就是所有代数整数均可表为

$$h_1\omega_1 + \cdots + h_n\omega_n, \quad h_i \in \mathrm{Z},$$

戴德金称 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为基本系. 戴德金的重要发现是基本系不一定是代数数域的基，更不一定是形如 $1, \theta, \cdots, \theta^{n-1}$ 的幂基，换句话说，

$$b_0 + b_1\theta + \cdots + b_{n-1}\theta^{n-1}$$

不能像前人所考虑的那样穷尽所有代数数域中的代数整数，如果一定要这样表示的话，则有的代数整数的系数 b_i 可能是分数，例如对于某些实二次数域就是如此. 凑巧的是，当 p 是素数，ζ_p 是 p 次单位根时，$1, \zeta_p, \cdots, \zeta_p^{p-1}$ 正好是分圆数域中的分圆整数环的整基，因此库默尔的理论正好都对！

1.2.2　理想理论

戴德金把代数整数明确之后，开始建立理想理论. 戴德金知道，对于一般的代数整数来说，不可分解性与素性并不重合. 他举出简单的例子：在域 $Q(\sqrt{-5})$ 即由 $\sqrt{-5}$ 生成的代数数域中，

$$6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

$2, 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}$ 都是不可分解的数，但不是素数. 为此，他引进代数整数环 O 中理想 A 的概念：

①A 是模；

②A 中的数与 O 中的数的积仍属于 A.

如果理想 A 的每一元素可表为 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n$（其中 c_i 为 K 中的任意代数整数），则称 A 由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 生成，并表为 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. 如果 $n = 1$，即由一个整数生成的理想，被称为主理想. 对于理想可以定义乘法，若 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$，$B = (\beta_1, \cdots, \beta_q)$，则

$$AB = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \cdots, \alpha_i\beta_j, \cdots, \alpha_p\beta_q),$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q$. 然后他定义整除的概念:

如果 $B \subset A$,则称 A 被 B 整除,B 被称为 A 的因子.

戴德金证明,每个理想均只有有限多个因子,有理想的乘法中,主理想 $(1) = O$ 起着单位的作用. 这样他定义素理想 p 为只以 O 及 p 为因子的理想. 但是在 1871 年他还不能证明素理想有类似于素数的性质,即如果 $B \subset A$,则存在惟一素理想 C,使得 $A = BC$. 为了证明这点,他花了几年时间,并在狄利克雷的《数论讲义》第三版(1879)中发表. 由此他得出理想论基本定理:每个非单位的理想或是素理想,或可惟一表为素理想之积.

1.2.3 理想类数与戴德金 ζ 函数

戴德金对于代数整数环 O 中的理想引进一个等价关系. 对于两个理想 I, J,如果存在非零的代数整数 $a, b \in O$,使得 $aI = bJ$,那么 I, J 被称为等价的. 所有理想在这个等价关系之下被划分为等价类,而且等价类通过理想的乘法也可定义类的乘法. 戴德金证明,代数整数环的理想类构成有限阿贝尔群,这个群被称为该代数数域或代数整数环的类群,类群的阶数被称为类数 h. 戴德金还证明,对于二次域及分圆域,该类数 h 与狄利克雷算出的二元二次型类数和库默尔算出的分圆域类数相等. 为了计算一般代数数域的类数,他于 1877 年引进戴德金 ζ 函数

$$\zeta_K(s) = \sum \frac{1}{(N(a))^s} = \Pi \frac{1}{(1 - N(\beta))^{-s}}$$

(其中 $\sum$ 过代数数域 K 的所有理想 a,Π 过所有素理想 β,N 表示范数),并用它在极点 $s = 1$ 的留数来计算类数

$$\lim_{s \to 1+0} (s-1)\zeta_K(s) = gh,$$

其中 h 为域 K 的类数，g 为与域 K 有关的常数．这个公式是以后计算类数的基础．

用戴德金的理论同样也可以把狄利克雷的单位理论推广到代数整数环上，这时整数环的单位构成一个有限生成的阿贝尔群．至此，代数整数得到一个系统的理论．戴德金特别把自己的二次域理论与高斯—狄利克雷的二元二次型理论对应起来，同时把分圆域理论与库默尔理论对应，这样就成为上述理论完美而漂亮的推广．

代数数理论虽然建立起来，但是对于具体的域，计算问题并非易事．对代数整数环来讲，最主要的不变量是类数 h，它可以看成惟一因子分解定理的偏差．当 $h=1$ 时，惟一因子分解定理成立．高斯猜想，有无穷多实二次域具有类数 1．这个大问题尚未解决．高斯还猜想，对虚二次域 $Q(\sqrt{-d})$，随着 d 趋于无穷，$h(d)\to\infty$．这已于 1934 年被证明．但 $h=1$ 的虚二次域只有有限多个．这直到 1967 年才通过丢番图逼近法完全解决，总共只有 9 个，即 $Q(\sqrt{-d})$，$d=1,2,3,7,11,19,43,67,163$．对于虚二次域，1971 年证明共有 18 个域 $h=2$，1977 年证明共有 16 个域 $h=3$，共有 54 个域 $h=4$．1976 年哥德费尔德（Dorian. M. Goldfeld，1947—　）把求给定类数的虚二次域的问题归结为椭圆曲线的问题，1983 年格罗斯（Benedict. Gross，1950—　）和查基埃（Don. Zagier，1951—　）得出有效可计算的界，即

$$h(K)\geqslant C(\varepsilon)\log^{1-\varepsilon}|d(K)|,$$

其中 ε 为任意正数，$C(\varepsilon)$ 为有效可计算的常数，$d(K)$ 为具有类数 $h(K)$ 的域的判别式．由此，虚二次域问题原则上得到解决．

对于分圆域 K_m，如果 $m\not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$，所有类数 $h(K_m)=1$ 的分圆域已于1976年求出，而其他情形均十分困难．对于三次

域、四次域以及高次域的类数计算,也有大量文献.

值得注意的是,类数的计算只是第一步,其后计算类群更为复杂.同样,计算单位也是极为困难的问题.

1.2.4 相对扩张及非分支扩张

到此为止,代数整数的理论可以说相当完满.1882年,戴德金开始进一步推广他的理论.他认为用体或域的理论来表述代数整数的理论更为适宜.以前的代数数域都是在有理数域的基础上添加一些代数方程的根形成的,现在他考虑在代数数域 K 上再添加以 K 的元素为系数的代数方程的根所形成的扩张域 L,他称之为相对扩张.其中的基本问题是,K 的代数整数环 O_K 中的素理想 p,在 L 的代数整数环 O_L 上如何分解成其中素理想的乘积,即 $\beta_1^{e_1}\beta_2^{e_2}\cdots\beta_r^{e_r}$.如果 $e_i>1$,则称 β_i 是 p 上的分支理想,e_i 被称为分支指数.仿照1881年对于有理数域的考虑,他构造 L/K 的相对差积 $D_{L/K}$,并证明定理:

O_L 的素理想 β 在 $p\subset O_K$ 上分支当且仅当 $\beta\mid D_{L/K}$.

这样,相对扩张理论也得到很好的阐述.不过,戴德金的许多结果直到1932年才在其《全集》中发表.在此之前,希尔伯特率先在他的《数论报告》(*Zahlbericht*)(1897)中发表了相应的理论.

戴德金的代数整数论只是1870—1890年间三种理论中的一种,却是具有完满形式的一种.另外两种理论虽然并不成熟,但也为后来的发展开辟了新路线.

俄国数学家左洛塔廖夫是库默尔局部理论的继承者,1878年他对于每个素数 p 定义 p-整数.虽然他没有明确给出定义,但是与30年后德国数学家亨塞尔定义的 mod p 整数相同.

亨塞尔的定义如下:

有理数 $\alpha = m/n$ 被称为 mod p 整数,如果分母 n 不被 p 整除.

代数数 β 被称为 mod p 整数,如果它满足

$$\beta^m + B_1\beta^{m-1} + \cdots + B_m = 0,$$

其系数是有理数的 mod p 整数.

左洛塔廖夫证明,α 是 $Q(\theta)$中的整数当且仅当它对所有 p 均为 mod p 整数.然后他发展了 mod p 整数的算术理论,但他的理论只是亨塞尔大大发展的局部理论的一部分.

德国数学家克洛耐克发展了除子理论,它比戴德金的理论更为复杂、更为基本,对此已有系统的研究.我们在下节只介绍他的与类域论有关的工作.

1.3　类域论

前一阶段的代数数论,研究中心集中于代数整数及其构成的环上,也就是偏重于从算术方面去研究.后一阶段,我们着重从由代数数构成的域的方面来研究,也就是偏重于其代数的方面.更具体来说,过去我们没有过多考虑定义代数数的代数方程及其伽罗华群,现在我们将把它们纳入考虑的范围.

最基本的可解代数方程是阿贝尔方程,也就是其伽罗华群是阿贝尔群,阿贝尔及伽罗华都对这种方程进行过研究.19 世纪 40 年代末 50 年代初,克洛耐克开始研究这种方程,并总结出两个猜想.第一个猜想首先在 1853 年发表:

阿贝尔方程的所有的根都是单位根的有理函数,反过来,每个单位根的所有有理函数都是某个阿贝尔方程的根.

用现代语言来描述,就是:

有理数域 Q 的任何阿贝尔扩张域都是某个分圆域 $Q(\zeta)$的

子域(其中 $\zeta^n=1, \zeta\neq\pm1$).反过来,分圆域的所有子域都是阿贝尔域.

克洛耐克对这个猜想没有给出证明,第一个证明是德国数学家 H·韦伯在 1886 年给出的,由此,开辟了类域论的道路.

克洛耐克的第二个猜想被他自己说成是“最亲切的青春之梦”(liebster Jugendtraum):

设 $k=\mathrm{Q}(\sqrt{-d})$是一个虚二次域,则以 k 为系数的代数方程的根均可表为$\sqrt{-d}$、某个单位根以及模函数 j 的某些值 $j(c_i)$(常被称为奇异模)的有理函数.

克洛耐克原来的表述并不十分精确,H·韦伯在 1908 年给出部分证明,1920 年日本数学家高木贞治(Takagi Teiji, 1875—1960)给出完全而正确的表述及证明.

沿着这条途径发展,就是希尔伯特在 1900 年提出的 23 个著名问题中的第 12 个问题:

如果 k 是 Q 的有限阿贝尔扩张,K 是 k 的有限阿贝尔扩张,是否能够求出一些与 k 有关的“好”的解析函数 $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z),\cdots,\varphi_r(z)$,使得对 z 的适当数值 $z_1,\cdots,z_r$, K 同构于 $k(\varphi_1(z_1),\cdots,\varphi_r(z_r))$的子域?

这个问题如此基本、清楚而漂亮,成为代数数论乃至整个数学最重要的问题之一.不过 100 年来,尽管已经取得不少进步,但是,离完全解决为时尚早.

另外,希尔伯特对类域论提出一系列基本定理,特别是对于任意代数数域,类域的存在性定理在 1907 年由奥地利数学家富特万格勒(Philipp Furtwängler, 1869—1940)证明,他还在 1930 年证明主理想定理.至此,类域论的漂亮大厦全部建成.其后,代数数论及类域论从各方面进行推广,已经取得丰硕成果,并产生各

种各样的应用,特别是在丢番图方程和编码理论上都取得重大突破.

2　代数函数论

代数函数论现在已经完全淹没在现代数学的汪洋大海之中,很少有人提起了.而在 19 世纪,它却处于数学的中心,涉及椭圆积分及椭圆函数、阿贝尔积分及阿贝尔函数的问题,几乎是评价数学家成就的试金石.许多大数学家之所以在当时了不起,并非由于我们现在认为的那样,是对数学的一些普遍问题、基础问题提出正确的观点,而是由于他们在这个领域的杰出工作.从高斯、阿贝尔、雅可比、埃尔米特到克莱因、庞加莱,无不因在这个领域有突出贡献而闻名.而黎曼及外尔斯特拉斯更是因为他们对阿贝尔函数的工作而获得他们的名声和职位,而并非如现在所认为的那样是几何基础、复变函数论、数论、分析基础等工作.不过,从 19 世纪末开始,由于数学追求一般性、普遍性、抽象性,代数函数论从分析上纳入复变函数论,从几何上纳入代数几何学,到 20 世纪中叶,经一般域论、代数拓扑乃至数论的分解,它已经完全代数化,并随同一般域上的代数曲线论进入了交换代数的范畴.

2.1　椭圆积分

19 世纪初,数学的中心课题集中于椭圆函数及其推广上,它不仅是最基本的非初等函数,直接导致代数函数论及代数几何学的发展,而且在数论和数学物理上都有着广泛的应用.

从历史上讲,椭圆函数来源于椭圆积分,是通过椭圆积分反

演得到的,正如三角函数(圆函数)$\sin u$ 是由积分

$$\arcsin u = \int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

反演得到的.椭圆函数是椭圆积分

$$\int_a^x R(x,y)\mathrm{d}x$$

的反演,其中 $R(x,y)$是 x,y 的有理函数,且 y^2 是 x 的三次或四次多项式(无重因子)$p(x)$,它的特殊情形是

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

这种积分出现在求椭圆弧长的问题中,因此而得名.但实际上它并不局限于求椭圆弧长的问题,求双曲线及双纽线等的弧长同样也遇到椭圆积分.在阿贝尔首先把椭圆积分反演得出椭圆函数之前,一般也把椭圆积分称为椭圆函数或椭圆超越函数,这不过是历史的插曲.

椭圆积分自然出现在求椭圆及双曲线的弧长、单摆的周期、弹性细杆的弯曲等问题当中,但求积分遇到极大困难.莱布尼茨在研究积分法时,曾设想一个"纲领",即把积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 都归结为"已知函数"的"封闭形式",也就是求出由初等函数以有限的加、减、乘、除形式表现出来的函数 $g(x)$,使 $g'(x)=f(x)$.当时所知道的函数无非是现在所说的初等函数,即代数函数(多项式及有理分式)、指数函数及三角函数以及它们的反演.在实现莱布尼茨纲领上,椭圆积分是数学家所碰到的第一个障碍,经过当时数学家的努力,还是不能把椭圆积分表成上述的理想形式,以致 1694 年雅各布·伯努利就猜想这项任务不可能完成.这个猜想直到 1833 年才由法国数学家刘维尔证明.他证明,包括椭

圆积分在内的一大类积分均不可能表为初等函数.在这期间,数学家开始考虑用分析方法即各种无穷表达式来表示它,而具体到椭圆积分,则更着重于研究其性质.

由于一般的椭圆积分较为复杂,最早研究的一类是所谓双纽线积分.1694 年雅各布·伯努利由于其简单、漂亮而单独提出来予以考虑.双纽线的直角坐标方程为

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2,$$

极坐标方程为

$$r^2=\cos 2\theta.$$

他证明,其弧长为

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}},$$

这是最简单的椭圆积分,因此成为研究椭圆积分的出发点.

椭圆积分的历史起点一般公认为 1718 年,由意大利数学家法纳诺开始研究,他发现了双纽线积分的倍弧长公式.他是由研究双纽线的弧长

$$\int_0^w \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^4}}$$

的加倍问题而推导出这个公式的.他证明,如果

$$\int_0^w \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^4}}=2\int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}},$$

那么

$$w^2=\frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2},$$

即 w 与 u 之间存在代数关系.1751 年 12 月 23 日欧拉在得知法纳诺的结果之后,导致他于 1761 年把倍弧长公式推广成双纽线

积分的加法定理,即若

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} + \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^4}},$$

则

$$w = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}.$$

显然当 $u=v$ 时,即得出法纳诺关系.后来,雅可比把 1751 年 12 月 23 日这一天称为"椭圆函数的生日".

双纽线积分虽然是研究一般椭圆积分的起点,但欧拉的加法定理并不能轻易地推广到一般椭圆积分之上.一般椭圆积分的研究主要来自勒让德.

勒让德的工作从 1783 年起持续了半个世纪.首先他在 1786 年发表两篇论文,1793 年发表长篇论文,然后写了《积分练习》(*Exercises de calcul integral*,3 卷,1811,1817,1826)以及《椭圆函数论》(3 卷,1825,1826,1828).其中,他对椭圆积分进行了系统研究,特别是 1793 年他证明,一般椭圆积分

$$\int \frac{Q(x)}{\sqrt{P(x)}} dx$$

(其中 $Q(x)$ 是 x 的任意有理函数,$P(x)$ 是一般四次多项式)可以化为三种类型

$$F = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

$$E = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

$$\Pi = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

分别被称为第一、第二、第三类椭圆积分.显然,双纽线积分只是

第一类椭圆积分.经过适当变换,这三类积分可分别化为

$$F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad 0<k<1,$$

$$E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\qquad 0<k<1,$$

$$\Pi(\varphi,n,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad 0<k<1.$$

这种分法至今仍在使用,其中 k 被称为模,而

$$k'=\sqrt{1-k^2}$$

被称为余模.当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$时,积分

$$F=F(k)=F\left(\frac{\pi}{2},k\right),$$

$$E=E(k)=E\left(\frac{\pi}{2},k\right)$$

分别被称为第一类和第二类完全椭圆积分,通过定义

$$F'=F'(k)=F\left(\frac{\pi}{2},k'\right),$$

$$E'=E'(k)=E\left(\frac{\pi}{2},k'\right),$$

勒让德发现其间有如下的勒让德关系(1825):

$$FE'+F'E-FF'=\frac{\pi}{2}.$$

勒让德在他的书中得出一系列加法公式及变换公式,以及不同参数 n 的第三类积分之间的关系.在《椭圆函数论》第二卷中,勒让德发表了第一个椭圆积分表,它也是今天同类表的基础.

高斯对椭圆积分也有贡献,他从 1791 年起就研究所谓算术几何均值,也就是两个正数 a 及 b 经过如下运算所形成的两个序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的共同极限:

$$a_0 = a, b_0 = b,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

他记作 $agM(a,b)$. 1799 年 5 月 30 日他在日记中写道:

“我们已经确认 1 和$\sqrt{2}$的算术几何平均与 $\pi/\tilde{\omega}$ 相重到 11 位;这个事实的证明肯定将开辟一个全新的分析领域.”

高斯很快证明了这个结果,其中 $\tilde{\omega}$ 为

$$\tilde{\omega} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

后来他还得出由椭圆积分表示 $agM(a,b)$的公式,并于 1818 年发表. 不过从历史上看,拉格朗日已于 1785 年发表了同样结果.

2.2 椭圆函数

2.2.1 雅可比椭圆函数

勒让德搞了一辈子椭圆积分,却从来没有想到把椭圆积分反演得出椭圆函数,以致他在晚年不无辛酸地赞美阿贝尔及雅可比的工作. 当时有三位数学家考虑到反演问题,他们是高斯、阿贝尔及雅可比. 高斯早在 1796 年就反演积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^3}},$$

1797 年反演双纽线积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}},$$

得出双纽线函数,但其结果直到他去世后才发表. 阿贝尔在 1823 年已经有了反演的想法,1827 年发表第一篇论文. 同年,雅

可比开始研究椭圆函数,并写了一篇没有证明的论文.其后,两人都发表了这方面的论文,特别是雅可比在 1829 年出版的《椭圆函数论新基础》(*Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*)成为椭圆函数论的奠基性著作.在此之前,勒让德在《椭圆函数论》的补篇(1828)中介绍了阿贝尔及雅可比的工作.

阿贝尔和雅可比的贡献很多,主要有以下几个方面.

(1)引进雅可比椭圆函数.

作为第一类椭圆积分

$$u=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

的反演,雅可比引进记号

$$\varphi = am\cdot u$$

表示 $u(\varphi)$的反函数,他还引进

$$\cos\varphi=\cos amu,$$

$$\triangle\varphi=\triangle amu=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

后来它们被古德曼简化为

$$\mathrm{sn}u=\sin\varphi=\sin amu,$$

$$\mathrm{cn}u=\cos\varphi=\cos amu,$$

$$\mathrm{dn}u=\triangle\varphi=\triangle amu.$$

显然这反映出同三角函数类似的关系.它们之间的关系是:

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1,$$

$$\mathrm{dn}^2u+k^2\mathrm{sn}^2u=1.$$

(2)由实值扩展到复值,并发现双周期性.

椭圆函数 $\mathrm{sn}u,\mathrm{cn}u,\mathrm{dn}u$ 开始只对实 u 值定义,但高斯、阿贝尔早已考虑对复 u 值定义椭圆函数.1827 年阿贝尔首先通过虚变换把椭圆函数推广到取纯虚值的情形.他令 $\theta=\mathrm{i}am\varphi$,由

$$\sin\theta = \mathrm{i}\ \tan\varphi,$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\cos\varphi},$$

$$\triangle(\theta, k) = \frac{\triangle(\varphi, k')}{\cos\varphi},$$

得出

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}u, k) = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{sn}(u, k')}{\mathrm{cn}(u, k')},$$

$$\mathrm{cn}(\mathrm{i}u, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(u, k')},$$

$$\mathrm{dn}(\mathrm{i}u, k) = \frac{\mathrm{dn}(u, k')}{\mathrm{cn}(u, k')}.$$

同年,阿贝尔首先对实值 u, v 的椭圆函数证明加法定理,如

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}v\,\mathrm{dn}v + \mathrm{sn}v\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{1 - k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v},$$

对 $\mathrm{cn}(u+v)$, $\mathrm{dn}(u+v)$ 也有类似的公式. 通过加法定理,他把椭圆函数的定义推广到复值 $z = u + \mathrm{i}v$.

同时,阿贝尔还发现椭圆函数的重要性质——双周期性,特别是证明 $\mathrm{sn}z$ 的周期为 $4K$ 及 $2\mathrm{i}K'$; $\mathrm{cn}z$ 的周期为 $4K$ 及 $2K + 2\mathrm{i}K'$; $\mathrm{dn}z$ 的周期为 $2K$ 及 $4\mathrm{i}K'$,即存在两个周期,其比为非实数. 这成为后来椭圆函数研究的出发点. 1835 年雅可比证明任何单变量单值有理型(即亚纯)函数不可能多于两个周期,且周期比必为非实数. 1844 年刘维尔以此为出发点,建立系统的双周期函数理论. 他还依据柯西的留数理论证明,在一个周期平行四边形内极点的数目有限,这些极点的阶数之和被称为椭圆函数的阶数;在一个周期平行四边形内没有极点的椭圆函数是常数;椭圆函数在任何一个周期平行四边形内极点的留数之和恒为 0;在一个平行四边形内零点之和与极点之和的差等于一个

周期.他还证明,n 阶椭圆函数在一个周期平行四边形内取任一值 n 次.

(3)给出椭圆函数的表示,并建立 θ 函数理论.

雅可比在《椭圆函数论新基础》一书中建立了 θ 函数理论,从而给椭圆函数一个系统的表示.特殊的 θ 型函数最早是雅各布·伯努利在《猜度术》(1713)中引进的,他研究过 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} m^{n^2}$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} m^{\frac{n(n+1)}{2}}$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} m^{\frac{n(n+3)}{2}}$,它们都是 θ 函数.欧拉在《无穷分析引论》(1748)中为研究分拆函数 $\Pi(1-q^n)$ 而引进第二变元 ζ,得到 $\prod\limits^{\infty}(1-q^n\zeta)^{-1}$,它也是 θ 函数.其后,它出现在傅立叶的《热的分析理论》(1822)中.但只有雅可比把 θ 函数同椭圆函数联系起来,并在数论上加以应用.θ 函数是单周期的整函数,可以用收敛很快的级数来表示,因此在椭圆函数计算中是最好的工具.雅可比对 θ 函数作了两个符号的改变,对于 θ 函数后来的发展至关重要:用 $e^{\pi i\tau}$ 替代 q,用 e^{2iz} 替代 ζ,这样得出现在形式的 θ 函数

$$\theta(\tau,z)=\sum e^{\pi i n^2\tau+2inz},$$

由 q 变成 τ 使他能够创造"虚变换"

$$\tau\to-\frac{1}{\tau},$$

它与另一个明显变换

$$\tau\to\tau+2$$

共同构成模变换,并形成模群与模形式理论,其影响至今不衰.

雅可比早在 1828 年先由椭圆函数论得出四种 θ 函数的变换公式,但波瓦松已经于 1823 年得到其中一种,且其他三种不难由初等代数得到.雅可比最重要的贡献在于把椭圆函数用 θ 函数表示,然后由椭圆函数得出 θ 函数的无穷乘积表示.椭圆

函数及 θ 函数有了明显表达式之后,很容易推出它们的性质、变换公式、微分方程等等,而且为其广泛应用开辟了道路.从历史上讲,雅可比最早用的是 Θ 函数及 H 函数,后来改为四种 θ 函数,其后不同数学家用的记号也有些差别,理论上主要是外尔斯特拉斯的记号,而雅可比的记号在应用上由于方便、实用,直到现在仍被广泛使用.

θ 函数有许多推广,埃尔米特于 1858 年定义 θ 级数 $\theta_{u,v}$,而向高维推广则为阿贝尔函数论提供了工具.

2.2.2 外尔斯特拉斯的椭圆函数论

到 1838 年,雅可比椭圆函数论已经建立,并在各方面有着广泛应用.然而从理论上讲,椭圆函数的严整理论是外尔斯特拉斯建立的,他从 1857 年冬季学期起,开始在柏林大讲授椭圆函数论课程,他的讲义内容由于学生的传播而逐渐公之于世.外尔斯特拉斯最早发表的椭圆函数论文于 1882—1883 年分四篇发表在《柏林科学院会报》上,他的讲演经施瓦茨整理于 1893 年出版,书名为《椭圆函数应用的公式及定理》(*Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen*).他以前的研究由于他的《全集》第一卷(1894)及第二卷(1895)的出版而公之于世,特别是 1875 年他在柏林大学的就职演讲已经包括他的体系的概要.外尔斯特拉斯的椭圆函数理论现在已成为标准的表述.从历史上看,在他之前,许多数学家也有一些类似的不同于雅可比椭圆函数的考虑.

法国数学家刘维尔在 1844 年最早把双周期性作为刻画椭圆函数的出发点,他受到柯西的复分析理论,特别是留数演算的影响,从复分析的大视野来观察椭圆函数.他把在有限复平面上

亚纯的双周期函数定义为椭圆函数. 设椭圆函数的基本周期为 $2\omega_1, 2\omega_3$,则复平面可划分为周期平行四边形. 他证明,在一个周期平行四边形内没有极点的椭圆函数是常数,这是一般刘维尔定理的特殊情形. 他还证明,在两极点情形,椭圆函数在任一周期平行四边形的极点处留数之和为 0,一般情形是埃尔米特在 1848 年证明的. 他证明,任一椭圆函数在一周期平行四边形内取任何值的次数均相同;零点之和与极点之和的差等于一个周期. 刘维尔在法兰西学院讲的椭圆函数课程为他的学生布瑞奥及布盖所吸收,他们合写的书《双周期函数理论》(*Theorie des fonctions doublement periodiques*)于 1859 年出版,是椭圆函数论的第一部专著,1875 年第二版时,篇幅由原来的 342 页翻了一番,多达 700 页,这反映出理论进步之快. 不过,刘维尔对这两个学生极为不满,认为他们剽窃自己的理论,对此外尔斯特拉斯也有同感.

英国数学家凯雷从 1845 年起就发表椭圆函数的论文,一直持续了半个世纪. 他的风格保守,十分倾向于具体计算. 只是在 1845 年的论文中给出椭圆函数的一个双重无穷乘积表示,而不是像以前从椭圆积分反演得来,他具体从双重无穷乘积来表示雅可比椭圆函数. 凯雷的研究收入在他惟一出版的著作《椭圆函数》(1876)中.

19世纪中叶,对椭圆函数的研究主要集中在德国,除了雅可比和他的学生之外,爱森斯坦是椭圆函数的主要研究者,他更多是从数论出发,但是他的论文没有引起很多注意,直到19世纪 80 年代才为克洛耐克所发展. 爱森斯坦批评阿贝尔和雅可比通过椭圆积分的反演以及通过加法定理复化既不自然也不严格. 他在 1847 年发表关于椭圆函数的论文,使用双重无穷乘积定义

椭圆函数.他的研究为克洛耐克所继续,特别是他在晚年的一系列著作,其工具是二重级数.他们的工作都与数论密切相关.

尽管凯雷及爱森斯坦等人早已有不从椭圆积分的反演来定义椭圆函数的想法,但是椭圆函数的系统理论公认为外尔斯特拉斯所建立.也正是由这时开始,椭圆函数论正式作为解析函数论的一个特殊情况来处理.从 19 世纪末起,在许多解析函数论的著作中,后面一大半是论述椭圆函数及其推广的.随着时间的流逝,椭圆函数这部分越来越薄,最后趋向于 0.这导致现代大学生对这类不仅在历史上而且到现在仍极为重要的函数一无所知.不过,外尔斯特拉斯椭圆函数论至今仍为理论上的标准.

外尔斯特拉斯把椭圆函数定义为复平面上具有双周期 ω_1, $\omega_2\left(\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1}>0\right)$ 的亚纯函数,从而具体造出著名的 P 函数

$$P(z;\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left(\frac{1}{(z-m\omega_1-n\omega_2)^2}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\right),$$

其中 $\sum'$ 表示对 $(m,n)\neq(0,0)$ 的所有整数求和.但在施瓦茨的著作中首先用无穷乘积引入 σ 函数,然后再用无穷级数定义 P 函数.σ 是整函数,这符合外尔斯特拉斯后来的一般函数论的分解定理

$$\sigma(z)=z\prod_{\omega\neq0}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)e^{\frac{z}{\omega}}+\frac{z^2}{2\omega^2},$$

其中 ω 过所有 $m\omega_1+n\omega_2$, $m,n\in\mathbf{Z}$,但 $(m,n)\neq(0,0)$.他还定义 ζ 函数(不要同黎曼 ζ 函数混淆)

$$\zeta(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\log\sigma(z))=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\zeta(z))=-P(z).$$

σ 函数类似于雅可比 ζ 函数,是表示椭圆函数的有力工具.实际上,埃尔米特在 1875 年证明,任何椭圆函数均可表为 ζ 及 ζ' 的线性组合.

有了这些工具,外尔斯特拉斯证明了一系列基本定理:

(1)椭圆函数的加法定理.

若 $z_1 \not\equiv z_2 \bmod(\omega_1, \omega_2)$,则

$$P(z_1+z_2)=\frac{1}{4}\left(\frac{P'(z_1)-P'(z_2)}{P(z_1)-P(z_2)}\right)^2-P(z_1)-P(z_2).$$

(2)椭圆函数的微分方程,即

$$(P'(z))^2=4P^3(z)-g_2P(z)-g_3,$$

其中

$$g_2=60\sum_{\omega\neq 0}\omega^{-4},$$

$$g_3=140\sum_{\omega\neq 0}\omega^{-6},$$

$$g_2^3-27g_3^2\neq 0,$$

在这里,$\omega=m\omega_1+n\omega_2$.

(3)设 $E(z)$为 $P(z)$及 $P(z')$的有理函数,则 $E(z_1+z_2)$,$E(z_1)$,$E(z_2)$三者之间必满足代数关系.

由定理(2)可知,外尔斯特拉斯椭圆函数是椭圆积分

$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$$

的反演.而椭圆曲线

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

可用 $x=P(z)$,$y=P'(z)$参数化,其椭圆积分的加法定理为

$$\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}+\int_0^{x_2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$$

$$= \int_0^{x_3} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

其中 x_3 是通过(x_1, y_1)和(x_2, y_2)的直线与椭圆曲线的交点(x_3, y_3)的横坐标,这就是弦切线法.

2.3 阿贝尔积分与阿贝尔函数

阿贝尔积分和阿贝尔函数是椭圆积分、超椭圆积分以及椭圆函数、超椭圆函数的推广.所谓阿贝尔积分是指形如

$$\int R(\omega, z)\mathrm{d}z$$

的积分,其中 $R(\omega, z)$表示 ω, z 的有理函数,同时,ω, z 满足代数方程

$$f(\omega, z) = 0. \tag{1}$$

当 $f(\omega, z)$取

$$\omega^2 = p(z)$$

形式,其中 p 是n 次多项式时,称之为超椭圆积分. $n = 3,4$ 时,这种椭圆积分有一般的加法定理. 1760 年,欧拉得到下列更一般形式的加法定理

$$\int_a^x \frac{R(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{p(t)}} + \int_a^y \frac{R(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{p(t)}} = \int_a^z \frac{R(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{p(t)}} + \omega(x, y), \tag{2}$$

其中 z 是x, y 的代数函数,ω 或是x, y 的有理函数,或是 x, y 的有理函数与对数函数 $\log S(x, y)$(其中 $S(x, y)$是有理函数)之和.欧拉已注意到,当 p 的次数$n \geqslant 5$ 时,不可能把(2)推广,但仍可以保留这个形式,而这就是阿贝尔的出发点.大约在 1825 年,阿贝尔不仅把这个定理推广到 $n \geqslant 5$ 的超椭圆积分情形,还进一步推广到一般阿贝尔函数的情形. 1826 年 10 月 30 日,他把题为《论很广一类超越函数的一般性质》(*Memoire sur une properi-*

ete generale d'une classe trs etendue de fonctions transcendants)的论文呈递给巴黎科学院,但是负责评审论文的柯西连看也没看,就把它丢在一边.此文直到 1841 年才发表,而其中证明的阿贝尔定理的特殊情形于 1826 年发表.即使这种极为特殊的 $n=5,6$ 情形,最后也为雅可比反演这种最简单的超椭圆积分提供了线索.而远为重要的一般情形是 m 个同样形式的积分和

$$V=\int_{(a,b)}^{(x_1,y_1)}R(x,y)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{(a,b)}^{(x_m,y_m)}R(x,y)\mathrm{d}x$$

在一定条件下等于一个具有 r 个参数的有理函数与一个对数函数之和.在特殊情形下,$m-r$ 的极小值只与方程(2)有关,即后来的亏格.

椭圆积分及其反演到 1832 年已有一个相当满意的解答,而一般的阿贝尔积分及其反演问题却遇到极大困难.

第一个问题是仿照勒让德分类椭圆积分来分类超椭圆积分

$$\int\frac{p(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\Phi(x)}},$$

其中 $\Phi(x)$是没有重根的 $2v-1$ 次或 $2v$ 次多项式,$p(x)$为最高 $v-2$ 次多项式.在这种情况下,只有 $v-1$ 个独立的第一类积分,即

$$\Phi_k(z)=\int_0^z\frac{x^k}{y}\mathrm{d}x,\quad k=0,1,2,\cdots,v-2,$$

其中 $y^2=\Phi(x)$. $v-1$ 也是阿贝尔定理中能代数地表示这种积分的和所需积分的最大数目.1832 年雅可比提出著名的雅可比反演问题,即求解下列方程组:

$$u_0=\Phi_0(x_0)+\Phi_0(x_1)+\cdots+\Phi_0(x_{v-2}),$$

$$u_1=\Phi_1(x_0)+\Phi_1(x_1)+\cdots+\Phi_1(x_{v-2}),$$

……

$$u_{v-2}=\Phi_{v-2}(x_0)+\Phi_{v-2}(x_1)+\cdots+\Phi_{v-2}(x_{v-2}),$$

把 $x_0,\cdots,x_{v-2}$表为 $u_0,u_1,\cdots,u_{v-2}$的函数.显然当 $v=2$ 时,即椭圆积分的反演,这已由雅可比等很好地解决,特别是他引进 θ 函数来表示反演所得的椭圆函数.而一般情形成为其后 25 年间数学家紧张研究的课题.雅可比没能解决这个问题,他只是在 1832 年证明反函数也具有一个代数加法定理,并在 1834 年研究 $v=3$ 的特殊情形,即可以简化为椭圆积分的阿贝尔积分的反演.这时他已意识到需要多变元的多重周期函数来代替 θ 函数,一般超椭圆积分的分类问题在 1838 年由雅可比的学生黎塞洛(Friedrich Julius Richelot,1808—1875)解决.

雅可比反演问题的最简单情形($v=3$),由哥贝尔(Adolph Gopel,1812—1847)在 1847 年对特殊情形解决,一般情形由罗森哈恩(Johann Georg Rosenhain,1816—1887)在 1850 年完全解决.他们都是雅可比的学生,解决途径都是沿着雅可比所指出的对两变元情形适当推广 θ 函数.他们得出 16 个二元 θ 函数,其中 10 个为偶函数,6 个为奇函数.任选其中一个为分母,反演所得的反函数就可以表为 15 个商.具体来讲,如果

$$u=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\Phi(s)}}+\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\Phi(s)}},$$

$$v=\int_{x_0}^{x}\frac{s\mathrm{d}s}{\sqrt{\Phi(s)}}+\int_{y_0}^{y}\frac{s\mathrm{d}s}{\sqrt{\Phi(s)}},$$

其中 Φ 为五次或六次多项式,则 x 和 y 的任何对称函数可表示为(u,v)的单值函数,这些函数均可由上述 15 个商明显表出.

对于一般情形,外尔斯特拉斯试图解决第一类超椭圆积分的反演问题.在 19 世纪 40 年代中期,他还是中学教师时,就已经花费很大力气研究这个问题.第一篇论文发表在 1848—1849

年布劳恩斯伯格中学的年度报告上,当然,它没有引起注意.在1849年7月17日的手稿中,他已得出这个问题的主要结果,即引进类似于 θ 函数的辅助函数,并把反函数表为这种收敛幂级数之商,其详细内容于1853年寄给《克莱尔杂志》,并于1854年发表. 这篇论文使他名声大振,他获得1855—1856年度的休假并专心研究,发表了1856年的论文,这两篇论文直接导致他进入柏林大学.1856年的论文详细叙述了对超椭圆积分的雅可比反演问题的解决过程.这次他把它表述为微分方程的解,他声称他的方法对一般的阿贝尔积分也适用,并于1857年夏天向柏林科学院提交了详细的报告,但在印刷过程中他撤回了这篇论文.几周后黎曼发表了由四部分组成的长篇大论文《阿贝尔函数论》,两人用的方法不同,但结果完全一样.他后来重新写了这篇论文,并从1869年开始用于他的讲课之中.

从阿贝尔到黎曼,阿贝尔函数论这个领域进展不大,但从历史上看,伽罗华在1832年写的最后的书信中却包括许多代数函数论的内容,他叙述了许多定理,不过没有任何证明.其中包括后来黎曼完成的把阿贝尔积分分成三类的结果,他还知道第一类积分的周期数目与第一类和第二类线性独立积分数目之间的关系.他还给出第三类积分的参量与独立变量之间的互换公式.不过在他以前的论文中看不到有关这些结果的痕迹,这种天才的闪光经过20年却没人能理解,只有在另一位天才——黎曼那里才引起另一次突破,但似乎没有什么证据说明黎曼知道伽罗华的这封信.

关于阿贝尔函数,黎曼发表了两篇文章:一是《阿贝尔函数论》(*Theorie der Abel'schen Functionen*),一是《论 θ 函数的零点》(*uber das Verschwinden der Theta-Functionen*),这是前一篇的续篇.

前一篇由四部分构成,是他生前发表的最深刻且有丰富内容的著作.

(1)阿贝尔积分的表示及分类,即对由

$$f(z,\omega)=0$$

定义的黎曼曲面上所有阿贝尔积分进行分类.第一类阿贝尔积分,在黎曼曲面上处处有界,线性独立的第一类阿贝尔积分的数目等于曲面的亏格 p,如果曲面的连通数

$$N=2p+1,$$

这 p 个阿贝尔积分被称为基本积分.

第二类阿贝尔积分,在黎曼曲面上以有限多点为极点.

第三类阿贝尔积分,在黎曼曲面上具有对数型奇点.

每一个阿贝尔积分均为上三类积分的和.

黎曼还引进相伴曲面观念.设黎曼面由多项式

$$F(s,z)=0$$

定义,F 对 s 是 n 阶,对 z 是 m 阶,则相伴曲面由多项式

$$Q(s,z)=0$$

定义,Q 对 s 是 $n-2$ 阶,对 z 是 $m-2$ 阶,这时第一类阿贝尔积分可表为

$$\int Q(s,z)\mathrm{d}z\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right).$$

黎曼面上的有理函数也可借助相伴曲面来表示.在整个黎曼面上的亚纯函数可表示为线性组合

$$S=C_1W_1+\cdots+C_pW_p+C_{p+1}E_{p+1}+\cdots+C_{p+r}E_{p+r}+C_{p+r+1},$$

其中 C_j 是常数,$W_j(1\leqslant j\leqslant p)$是由第一类函数构成的向量空间的基,$E_j$ 是任意数目的第二类初等函数,但是 $C_j(1\leqslant j\leqslant p+r)$之间由 $2p$ 个线性齐次方程相联系.

(2)黎曼—洛赫定理.

这是代数函数论及代数几何学最重要的定理.黎曼得到的是黎曼不等式,是黎曼—洛赫定理的原始形态,黎曼研究的出发点之一是黎曼面上指定单极点的亚纯函数的数目.他证明,以 μ 个给定的一般点为极点的单值函数形成 $\mu - p + 1$ 维线性簇,但对于一组特殊的 m 个点,维数 l 还要增加,因此黎曼得出黎曼不等式

$$l \geqslant \mu - p + 1.$$

黎曼的学生洛赫(Gustav Roch,1839—1866)补充了一项,使之成为等式,此即代数函数论及代数几何学中心定理.

1882 年出现两篇关于代数函数论的大论文,一篇是戴德金和 H·韦伯合写的,一篇是克洛耐克写的.他们由代数—算术方法推广黎曼的理论,特别是黎曼—洛赫定理.前者用理想的语言,后者用除子的语言来整理代数函数论,揭示它们与代数数论的相似之处,从而最终指向交换代数学.我们可以用除子的语言来说明:设 Γ 为非奇异不可约代数曲线,由 Γ 上有限个点 P_i 构成的形式整系数线性组合

$$D = \sum_i n_i P_i$$

被称为 Γ 的除子,

$$n = \sum_i n_i$$

被称为 D 的次数,记为 $\deg(D)$,$L(D)$为线性空间

$$L(D) = \{f \mid (f) + a > 0\},$$

f 是 Γ 上的亚纯函数,(f)为 $\Sigma v_P(f) P$,$v_P(f)$为 f 在 P 点的零点或极点的阶数.零点的阶数为正,极点的阶数为负.$l(D)$为其维数,这时黎曼—洛赫定理为

$$l(D) - l(\triangle - D) = \deg(D) + 1 - g,$$

其中△为典范除子.

由黎曼—洛赫定理可推出许多重要推论,特别是当 $\deg(D) \geqslant 2g-1$ 时,

$$l(D)=\deg(D)+1-g,$$

因此对于一点 P,则

$$1=l(0P)\leqslant l(1P)\leqslant l(2P)\leqslant\cdots\leqslant l((2g-1)P)=g.$$

因此只有 g 个整数 $0<n_1<n_2<\cdots<n_g<2g$,使得没有函数 f 在极点的除子为 n_jP,P 被称为外尔斯特拉斯点,如果 $(n_1,n_2,\cdots,n_j)\neq(1,2,\cdots,g)$,可以证明 $g>1$ 的代数曲线上只有有限多个外尔斯特拉斯点.

(3)黎曼矩阵、黎曼点集与阿贝尔函数.

每个亏格为 p 的黎曼面 X 上所有的一阶全纯微分形式有一组基 $\omega_1,\cdots,\omega_p$,X 上有 $2p$ 条互不“同伦”的闭曲线(同调基) $r_1,\cdots,r_{2p}$,构造 $2j$ 个复 p 维向量

$$\Pi_j=\left(\int_{r_j}\omega_1,\cdots,\int_{r_j}\omega_p\right)\in C^p, j=1,\cdots,2p,$$

它们在实数域上线性独立,在 C^p 中生成格 Λ,则 C^g/Λ 是复环面,被称为 X 的雅可比簇. 黎曼通过适当选取 $(\omega_1,\cdots,\omega_p)$ 及 $(r_1,\cdots,r_{2p})$,使 $2p\times p$ 矩阵

$$\Pi=\begin{bmatrix}\Pi_1\\ \vdots\\ \Pi_{2g}\end{bmatrix}$$

具有 $\begin{pmatrix}I\\B\end{pmatrix}$ 的形式,其中 I 为 $p\times p$ 么矩阵,B 为复对称矩阵,其虚部为正定的. 这种矩阵 Π 或 B 被称为黎曼矩阵. 它满足黎曼等式及黎曼不等式,这个性质被称为黎曼周期关系. 黎曼认识到,

周期关系是非退化阿贝尔函数存在的充分且必要条件，但他既没有表述完全，也没有提供一个证明. 对此，外尔斯特拉斯尽管花费了很大力气，仍未能得出一个完全证明. 庞加莱完成了证明(1902). 他证明，任何 $2n$ 重周期的解析函数可以表示为两个整函数的商，这两个整函数满足 θ 函数所适合的函数方程，即

$$\begin{aligned}\theta(v+\pi\mathrm{i}r)&=\theta(v),\\ \theta(v+\alpha_j)&=e^{L_j(v)}\theta(v),\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $v=(v_1,\cdots,v_g)$，r 是整数向量$(r_1,\cdots,r_g)$，α_j 是对称矩阵(α_{jl})的列向量，$L_j(v)$是线性型.

1884 年弗罗宾尼乌斯证明，存在满足(3)的非平凡 θ 函数的充分且必要条件就是黎曼的双线性关系，即存在 $2p$ 阶反对称整数矩阵 Q，使

$${}^t\Pi Q\Pi=0,\tag{4}$$

$$\sqrt{-1}\,{}^t\Pi Q\,\overline{\Pi}>0,\tag{5}$$

其中(5)式左边表示它是正定埃尔米特矩阵. 黎曼双线性关系也被称为黎曼—弗罗宾尼乌斯关系，因此可知这些关系是存在具有给定周期的亚纯函数，经过线性变换之后变元数目不减少的充分必要条件，当然它也保证由周期关系定义的 θ 函数绝对且一致收敛，它还定义了一个与黎曼曲面对应的雅可比簇 $J(x)$.

(4)θ 函数及雅可比反演问题.

为了研究雅可比簇，黎曼推广雅可比 θ 函数，引进黎曼 θ 函数，其定义为 p 个复变量 $z_1,\cdots,z_p$ 的函数

$$\begin{aligned}\theta(z)&=\theta(z_1,\cdots,z_p;B)\\ &=\sum_{n_1,\cdots,n_p\in Z}\exp\Big(\pi\mathrm{i}\sum_{\alpha\beta=1}^{p}b_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta+2\pi\mathrm{i}\sum_{\alpha=1}^{p}n_\alpha z_\alpha\Big),\end{aligned}$$

其中 $B=(b_{\alpha\beta})$，$\alpha,\beta=1,\cdots,p$. 显然 $\theta(z)$的零点对格子间的平

移保持不变. $\theta(z)$的零点集在 $J(x)$内的象 Θ 被称为θ除子.

有了 θ 函数,他定义阿贝尔—雅可比映射

$$A: X \to J(x),$$

它把 $x \in X$ 映到$\left(\int_{x_0}^{x} \omega_1, \cdots, \int_{x_0}^{x} \omega_p\right)$,其中 $x_0 \in X$ 是选定的基点.

黎曼证明了下列定理:

①阿贝尔定理:在黎曼面上指定两组点集$(x_1, \cdots, x_k)$,$(y_1, \cdots, y_k)$,$x_i \neq y_j$,$i, j = 1, \cdots k$,则在 X 上存在一个亚纯函数以$(x_1, \cdots, x_k)$为零点,以$(y_1, \cdots, y_k)$为极点的充分必要条件是

$$\sum_{j=1}^{k} A(x_j) = \sum_{j=1}^{k} A(y_j).$$

阿贝尔原来的定理是关于代数微分的积分加法定理,黎曼首先认识到它与亚纯函数的关系.

②阿贝尔函数的雅可比反演定理:如果 $e \in J(x)$,$W \not\subset \Theta + e$,且 $x_1, \cdots, x_p$ 为X上$\theta(A(x) - e)$的零点,则

$$\sum_{j=1}^{p} A(x_j) = e - k,$$

其中 k 是不依赖于e的常数,且$(x_1, \cdots, x_p)$除顺序之外是惟一的.

③黎曼奇性定理:如果

$$e = \sum_{j=1}^{g-1} A(x_j) - k, \ x_1, \cdots, x_{g-1} \in X, \ D = \sum_{j=1}^{g-1} x_j,$$

则 $\dim|D| = m$,其中 m 为非负整数,使 v 函数及其不超过m阶的导数在e处均为 0,而至少有一个$(m+1)$阶导数在 e 处非 0. 特别地,当 Θ 的奇点正好是那些点$\sum_{j=1}^{g-1} A(x_j) - k$ 时,除子 $D = \sum_{j=1}^{g-1} x_j - 1$是特殊的$(\dim|D| > 0)$.

(5)双有理变换的概念和参模.

黎曼对于由两个代数函数

$$F(s,z)=0,$$

$$F_1(s_1,z_1)=0$$

定义的黎曼面,引进了一个等价关系,即双有理等价,也就是通过(s,z)与(s_1,z_1)之间的有理函数一一对应,使 F 变到 F_1 或 F_1 变到 F.以后的代数几何学,研究双有理不变量及双有理等价类成为中心课题.对于平面代数曲线,黎曼提出描述亏格为 p 的双有理等价类集合的问题.黎曼通过 θ 函数推出,当 $p>1$ 时,这集合依赖于$(3p-3)$个任意复常数,他称这些常数为"类模"(klassenmoduln),后来简称为模或参模(moduli).当参模是"一般的"(即不满足特殊条件)时,黎曼给出该参模等价类中定义的方程

$$F(s,z)=0$$

的最小阶数.关于参模结构的研究是现代数学的热门话题,从 20 世纪 30 年代以来已经取得了很大的进展.

黎曼在晚年的一个成就是证明 $p=3$ 情形的托雷里(Ruggiere Torelli,1884—1915)定理,即 $J(x)$,Θ 决定 X.为此,他把 θ 函数稍加推广,成为具有特征的 θ 函数.利用这种广义 θ 函数及其导数在 O 点的值(即所谓 θ 常数),就可以定出亏格为 p 的黎曼面所依赖的参数.

一般曲线的托雷里定理是托雷里在 1914 年证明的,不过有一些漏洞,直到 1957 年才由魏伊补全.

代数函数论的另一大问题是肖特基问题,由于雅可比簇是主极化阿贝尔簇,但反过来不一定对.问题是:哪些主极化阿贝尔簇是代数曲线的雅可比簇? 1880 年肖特基对于 $p=3$ 的情形

进行研究.1888 年对于 $p=4$ 的情形,他证明,某些 θ 常数的 16 次多项式在雅可比簇上为 0,但一般不为 0.1909 年他和荣格(Heinrich Wilhelm Ewald Jung,1876—1953)引入肖特基簇,猜想它可以刻画雅可比簇,这就是所谓肖特基猜想,至今尚未解决.原来的肖特基问题由于 1986 年盐田隆比吕证明诺维科夫(Serge Novikov,1938—)猜想而向前迈进了一大步.

3 代数几何学

代数几何学是 19 世纪最伟大的数学创造之一,100 多年来成为数学的核心部分,它与几乎所有数学分支都有着密不可分的联系并推动它们的发展.反过来,各数学分支(以及物理学)的重大问题也向代数几何学提出各种问题并促进它的进步.

代数几何学的研究对象是由多项式方程或方程组所定义的代数曲线、代数曲面乃至高维的代数簇,从这种意义上来讲,它是解析几何学的自然延续.另一方面,许多数学家也把代数函数论作为代数几何学的超越理论加以论述,从而把代数几何学的历史追溯到阿贝尔的工作.这样代数函数论就自然地融入代数几何学而成为其有机的组成部分.毋庸置疑,代数函数论是代数几何学的来源之一,但从历史上看,代数函数论的自然发展路线是通往更一般的解析函数论.从 19 世纪末到 20 世纪初,有关复变函数论的著作大都包含两部分,一部分是一般的解析函数论,另一部分是内容丰富的代数函数论.第二次世界大战之后,代数函数论已经不大有人提起了,它的内容散见于代数几何学、黎曼曲面理论乃至抽象代数理论之中.1951 年之后,以代数函数论为题的著作真可以说极为罕见.

本书的做法是把代数几何学作为一门几何学来看待，因此把它和前面的代数函数论分开，又和后面的抽象代数学分开．这样它的对象十分明确，即代数曲线、代数曲面和高维代数簇．不过研究方法却五花八门，包括超越方法、代数方法、几何方法、算术方法、拓扑方法等，这样就形成了术语不同、各有长处和短处的理论体系．除了代数曲线之外，几何形象也逐渐不那么直观，因此，代数几何学的严格基础始终是数学家争论的主题．

3.1　代数几何学的分期

代数几何学的发展大致可以分为三个时期，即史前时期、经典代数几何学时期和抽象代数几何学时期．

3.1.1　史前时期（1860 年以前）

主要是从综合几何学（射影几何学）、解析几何学以及代数函数论这几方面进行研究．

3.1.2　经典代数几何学时期（1860—1920）

主要是研究复数域上的代数曲线及代数曲面．经典代数几何学的奠基者是黎曼及克莱布什．黎曼引进拓扑观点，证明代数几何学基本定理（黎曼—洛赫定理）的特殊情形，并引进双有理变换及其不变量和参模的概念，这些构成了未来代数几何学的理论框架，也是进一步研究的出发点．黎曼研究中的惟一空白——几何对象，则由克莱布什所补足．克莱布什还明确指出，代数几何学研究双有理变换及其不变量，并以这个观点研究代数曲线及曲面．其后，德国学派、法国学派、意大利学派分别用不同的观点及方法研究代数几何学，形成了不同的风格及流派．

除了抽象代数几何学的先驱戴德金及克洛耐克之外，德国学派的方法实际上是超越方法与几何方法的结合．他们的活动

主要是在1860—1890年间.黎曼关于阿贝尔函数的论文中完全没有几何语言.1863年洛赫及克莱布什把黎曼的结果与平面代数曲线的射影几何联系起来,形成代数几何学派.克莱布什的学生布瑞尔(Alexancler Wilhelm Von Brill,1842—1935)及M·诺特(Max Noether,1844—1921)创立了线性系的工具,用来研究代数曲线及曲面,而且推广到高维射影空间中的曲线和曲面以及一般代数簇之上.他们的许多结果,如奇点的解消及有理曲线的概念都是进一步推广的出发点.沿着这条路径进行研究的有英国的凯雷、法国的阿尔芳(Georges Henri Halphen,1844—1889)、丹麦的错玉顿等,而到1890年之后,意大利的代数几何学派占有统治地位.

意大利代数几何学派的第一代是克雷莫纳,他研究一般的双有理变换.第二代有贝尔蒂尼(Eugenio Bertini,1846—1933),他继续克雷莫纳的研究.另外,还有沃隆涅斯、德尔·贝佐(P.Del Pezzo,1859—1936)等,特别是塞格利,他得到许多特殊的有理曲面并研究其性质.而真正使意大利学派获得国际声誉的则是卡斯泰努沃、恩瑞克斯和塞梵瑞,1890—1930年间他们在代数几何学上无可争议地居于领先地位.不过他们的直观方法不够严密,他们的术语又过于晦涩,其结果很难得到局外人的理解,但是他们的贡献是肯定的.

1890—1910年间,以毕卡及庞加莱为首的法国学派用的是超越方法,从某种意义上来讲,这是黎曼研究代数曲线观点的直接继续,只不过把单变量代数函数论推广成两个变量的代数函数论,所研究的是由三个复变量的不可约多项式 $P(x,y,z)=0$ 定义的代数函数.黎曼所研究的黎曼面拓扑结构、黎曼面上的有理函数及阿贝尔积分都被庞加莱和毕卡推广到代数曲面上.但

是,代数曲面情形要复杂得多.毕卡在 1899 年发展了第二类二重积分理论,不过独立的积分数目与亏格无关.

3.1.3　抽象代数几何学时期(1920 年以后)

1920 年以后,代数几何学的对象已有大规模的推广:

①空间的基域由实数域、复数域扩大到更一般的域,特别是特征 $p>0$ 的域.

②空间的维数由 2 维、3 维扩大到更高的维数.

③空间中的曲线及曲面不再依赖它所嵌入的空间而形成内在的定义,形成代数流形及代数簇的观点,维数也不仅仅限于 1 维、2 维,可以是更高维的.

④几何对象完全淡化,点、线、面已成为形式化的东西,它们完全为抽象的对象——抽象簇及概型所取代.

这个时期代数几何学的发展经历了下面四个阶段.

(1)应用代数方法或算术方法来改写黎曼的代数函数论.

1882 年同时出现两篇重要论文,一篇是戴德金及 H·韦伯合写的《单变元代数函数论》(*Theorie der algebraischen Funktionen einer Veranderlithen*),一篇是克洛耐克所写的《代数量的算术理论纲要》(*Grundzuge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*).他们的研究道路不同,方法各异,但他们有几点是共同的:

①他们都看出代数函数论或代数几何与代数数论的相似性,并为之提供共同的代数基础.

②由于几何的背景退居幕后,推动了抽象代数观念的产生,特别是理想、模、域及环的理论.

③由于抽象代数的语言不依赖于基域 C 的拓扑,他们的结果更具一般性,也正因为如此,再由代数语言寻求其直观的几何

意义也不太容易,因此,1920年以后,几何在代数几何学的发展中并不占主流地位.

戴德金和H·韦伯的论文建立在理想理论的基础上,而克洛耐克的论文则建立在除子理论的基础上,方法则是构造消去法.

(2)以拓扑的观点研究代数簇.

代数簇作为点集是有奇点的流形,流形的基本结构是其拓扑结构.黎曼虽然明确指出光滑代数曲线即紧黎曼曲面的拓扑,但是在19世纪还没有有效的工具研究拓扑.1892年庞加莱开创了组合拓扑学,但以此来研究代数簇还不够,因此毕卡和庞加莱仍用超越方法进行研究,直到1920年,美国数学家莱夫谢兹(Solomon Lefschetz,1884—1972)才把拓扑方法与超越方法及几何方法结合起来,给双有理不变量以拓扑解释,并加以计算.其后,查瑞斯基及魏伊用查瑞斯基拓扑定义抽象代数簇.1946年出版了魏伊的《代数几何学基础》(*Foundations of Algebraic Geometry*),该书对此作了全面的论述.

(3)研究代数簇的各层结构.

1950年起,运用代数拓扑、微分几何以及同调代数等有力工具,将各种不变量加以精致化,得出一系列深刻结果.

(4)提出概型理论.

1960年起,法国数学家格罗登迪克(Alexandre Grothendieck,1928—)创立概型理论,他动用以前所有的工具,并发明一系列新工具,使代数几何学完全摆脱具体图象而成为交换代数学的一个组成部分.

尽管20世纪的数学家热衷于抽象,但一般并不"为抽象而抽象",他们仍用他们所掌握的先进工具解决以前无力解决的具体问题.在算术代数几何方面,这种优势极为显著.1974年德林

(Pierre Deligne, 1944—　)证明魏伊猜想, 1983 年法尔廷斯证明莫德尔猜想, 1994 年外尔斯证明费尔马大定理, 都得力于抽象代数几何学先进的思想和工具. 另一方面, 1970 年以后, 即使代数曲线与代数曲面, 也仍有大批问题有待解决, 回到具体的代数几何问题的倾向还是越来越明显. 最近 30 多年来, 先进的工具及方法为一系列问题的解决开辟了道路. 代数几何学尚未完全淹没在抽象代数的汪洋大海之中.

3.2　平面代数曲线

1862 年克雷莫纳发表《平面曲线的几何理论导引》(*Introduzione a una teoria geometrica delle curve piane*), 其中他系统地表述了一般平面代数曲线的几何理论. 1863 年他发表一篇论文《论平面图形的几何变换》(*Sulle transformazione geometriche delle figure piane*), 其中他系统地叙述了平面图形的双有理几何变换, 这种变换后来被称为克雷莫纳变换. 这种变换可定义为

$$T:(x,y,z)\to(P_1(x,y,z),P_2(x,y,z),P_3(x,y,z)),$$

其中 $P_j(1\leqslant j\leqslant 3)$ 是三个齐次多项式, 具有相同的次数且没有非常数公共因子, P_j 的公共零点被称为基点, 基点上 T 没有定义, T 存在逆变换 T^{-1}.

由于双有理变换的引入, 完成了解析几何学到代数几何学的转换. 解析几何学通常使用线性变换, 得出过细的分类(三次平面曲线可达几百种), 反而掩盖了几何上的本质区别. 以双有理变换不变的几何性质为基础, 可以得出更深刻的几何分类. 在 1863 年以前, 已知几种特殊的双有理变换, 一种是 1822 年普吕克尔引进的反演变换, 由此产生反演几何学; 一种是二次变换, 即

$$(x,y,z)\to(yz,zx,xy),$$

它在三条直线 $x=0,y=0,z=0$ 外的平面上定义二变元的二次变换,最早是牛顿引入的. 1871 年 M·诺特证明,平面双有理变换可由一系列二次变换及线性变换组成. 同年,罗撒内(Jacob Rosane,1842—1922)独立发现这个结果,还证明所有平面上一对一的代数变换必定是克雷莫纳变换.

射影平面的克雷莫纳变换中有一类重要的变换,即对合变换,两个对合变换之积等于恒等变换,从而对合变换等于其逆变换. 1877 年贝尔蒂尼将对合变换进行完全分类,在相差一个双有理变换之外,它们是:

(1)对合射影变换;

(2)德·荣基埃尔(Ernest Jean Phillipe Fauque de Jonquière, 1820—1901)对合变换;

(3)盖塞尔(Karl Friedrich Geiser, 1843—1934)对合变换;

(4)贝尔蒂尼对合变换.

这样一来,平面代数曲线的几何研究有了有效的工具. 其后,双有理变换被推广到空间上.

对于双有理变换,首要问题是确定双有理不变量. 对于平面代数曲线,双有理不变量主要是亏格及参模. 由于双有理不变量必定是射影不变量,因此,首先要解决如何把它表为射影不变量的问题. 黎曼通过引进伴随曲线,已经把亏格 g 表为代数方程次数与重点数目的函数,不过他没有用齐次方程,因此并非射影表示. 1870 年M·诺特假定 n 次射影代数曲线只有通常奇点,即 r_j 阶重点处有 r_j 条不同的切线,这样他得出一般亏格公式

$$g=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}r_j(r_j-1).$$

对于 r 维射影空间 $P_r(C)$ 中的曲线的亏格 g 与次数 d 之间关系，1889 年卡斯泰努沃已经开始研究，但对于 $r>3$ 的情形远未解决. 对于 $r=3$ 的情形，阿尔芳在 1882 年给出不等式，但证明有错，直到 1977 年才完全解决.

双有理变换不仅是代数簇分类的基础，而且是奇点解消的手段. 代数函数论中的黎曼曲面所对应的代数曲线是光滑的或者说是没有奇点的，但一般的代数曲线乃至一般的代数簇是有奇点的. 代数几何学中的一个基本问题是奇点的解消，也就是通过双有理变换把一个有奇点的代数簇变换成没有奇点或仅有“好”奇点的代数簇. 奇点解消的代数理论在 1858 年已由克洛耐克基本上得出，但是直到 1880 年他才在一篇有关判别式的论文中发表. 在此之前，德国的几何学派已经得到许多结果. 布瑞尔及 M·诺特的主要工具是线性列，它表示曲线 C 与代数曲线的线性族

$$\sum_{j=1}^{r}\lambda_j P_j(x,y)=0$$

的交点簇，而且是双有理不变量，它基本上等价于除子理论，它可被推广到高维空间的曲线上. 通过 n 次代数曲线的 $(n-3)$ 次相伴多项式，可定义曲线到 $(p-1)$ 维射影空间的映射，其象被称为正规曲线，这样曲线之间的双有理对应就可以归结为正规曲线的射影变换了.

3.3　代数曲面

到 19 世纪中叶，代数曲面只有零散的特殊结果. 1849 年萨尔孟及凯雷证明，在没有奇点的三次代数曲面上存在 27 条直线. 直到 1868 年克莱布什才以双有理变换的观点讨论代数曲

面.他考虑只有“通常”奇点的代数曲面,即最多有一条二重曲线 L,其上最多具有三重点及有限个“捏点”,即其两个切平面重合的点.他把这类曲面上第一类二重积分的最大数目称为几何亏格 p_g,而所谓第一类二重积分是指在代数曲面 $S:f(x,y,z)=0$ 上处处有限的二重积分

$$\int\int\frac{Q(x,y,z)}{f_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $Q(x,y,z)$是$(n-4)$次曲面,包含二重曲线 L,被称为 S 的伴随曲面.克莱布什的文章中没有提到积分,只是取 S 的亏格为定义$(n-4)$次伴随曲面 Q 的线性独立的最大数目.1870 年 M·诺特证明其双有理不变性(实际上他对任意维射影空间的超曲面都证明类似结果).

凯雷在 1869 年由另外途径引进了算术亏格 p_a.错玉顿在 1871 年,M·诺特在 1875 年都企图仿照普吕克尔型公式得出克莱布什的亏格,设射影空间 $P_3(C)$中次数为 d,亏格为 π,有 t 个三重点的一般曲线为 L,则 m 次曲面 S 包含 L 的条数为

$$md-2t-\pi+1.$$

在克莱布什的定义中,L 是二重曲线,因此曲面“亏格”应该为

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}-\frac{(n-4)}{d}+2t+\pi-1.$$

结果这不是几何亏格 p_g,而是算术亏格 p_a,他们也证明其双有理不变性,且对任意代数曲面,恒有 $p_g\geqslant p_a$.当 S 是嵌入在 3 维复射影空间 $P_3(C)$中的非奇异代数曲面时,则有 $p_g=p_a$.因此

$$q=p_g-p_a$$

是对代数曲面 S 的非正则性的度量,故称之为非正则数.但其几何意义不太清楚,因此,超越方法及拓扑方法就更为优越.由

于 19 世纪末只知道贝蒂数 R，且嵌入在 $P_3(C)$中的非奇异代数曲面的 1 维贝蒂数 $R_1=0$，可推断 q 与 R_1 之间有一定关系. 另外，法国数学家毕卡和庞加莱发展超越方法，使之适合处理积分，他们发现这类曲面上没有第一类单积分. 而 1901 年恩瑞克斯发现在 $q>0$ 的曲面上却都有第一类单积分. 因此，这三个量之间有一定的关系. 1905 年塞梵瑞及卡斯泰努沃利用毕卡的"超越"结果和恩瑞克斯关于特征系的定理(其证明有错误)，得出

$$q=\frac{1}{2}R_1=m,$$

其中 m 为 S 上线性独立的单积分的最大数目. 1910 年庞加莱首先对上述定理(以及恩瑞克斯证错的定理)给出一个正确的证明. 1921 年莱夫谢兹创立拓扑方法，最终给出一个拓扑证明.

从 1870 年起，M·诺特进一步发展了他的几何思想，引进曲面的线性亏格 $P^{(1)}$，并研究曲面上的代数曲线，得出曲线亏格公式，他还引进例外曲线的概念. 19 世纪 80 年代末期，意大利的代数几何学派继承了 M·诺特等的几何思想，开始对代数几何学，尤其是代数曲面进行研究. 第一个结果是贝尔蒂尼在 1877 年给出平面对合变换的分类. 1893 年卡斯泰努沃解决了吕略特(Jakob Lüroth，1844—1910)问题，即单有理曲面是有理曲面. 随后，他提出并于 1896 年解决用数值不变量刻画有理曲面的问题，曲线只有惟一数值双有理不变量——亏格. 曲线的亏格为 0 是代数曲线为有理曲线的充分且必要条件. 对于曲面则有多种不变量，除了 $p_g, p_a, p^{(1)}$之外，还有恩瑞克斯引进的多亏格 P_k $(k\geqslant 2)$. 与曲线的情形不同，$p_g=p_a=0$ 还不足以保证代数曲面是有理曲面，要保证这点的充分必要条件是 $p_g=P_2=0$. 恩瑞克

斯给出曲面是直纹曲面(直线与一条亏格为 g 的曲线的乘积)的充分必要条件是 $P_4 = P_6 = 0$. 另外,他们还发现一些特殊的曲面,最主要的是恩瑞克斯 6 次曲面和 $K3$ 曲面. $K3$ 曲面的一个特殊情形是 1864 年库默尔引进的具有 16 个二重点的四阶库默尔曲面. 这一切都导致恩瑞克斯在 20 世纪初的一系列论文中对于曲面的分类. 1914 年,由 P_{12}的不同将曲面分成四大类,其特征及典型曲面开列如下:

第Ⅰ类曲面: $P_{12} = 0$,有理曲面及直纹曲面.

第Ⅱ类曲面: $P_{12} = 1$,可再分成四小类:

(1) $p_g = 0, q = 0$,恩瑞克斯曲面,原来是 6 次曲面,以四面体的 6 条棱为基二重线(值得注意的是,虽然 $p_g = 0$,却不是有理曲面).

(2) $p_g = 0, q = 1$,超椭圆曲面,更正确的名称应是双椭圆曲面,它是由两条椭圆曲线的直积在有限交换群正作用下构成的轨迹空间. 它们满足一定条件,只有 7 种可能. 1907 年巴涅拉(Giuseppe Bagnera, 1865—1927)和德·弗兰基斯(Michele de Franchis, 1875—1946)完全定出来.

(3) $p_g = 1, q = 0$, $K3$ 曲面.

(4) $p_g = 1, q = 2$,阿贝尔曲面.

第Ⅲ类曲面: $P_{12} \geqslant 2$,非Ⅰ类、Ⅱ类的椭圆曲面.

第Ⅳ类曲面: $P_{12} \geqslant 2$,一般型代数曲面.

一般型曲面极为复杂,其后不断找到一些新曲面属于这一类. 尽管方法不够严格,这项成就也是辉煌的. 第二次世界大战之后,运用抽象代数、拓扑以及分析的强有力方法,对于代数曲面分类进行严格的处理,并大大加以推广. 小平邦彦(Kodaira Kunihiko, 1915—1997)在 1950—1960 年间把曲面分类扩充到所

有复曲面. 原苏联以沙法列维奇(Igor Shafarevich,1923—　)为首的学派在 1955—1965 年间完成了这项工作. 美国的查瑞斯基(Oscar Zariski,1899—1986)学派做了大量的奠基性工作,特别是证明极小曲面(minimal surfaces)的存在性. 1969 年邦比埃利(Enrico Bombieri,1940—　)和曼福德(David Mumford,1937—　)把曲面分类推广到特征 $p>0$ 的代数封闭域($p\neq 2,3$). 有意思的是,他们的分类与恩瑞克斯的分类相差不太远.

20 世纪初已开始研究三维代数簇乃至一般代数簇,如黎曼—洛赫定理已经得到完全推广,三维代数簇的初步分类也于 1987 年完成.

4　代数不变式论

不变式论是 19 世纪中极重要的数学分支,也是通往抽象代数学中的交换环论的一条途径. 在 19 世纪,不变式论主要研究型(齐次多项式)或型组在线性变换之下保持不变的系数的代数式. 设

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1+\cdots+i_n=r}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

为 n 元 r 次型,对于变元 $x_1,\cdots,x_n$ 进行线性变换

$$x_i\to\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,1\leqslant i\leqslant n,$$

其中 a_{ij} 是实数或复数,$f(x_1,\cdots,x_n)$ 在此线性变换之下变为

$$f'(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1+\cdots+i_n=r}a'_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n},$$

f 的每个系数经历一个变换

$$a_{i_1\cdots i_n}\to a'_{i_1\cdots i_n},$$

若系数的多项式 $\Phi(\cdots, a'_{i_1\cdots i_n}, \cdots)$满足

$$\Phi(\cdots, a'_{i_1\cdots i_n}, \cdots) = |a_{ij}|^q \Phi(\cdots, a_{i_1\cdots i_n}, \cdots),$$

其中$|a_{ij}|$为线性变换的行列式,则称 Φ 为型f 的(相对)不变式(invariant),q 被称为不变式的权.如果 $q=0$,则称 Φ 为绝对不变式.同样可以定义型组的联立不变式,如果 n 元型

$$\Phi(\cdots, a_{i_1\cdots i_n}, \cdots; x_1, \cdots, x_n)$$

在该线性变换下满足

$$\Phi(\cdots, a'_{i_1\cdots i_n}, \cdots; x'_1 \cdots, x'_n)$$

$$= |a_{ij}|^q \Phi(\cdots, a_{i_1\cdots i_n}, \cdots; x_1, \cdots, x_n),$$

则称 Φ 为协变式.

对于任意的型或型组,古典不变式的首要问题就是计算不变式及协变式,如果可能的话,应完全列举出来.随着历史的发展,逐步由特殊到一般,由具体到抽象,现代不变式论的目标逐步改变.我们遵照希尔伯特的区分法,把它分成五个时期来叙述.

4.1 前史

一般认为,1841 年布尔创立了不变式论.在此之前,不变式论有三个来源.

4.1.1 数论

高斯在研究二元二次型

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

的理论时,首先引入线性变换

$$x = \alpha x' + \beta y',$$

$$y = \gamma x' + \delta y',$$

其中

$$\alpha\delta - \beta\gamma = r.$$

他得出

$$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$$

高斯首先求出 f 在变换之下的不变式

$$D = b^2 - ac,$$

他称之为“行列式”(Determinante),即后来的判别式,它是权为 2 的不变式,即

$$D' = b'^2 - a'c' = r^2 D.$$

高斯已知,如果两个二元二次型等价,则 $D' = D$.

4.1.2　代数

不变式论是行列式论的自然延伸,因此,凯雷在 1846 年把不变式称为超行列式(hyperdeterminant),不变式与协变式以及大部分不变式论的名词都是西尔维斯特后来发明的. n 个联立 n 元线性型

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{3i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i$$

在线性变换

$$x_i = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}y_l$$

之下,变为

$$\sum_{i=1}^{n} a'_{1i}y_i, \sum_{i=1}^{n} a'_{2i}y_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} a'_{ni}y_i,$$

则新行列式 $D' = |a'_{ik}|$ 与原行列式 $D = |a_{ik}|$ 之间的关系为

$$D' = rD,$$

其中

$$r = |a'_{ik}|.$$

这里的行列式 D 即 n 个联立 n 元线性型的联立不变式，其推广即函数行列式．函数行列式最早是雅可比在 1841 年引入的．雅可比行列式是 n 元型 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的协变式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

1844 年，海塞推广雅可比行列式，引入海塞行列式，它也是协变式，例如

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

是权为 2 的协变式．函数行列式都有几何意义，也反映了不变式论的几何来源．

4.1.3 几何

克莱因在《19 世纪数学史讲义》中，是把不变式论作为射影几何的代数等价对象来考虑的，他认为射影几何同不变式论是平行发展的．因为几何图形的射影性质就是图形在射影(线性)变换下不变的那些性质．当应用代数方法之后，就要寻求几何图形的哪些性质与坐标表示无关，这样自然要考虑在坐标变换下保持不变的代数表达式，从而自然引向代数不变式的研究．

4.2 朴素时期

一般公认不变式理论是 1841 年由布尔创立的，1843 年凯雷

读了布尔的论文后大受启发，从此献身于不变式的研究. 在求不变式和协变式的方法方面，凯雷受到海塞及爱森斯坦的启发. 1844 年，爱森斯坦在研究二元三次型

$$f = ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3$$

时，发现其海塞行列式

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

为它的二次协变式. H 的行列式

$$3b^2c^2 + 6abcd - 4b^3d - 4ac^3 - a^2d^2$$

为其最简单的不变式，它也是 f 的判别式，通常用△表示. f 及 H 的函数行列式 Q 是三次协变式. 1846 年凯雷证明 $f, H, \triangle, Q$ 构成二元三次型的协变式的完全组. 1856 年他研究二元四次型

$$f = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4$$

的协变式，他发现，除了依法炮制的 $f(4)$，$H(4)$及 f 和 H 的函数行列式 $Q(6)$以外(括号中的数字为其次数)，还有两个不变式

$$g_2 = ac - 4bd + 3c^2,$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

而且由于 f 的判别式与 g_2, g_3 之间的关系为

$$\triangle = g_2^3 - 27g_3^2,$$

因此△不属于完全组，他发现 $f(4)$，$H(4)$，$Q(6)$，g_2，g_3 构成协变式的完全组.

凯雷在 1854—1878 年间写了 10 篇关于代数型的不变式的论文，他称型为 quantics，他发现到二元六次型的不变式以及到

二元四次型的协变式,它们都可以由有限个基本协变式或不变式代数地构成.他曾经错误地认为高于6次的二元型基本组可能有无穷多个协变式及不变式,这后来为其他人的研究所否定.因此,不变式论的问题主要是构造并列举协变式及不变式的问题:

(1)构造协变式和不变式的基本组,并把它们明显列举出来.

(2)这些协变式和不变式的基本组有时并不独立,它们之间有一定关系,西尔维斯特借用行星天文学的术语称之为合系(syzygy,天文学上称为合冲).问题是找出基本组的所有合系来.

1850年起.英国数学家西尔维斯特和爱尔兰数学家萨尔孟也加入不变式论的研究行列,他们同凯雷一起,被称为英国不变式论的三头(trio).他们在构造协变式及不变式方面引进许多方法,其中特别重要的是凯雷在1846年引进的Ω过程和西尔维斯特在1852年引进的推移过程,目的都是通过一些机械办法由已知低次型的不变式及协变式来得到高次型的不变式及协变式.在他们的论文中包含大量十分机械的计算以及根据计算结果列出的表.

不变式论的术语大都是由西尔维斯特引进的,其中包括不变式、协变式、伴变式(comitant)(它包括不变式、协变式、共变式为其特例)、合系等等,不过除了这几个现在还使用之外,其余大都废弃了.

西尔维斯特及凯雷等的工作是建立下面的理论:

二元型

$$f = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} y + \cdots + a_p y^p$$

的任何不变式应满足下列微分方程

$$\Omega I = 0,$$

$$OI = 0,$$

其中 Ω, O 是线性微分算子,

$$\Omega \equiv a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + pa_{p-1}\frac{\partial}{\partial a_p},$$

$$O \equiv pa_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (p-1)a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + a_p \frac{\partial}{\partial a_{p-1}},$$

西尔维斯特把这些算子称为零化子,他在 1878—1886 年建立起一整套零化子理论,并且推广到其他型上.

1882 年西尔维斯特和富兰克林(Fabean Franklin, 1853—1939)研究某些型的所有半不变式的任何阶生成函数,而且用线性微分算子来表示何种情况下一个函数是一个二元二次型的正交不变式或协变式.对于直接正交变换来说,F 是协变式的充分必要条件是 F 以

$$y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + O - \Omega$$

为其零化子.

4.3　形式时期

1849 年德国数学家阿隆荷德(Seiegfried Heinrich Aronhold, 1819—1884)开始进入不变式论领域,力求把英国学派的运算通过纯代数的形式运算加以系统化、严密化,形成近代的符号演算方法,这种符号演算在 20 年后产生巨大效果.高尔丹(Paul Albert Gordan, 1837—1912)在 1868 年证明了不变式论基本定理:任何二元型的协变式及不变式都具有有限基本组.1870 年他又证明任何联立二元型组也都具有有限基本组.他的证明用到了阿隆荷德及克莱布什所发展的符号演算,这些演算总结在克莱布

什的专著《二元代数型理论》(*Théorie der binaren algebraischen Formen*)(1872)中,这里面详细叙述了具体的计算方法,后来的群表示论中的克莱布什—高尔丹系数即由此而来. 克莱布什的《几何学讲义》(*Vorlesungen über Geometrie*)在他去世后,由林德曼编辑于 1876 年出版,其中涉及不变式论在几何上的应用并且开始向三元型进军.

在 1868 年以后,高尔丹逐步解决了三元低次型的问题,先是解决三元二次型及三元二次型组(两个、三个型)的完全系. 1869 年他得出三元三次型的完全基本系,1880 年他给出特殊的三元四次型

$$x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$$

的完全系,其基本组共有 54 个协变式. 其后,他的学生 E·诺特在 1907 年的博士论文《三元四次型不变式的完全系》中完整地给出协变式完全组,共 331 个.

由上面可以看出,对于一般的 m 元 n 次型求出协变式的完全基本组以及完全合系是极为复杂的过程,甚至在二元型的情形下,也存在已知的完全基本组能否再简约的问题. 实际上, 1870 年高尔丹提出的二元七次型及二元八次型,到 1880 年及 1888 年又被简化. 但是, m 元 n 次型的协变式完全基本组有一个重要的规律被发现,从而可以简化一半计算,这就是埃尔米特在 1854 年发现的互反律,他指出 m 元 n 次型的协变式的基本组与 n 元 m 次型的一一对应.

4.4 批判时期

一般认为,由希尔伯特开始了不变式论的批判时期,但他的工作的意义远不止于此. 希尔伯特 1885 年的博士论文仍是构造

性的.第一个不变式论的存在性证明是奥地利数学家默滕斯(Franz Mertens,1840—1927)给出的,他用归纳法证明高尔丹二元型的基本组的有限性定理,而没有具体给出这些协变式.

希尔伯特在 1888 年再次证明关于二元型的协变式的有限性定理,但是,更令人吃惊的是他宣布了远为一般的结果,即对于任何 n 元型、任何次数以及任何有限多个型的组,都存在有限的协变式的完备系.这个结果在 1890 年发表,其中还证明了另一个重要定理,即协变式中的合系也是有限生成的.这两个不变式论的基本定理的证明依据一个更为著名、更为重要的定理——希尔伯特基定理.这个定理直接通向抽象代数学的交换环理论.

希尔伯特的论证方法开辟了一个新时代,即用存在性证明代替构造性证明,这在当时引起了不安."不变式之王"高尔丹认为:"这不是数学,而是神学!"希尔伯特必须再次通过构造性方法来论证他的存在性证明的合理性.在 1890—1893 年间,他花费了很大力气,再次给他的不变式论基本定理一个构造性的证明,其中根据他的另一个大定理——希尔伯特零点定理(Nullstellensatz),他把零点定理与凯雷的 Ω 方法结合起来,证明每个不变式 J 是基 $J_1,\cdots,J_\mu$ 的整代数函数,即满足

$$J^e+G_1J^{e-1}+\cdots+G_e=0,$$

其中 G_i 是 $J_1,\cdots,J_\mu$ 的多项式,从而可用克洛耐克的构造性方法得出整基来.1893 年,希尔伯特自豪地宣称:"我相信,这样一来,由不变式生成的函数论理论的最主要目的已经达到."他向他的好友闵可夫斯基讲,他不再研究不变式论了.

反对希尔伯特的存在性证明方法的高尔丹最终也承认这种方法的合理性,"神学也有神学的用处嘛".1899 年他自己还简

化希尔伯特的证明.从这时起,研究不变式论的工作数量急剧下降,不变式论研究进入低速发展时期.

4.5 现代时期

希尔伯特离开不变式论之后,数学史家曾认为这门学科已经死亡.然而,正如丢东涅所讲,不变式论正如凤凰,多次从灰烬中再生.近百年来,不变式论沿着下面几条路线继续发展.

(1)古典方向.

以高尔丹为代表,古典方向仍然把构造方向延续了20多年,高尔丹在1912年去世后,这个方向趋于式微.

(2)群论方向.

以前的不变式论所涉及的变换属于一般线性群 $GL(n,\mathrm{R})$ 或 $GL(n,\mathrm{C})$,一个重要的问题是对于它们的子群,特别是推广到半单李群上,这时有限性定理是否还成立.这已由希尔伯特在1900年作为第14个问题提出来.随着群表示论的发展,这个理论已被纳入群表示论的方向,从这个观点来看,不变式论的发展总结在外尔的《典型群:其不变式及表示》(*The Classical groups, their invariants and representations*)(1939)中.

(3)代数几何方向.

1950年以后,随着代数群理论的发展,不变式论已发展成为代数变换群一般理论的一部分,它成为代数变换群在代数簇上作用的不变商簇问题.这种"几何不变式论"从20世纪70年代起有很大发展,现在仍在继续之中.

(4)交换代数方向.

如果说代数数论、代数函数论、代数几何学导向某种特殊的交换代数或交换环的话,例如戴德金环,那么代数不变式论则直

接通向更一般的交换代数或交换环理论，即诺特环理论.实际上，这一过程是分三步走的：首先是希尔伯特在 1891 年证明的有限基定理和合系的有限基定理，它们完全是用不变式论的语言来表述及证明的.其次是腊斯克(Emanuel Lasker，1868—1941)及麦考莱(Francis Macaulay，1862—1937)推广到一般多项式环的理想理论或模系理论，它们仍未能脱离具体对象.而真正迈向抽象代数学的，则是 E·诺特，她一方面摆脱具体的多项式环而考虑一般环，另一方面采用公理方法，提出诺特环理想链的极大公理或有限链的条件公理，这样交换环论正式建立，不仅所有上述理论都可以纳入它的范畴，而且在各个领域产生了重要的新成果，从而使数学迈向现代化之路.

第 15 章　用群的观点统一数学

通常认为,伽罗华建立伽罗华理论之后,代数的研究就转向群论.这是非常错误的.实际上,正如前面所述,一方面代数方程的研究并未终止,另一方面,由具体群到抽象群的研究也经历了至少半个世纪的漫长过程.以抽象群的结构为对象的群论到 19 世纪末才刚刚开始,不过,19 世纪最后二三十年,群的观念却深入到数学的各个分支,并成为统一数学的基础.虽然这种统一并没有成功,但是在各学科中引入群的观念还是大有好处的.

依照历史的顺序,这里把具体学科中群的观念的发展概述如下:

(1)代数方程论.首先从拉格朗日的置换理论到置换集合,然后到置换群理论,在 1870—1880 年间发表的著作及论文主要还是置换群理论,虽然逐步脱离方程论,但还没有完全把群抽象出来进行研究.许多重要定理,如西洛定理及组成列不变因子定理,都是在置换群论的外衣下进行叙述及证明的.尽管如此,它们都能顺利地推广到抽象群上.

(2)二元二次型理论及代数数论.1801 年高斯发现二元二次型可以合成,从而逐步认识到二元二次型的等价类构成群,这就是类群.类群不仅可以平行用于二次域上,而且还可以推广到一般代数数域乃至其他域上,它是这些理论的最根本的不变量.

(3)模群及与椭圆函数变换有关的群.

(4)结晶体群,它是使晶体不变的群,是晶体分类的基础,与二次型理论有关.

(5)运动群,若尔当在 1867 年最先引进这种几何变换群,它是最早的连续群.

(6)几何变换群,克莱因以一种统一的观点来研究几何变换群,导致他提出以群的不变量来统一几何学的计划.

(7)连续变换群,S·李从 1874 年开始研究的李群及李代数.

(8)群与微分方程及自守函数.

这样到 19 世纪末,群的概念已深入到数论、代数、几何及分析各个领域,成为当时统一数学的基础.

1　克莱因与埃尔兰根计划

1.1　克莱因

克莱因,1849 年 4 月 25 日生于莱茵河畔的杜塞尔多夫. 1865 年他从故乡的中学毕业以后,进入波恩大学.第一年他听数学、物理学的课不多,主要听植物学.1866 年他成为普吕克尔的助手,帮助普吕克尔准备实验.史坦纳去世之后,普吕克尔继续史坦纳关于解析几何学的研究,在以前工作的基础上,力图把空间解析几何学建立在以直线为元素的基础上.为此,他写了《新空间几何学》(*Neue Geometrie des Raumes*).克莱因在普吕克尔的影响下努力学习几何学.1868 年 5 月 22 日,普吕克尔突然去世,他的大作只完成了第一卷.克莱因整理了老师的遗稿,第二卷于 1869 年出版.1868 年 12 月,克莱因获得博士学位,论文的

题目是《线坐标的一般二次方程到典则形式的变换》,著名数学家李普希茨成为他名义上的博士导师.

为了整理普吕克尔的遗稿,克莱因感到自己的知识是十分不够的,他需要有经验的几何学家的帮助.为此,他于 1869 年初离开波恩前往格廷根.这时黎曼已去世,接替教授职位的是克莱布什,他刚刚创办数学杂志《数学年刊》,他的研究方向是当时方兴未艾的不变式论以及代数曲面论,这对克莱因关于不变性的观念无疑具有重要影响.在这期间,克莱因读了萨尔孟的《圆锥曲线》的德译本,从而知道了凯雷的工作.

1869 年 8 月底,克莱因到了柏林大学,当时柏林大学由于库默尔、克洛耐克和外尔斯特拉斯的到来,迎来了一个兴旺时期.在这里,他结识了来自挪威的 S·李,两人成为终身密友.他还结识了来自奥地利的史托尔茨,从他那里才知道罗巴切夫斯基几何学.1870 年 2 月,他在外尔斯特拉斯的讨论班上,报告了凯雷关于射影距离的工作,并提出把凯雷的工作推广到罗巴切夫斯基几何的问题,不过反应是令人失望的,他得到的回答是,这是两个属于不同范围的问题,而几何学基础的首要问题是把两点间的最短线作为直线的思想.但是,他不喜欢这种一步一步来建立严格逻辑系统的思想,仍然按照自己原来的方式走下去.当时库默尔正处于他的几何学时期,克莱因和 S·李都对库默尔的几何学工作感兴趣,他们在库默尔的讨论班上都很活跃,他和 S·李合作研究了库默尔曲面的渐近线的性质.

1870 年 3 月,克莱因和 S·李一起到了巴黎,这时若尔当的《代换论及代数方程论》刚刚出版,他们很快就发现,群论不仅仅对于代数方程有重要意义,而且对整个数学特别是不变式论及几何学有很大影响.群论一下子打开了他们的思想的大门.在巴

黎,他们合作研究了 W 曲线,即在线性代换群下不变的曲线.群论的出现对于他们两人后来的工作产生了巨大的影响,而对克莱因的影响简直可以说是立竿见影.

1870 年 7 月普法战争爆发,克莱因和 S·李不得不分手.克莱因回到德国,又重返格廷根,开始准备他的就职论文,并在 1871 年 1 月获得讲师资格.1871 年夏,在同史托尔茨的多次讨论中,他越来越明确非欧几何学是射影几何学的一部分.同年 8 月他发表的第一篇论文《论所谓非欧几何学》,受到一些哲学家及数学家的攻击.哲学家仍然否认非欧几何学,而数学家认为他在兜圈子,这促使他深入研究几何学基础,特别是射影几何学以及公理化问题.1872 年夏,他写的第二篇论文发表了.

在克莱布什的推荐之下,1872 年克莱因到埃尔兰根任正教授,同年 11 月他发表了被称为埃尔兰根计划的著名论文,这是几何学历史上具有划时代意义的文献,也是他登峰造极的成就.据数学史研究,埃尔兰根计划并非如传说所讲的是他的就职演说,他的就职演说是关于数学教育的.1875 年他离开埃尔兰根,就任慕尼黑高等工业学校教授.这时他进行几何学、代数学、分析学及群论的综合研究,他关于二十面体的研究是对不同学科进行综合研究的一个范例.

1880 年克莱因又到莱比锡大学任教授,这时开始关于自守函数的研究.自守函数论是群与函数相结合的产物.他和法国数学家庞加莱彼此独立开创了这个领域,两人在 1881—1882 年的"竞赛"中,庞加莱大大超过了克莱因.同时,克莱因还发展了黎曼的函数论,1882 年出版了《黎曼关于代数函数及其积分的理论》(*Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihre Integrale*),他认为这是他自己最好的著作.这时他积劳成疾,再也

做不了什么创造性的工作了.

1886 年他到格廷根大学任教授,他其后 40 年的活动大大推动了德国数学的发展.他把格廷根变成了世界数学中心.1895 年他请来希尔伯特,1902 年请来闵可夫斯基,使得一批批数学家从这里培养出来.他自己的讲义和讨论班贯彻了他的统一精神,深受学生的欢迎.他丰富的思想及处理问题的方法被很快地传播开去.他对于应用数学的关心,大大促进了德国应用数学的发展.他对于物理学特别是相对论的重视,也推动了数学家与物理学家的结合.

1890 年,在 G·康托尔的倡议下,德国数学家联合会正式成立.克莱因作为创始人之一,积极参加其活动.他在 1894 年的年会上作了报告《黎曼及其对近代数学发展的意义》,并于 1897 年、1904 年、1908 年三次任年会主席.

1893 年为纪念哥伦布发现新大陆 400 周年,在美国芝加哥举行了世界工业博览会,同时召开国际数学家大会.克莱因代表德国参加这次会议,并在大会上作了《当前数学的状况》的报告.他还携带十几篇德国数学家的论文在大会上宣读.会后,他又专门为大会参加者作了几次关于当前数学状况的报告,对于美国数学家有重要的影响.他还先后培养了许多美国数学家.1896 年 10 月为纪念普林斯顿大学建校 150 周年,他再次赴美,并作了他新研究的报告《陀螺理论》.在这个问题上,他用自守函数简化了前人的证明,并给复数时间以新的解释.他和索末菲(Arnold Sommerfeld,1868—1951)合著的四卷《陀螺理论》(*Theorie des Kreisels*)(1897—1910)长期以来是这方面的标准著作.

1895 年他积极参与德国《数学百科全书》的筹划工作,1899 年起任力学部分的主编.1896 年 5 月,克莱因被授予枢密顾问

官职务,表明他在学术界地位的提高. 1897 年 6 月谢林(Ernst Schering,1833—1897)去世,克莱因于是创立了两个新的职位给布伦德尔(Otto Rudolf Martin Brendel,1862—1939)和维谢尔(Emil Wiechert,1861—1928). 布伦德尔是理论天文学教授,在克莱因的指导下,负责编辑高斯的全集,这个工作原来是由谢林开始的,但未完成. 正是由于克莱因发起编辑高斯全集的工作,使得许多高斯生前没有发表的手稿得以重见天日,例如高斯关于椭圆函数和阿贝尔函数的研究. 不过,克莱因还计划写一部全面而详尽的高斯传记,但这个计划未能实现.

1872 年在埃尔兰根作就职演说时,克莱因就谈到数学教育,其后特别是从 19 世纪末起,克莱因积极参与国际和国内数学教育的研究工作. 1895 年在克莱因的倡议下,在格廷根召开新设立的"数学及自然科学教育促进联合会"年会. 1900 年克莱因在中小学校会议上,要求中学阶段讲授解析几何及微积分基础,1904 年他强调中学教育要注意教学法. 1908 年在罗马设立国际数学教育委员会,克莱因是中心人物,并任 1912 年会议主席. 在他的参与下,编成了 8 大卷数学教育论文集,对后来的数学教育产生了广泛的影响.

1910 年春,他的健康情况开始恶化,经常请假,1912 年几乎全年没上班,于是 1912 年底他决定提前退休. 退休之后,他开始讲授数学史以及相对论等课程,有时就在自己家里举行. 1918 年起,他开始编订自己的全集,写下了许多有历史意义的评注. 他的 3 卷全集在 1921—1923 年陆续出版. 他的 2 卷《19 世纪数学史讲义》(*Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*)在他去世后出版(1926—1927). 作为当时的领袖数学家,他的许多观点至今仍然对数学家和数学史家有所启迪. 他

的《高观点看初等数学》(*Elementarmathematik vorn höheren Standpunkte aus*)(1908)反映了他对数学的许多观点,影响至今不衰.

作为一位大数学家,克莱因的形象是独一无二的.他不仅是一位专门技术家,而且是有战略眼光的数学思想家,他对于整个数学领域有着广泛的知识,而且对德国内外其他数学家的工作有着持久的兴趣.他善于吸收其他国家的长处,也把德国的数学传播到其他国家.他有难得的历史眼光,能把数学放在历史背景中加以考察.他是伟大的教育家、著述家、编辑以及学术组织者,其影响之大,远远超出欧洲,远及美国和日本.

1.2 埃尔兰根计划

从群论的观点来考虑几何学问题,最早是在1870年左右分别由赫姆霍茨、克莱因及S·李明确提出的.虽然1872年克莱因的埃尔兰根纲领已经讲得十分明确,但是从群论这种高观点来看待直观的几何学,并使群论成为统一几何学的基础,直到19世纪末才逐渐为数学家们所普遍接受.因为这里所涉及的几何变换、几何变换群、不变性与不变量的观点已经远远不是直观的了.

赫姆霍茨在黎曼论文的影响下,于1868年发表《论作为几何学基础的事实》,他认为:

(1)物理空间形成一个 n 维流形.

(2)在一个刚体的任何运动中,存在任何点对的 $2n$ 个坐标的数值函数,并保持不变.

(3)一个刚体可以从任何点移到任意其他指定点.

(4)若一个刚体的 $(n-1)$ 个点固定不动,则任何运动使任何点画出一条闭曲线.

他认为,从这四条公理出发可以推出 ds^2 是二次微分形式.虽然结果不对,但他的确首先把几何学建立在变换(运动)群概念的基础上.

1.2.1　几何变换

尽管几何变换甚至简单的变换群观点自古就有,但是对几何学并没有形成一个有效的考虑问题及处理问题的方法.初等几何学中常见的几何变换有两种:一是对称变换,这是最直观的群,它表现在所有民族的图案和建筑当中,但是直到 19 世纪中叶在利用群的观点来分类结晶体时,它才被真正纳入几何学的范围;二是运动,这种观点在 19 世纪之前也一直没有在几何学中起多大作用.随着近代数学的发展,从 17 世纪起几何学中遇到的变换也越来越丰富,这些变换大致可分为两大类:

(1)随着解析几何学的发展而引进来的坐标变换,实际上是不同坐标系或坐标标架的变换,在用解析方法处理几何问题时常常遇到这种变换,它们在解析几何学及微分几何学中常常出现,但这些坐标系之间的变换并不是这里所讲的几何变换,一般它们之间的变换关系也不能用群论来处理.

(2)一般的几何变换,这是指几何对象到几何对象之间的对应和变换,可以分成两类:一类是同种对象之间的变换,最常见的是点到点的一一对应,它适合用群论来处理,当然有时也产生退化情形;另一类是不同种对象之间的对应,如点与线之间的对应.

我们把 19 世纪中期已经发现的几何图形之间的等价关系分为四大类:

①全同关联:两个图形可叠合.

②相似关联：两个图形形状相同，但大小不同.

③仿射关联：两个图形可以通过一系列平行投影相互对应.

④射影关联：两个图形可以通过一系列中心投影相互对应.

具有上述等价关系的两个图形可以通过相应的几何变换把一个图形变成另一个，这些几何变换可以分别描述如下：

①全同变换，例如欧氏平面上的运动，其中包括平移、旋转及反射，这些变换在古代就已知道.

②相似变换，可以由平行平面通过中心投影得出，这种变换在古代也已知道.

③仿射变换，最早提到仿射变换的是欧拉，仿射这个词也是他引进的，其后莫比乌斯在 1827 年也研究过仿射变换.

④射影变换，两个图形可以通过一系列中心投影相互变换，莫比乌斯称之为共线变换，因为它保持点的共线性，把直线映成直线.

以上四种变换都是线性变换.在研究解析几何学及射影几何学时，最早用到的一般是这种线性变换.克莱因提出埃尔兰根计划时，他所知道的变换已经不限于线性变换了.比线性变换稍复杂的是反演变换，也称倒矢径变换，它是关于一个半径为 R 的圆或球的变换，把矢径为 r 的点变为 r'，满足

$$rr' = R^2.$$

这是马格努斯(Heinrich Gustav Magnus，1802—1870)从 1831 年开始研究的，虽然在这之前普吕克尔也提到过.更复杂的是二次变换及双有理变换，而最一般的变换是连续变换.这些变换一般要求其逆变换也是同类变换.

莫比乌斯还引进齐次坐标来解析地表示射影变换：设 E，E' 为空间中的两个平面，分别引进齐次坐标(x_0, x_1, x_2)及$(x'_0,$

x'_1, x'_2),则对于任何 E 及 E' 外一点,由 E 到 E' 上的中心射影变换可表为

$$x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2,$$

$$x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$

$$x'_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2.$$

这种变换是可逆的,即系数行列式$\neq 0$. 由这些变换的合成,可得出任何的射影变换. 射影变换也可以用非齐次坐标表示为

$$x' = \frac{a_{10} + a_{11}x + a_{12}y}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}y},$$

$$y' = \frac{a_{20} + a_{21}x + a_{22}y}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}y}.$$

非齐次坐标仿射变换可表示为

$$x' = a_{10} + a_{11}x + a_{12}y,$$

$$y' = a_{20} + a_{21}x + a_{22}y,$$

这里 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. 非齐次坐标相似变换可表示为

$$x' = ax - by + c,$$

$$y' = \pm bx \mp ay + d,$$

这里 $a^2 + b^2 \neq 0$. 最后,用非齐次坐标表示全同变换为

$$x' = \rho(x\cos\theta - y\sin\theta + \alpha),$$

$$y' = \rho(x\sin\theta + y\cos\theta + \beta),$$

这里 $\rho = \pm 1$. 在几何变换之下,都有一些图形的性质得到保持,这些性质就是在这些变换之下等价的图形所共有的性质.

①射影变换下图形的不变性质有线性、共线性、调和点列、调和线列等. 圆锥曲线在射影变换下仍变为圆锥曲线,但不一定变成同种圆锥曲线. 射影不变量是交比.

②仿射变换下保持平行性,且把直线变成直线(线段变成线

段).仿射不变量是同一直线上各线段的简比.

③相似变换下图形的不变性质除了射影变换及仿射变换下的不变性质外,还有两直线互相垂直等性质,相似不变量是各线段之比与角度.

④全同变换下的不变性质有结合关系、顺序关系、全同关系、平行关系,特别是度量关系.全同变换不变量主要是距离.

1.2.2 变换群及埃尔兰根计划

克莱因的埃尔兰根计划把几何学与变换群理论联系在一起,提出用群来统一分类几何学的方案,这是几何学的重大突破,但是有许多历史问题有待澄清.

据克莱因自己说,埃尔兰根计划是他在1871年夏想到的,当时他的变换群观念还是很原始的,主要基于同伽罗华理论的对比上,而真正的变换群乃至抽象群观念的发展则是以后的事情,他和S·李在以后的研究中似乎有一个分工,他研究离散变换群,S·李研究连续变换群.从历史上看,他的思想来源有四个方面:

①由射影几何学的研究,他首先引进射影变换群的观念.

②由凯雷等人的不变式观念,研究变换下的不变性.

③由凯雷等人的绝对型,引出不变实体的观念.

④由若尔当的运动群概念(1867年首先发表),得出一般变换群观念.

从埃尔兰根计划的内容来看,他所研究的内容还涉及:

①赫姆霍茨用运动群观点研究几何(1868).

②几何空间元素任意选取.他引用线几何学、圆几何学、球几何学等,指出从变换群的观点来看,这些几何学与点几何学之

间有对应关系.

③更一般的双有理变换、拓扑学以及切触变换(S·李在1870年首先研究).对于双有理变换,在当时才刚刚开始研究,克莱因把它分成两种情形,即全空间的变换及空间中流形的有理变换.对于全空间变换,已知平面上的有理变换由二次变换组合而成,也知道平面曲线的不变特征及其不变量亏格和参模的存在.对于拓扑学,他认为是研究"由无穷小变形组成的变换的不变性".他也知道,这类变换所构成的群,实质上与以前考察过的群完全不同.切触变换是将平面中的相切曲线变成相切曲线的一种变换.对空间也可以有类似定义.他指出,雅可比在分析研究中已用过一般的切触变换,只是由于S·李的研究才进入一般的几何领域.

④通过黎曼的流形理论推广到高维流形.

克莱因的埃尔兰根计划的基本观点是:每种几何学都由变换群所刻画,每种几何学所要研究的就是几何图形在其变换群下的不变量,而一门几何学的子几何学就是研究原来变换群的子群下的不变量.射影变换群的一个子群是仿射变换群,仿射变换群保持一条直线 l_∞ 不变,因此仿射几何学是射影几何学的子几何学,仿射变换下的不变量除了射影几何学的不变量之外,还有把直线变成直线,把平行直线变成平行直线等性质.仿射变换虽然早已出现在欧拉及莫比乌斯的著作中,但克莱因在他的计划中并没有提到.克莱因进一步考虑了主变换群,实际上是相似变换群,相应的几何学是相似几何学;相似变换群的子群是运动群,相应的几何学是欧几里得几何学.

类似地,他进一步刻画双曲度量几何,也就是研究射影平面上使一个任意的、实的、非退化的二次曲线保持不变的所有变换

所构成的子群下的不变量,这个子群叫做双曲度量群,相应的几何学叫做双曲几何学,其中的不变量是与全同有关的那些量.同样,单纯椭圆几何学所研究的是使射影平面上一个虚椭圆保持不变的变换群,而二重椭圆几何学所研究的则是使三维空间中的球面保持不变的三维射影变换群的子群.这样他统一了射影几何学及各种度量几何学.

克莱因的计划不仅在于统一点几何学,而且从变换群的观点出发,把其他类型的几何学与任意空间元素的几何学都统一在一起,并且指出与它们对应的代数理论.例如,二次型理论同具有一条基本圆锥曲线的平面射影几何学等价;空间射影几何学与四元二次型理论等价;而线几何学与五维射影空间中二次流形的射影几何等价;平面反演几何学与四维射影空间中二次流形的射影几何等价;而且复二次型理论可以通过实球面射影几何学来表示.因此,二次型理论、反演几何学、直线几何学互相对应,它们的区别只是变元数目不同,而这自然把几何引导到高维中去.这样,几何的对象也就不仅仅是空间中的曲线、曲面和立体了.

克莱因进一步推广了这种观点,并提出更一般的问题.对于一个流形和这个流形的一个变换群,他以在这个变换群的变换之下其性质保持不变的观点研究这个流形的实体.在这种广义的意义下,克莱因考虑的不仅仅是通常以点为基础的几何学,而且考虑以任何一种点集,特别是一条曲线或一个曲面为基础的几何学,例如线几何学和球几何学.只要取同一变换群为几何学研究的基础,那么这种几何学的内容就不会改变,所以像流形的维数只是作为某种次要的东西出现.从这种观点出发,克莱因不仅把圆几何学及球几何学也看成研究射影变换群的某些子群的

不变性质,而且还进一步扩大他的计划的应用范围:代数几何学研究双有理变换下的不变性,拓扑学研究连续变换下的不变性等.虽然并非所有的几何学都可以纳入克莱因的分类框架,但是这种观点至今仍对几何学有着重要的影响,特别是强调变换下的不变性,对于力学及物理学思想的推动,大大超出了数学的范围.

2　S·李与连续变换群

2.1　S·李

S·李,1842 年 12 月 17 日生于挪威西部的诺德菲尤尔代德,他的父亲是一位路德新教牧师,S·李是 6 个孩子中最小的.1851 年他的父亲移居克里斯蒂安菲尤尔德(莫斯,在奥斯陆附近),他进入当地的公立中学学习,1857 年又转到首都克里斯蒂安尼亚(今奥斯陆)的尼森拉丁学校继续学习,1859 年中学毕业.

1859 年他进入克里斯蒂安尼亚大学学习,学习内容很杂,包括古代史及化学.教数学的讲师都很有名气.群论专家西洛教他们数论、代数及高等分析,1861 年起比耶克耐斯(Karl Anton Bjerknes,1825—1903)教他们应用数学、理论力学及天文学,但他当时对数学并不特别感兴趣.他一共学习了 6 年半,考试也通过了.1865 年大学毕业之后,他当私人教师.这时他想搞天文学,开始学习力学,由于阅读庞塞莱及普吕克尔的著作,才对数学感兴趣,从此开始自修数学,主要钻研的是法国几何学家的著作,如蒙日、庞塞莱、沙勒、杜阿美尔、拉梅等人的著作.1868 年在看到普吕克尔的著作后,他自称是普吕克尔的学生(虽然他们根本

没见过面),特别是他发挥了普吕克尔的非点的空间元素的思想.由于他的研究成果,1869年他获得了克里斯蒂安尼亚大学的奖学金,并到国外学习,这成为他生活道路上的第一个转折点.

1869年冬,他在柏林遇到克莱因,从此两人结下终身友谊.克莱因是普吕克尔的嫡系真传,对普吕克尔的倾心促使他们一起共同研究线几何学.1870年夏,两人结伴到巴黎,结识了达尔布及若尔当,特别是学习到群的概念,这对两人后来的工作都是至关重要的.但两人有所"分工",S·李在法国期间,受到法国"保圆变换"学派的影响,在1871年7月发现著名的"切触变换",同时接触到蒙日关于一阶偏微分方程的工作.1871年7月普法战争爆发以后,克莱因返回德国,S·李是挪威人,以为不会有什么事就留了下来.同年8月,他决定到意大利去滑雪,当走到枫丹白露地方时,却被当成德国间谍抓了起来,他蹲了一个月的监狱,由于达尔布的干预而获得释放,刚好在德国人围困巴黎之前回到德国,再次与克莱因聚首.

1871年他回到克里斯蒂安尼亚,在尼森拉丁学校教过一段时期书.1872年7月,他获得了博士学位,论文的题目是《论一类几何变换》.这时他发展了一阶偏微分方程理论.克里斯蒂安尼亚大学专门为他设立了一个副教授职位,这个位置并不要他教书,允许他不受教学任务的干扰,全心全意地投入研究工作.1872年秋他又去德国,同克莱因一起研究,还同德国数学家迈耶结识,这时他开始对微分方程积分理论进行研究.1873年起,他开始建立他的庞大的变换群理论.1873—1874年,他给出平面上所有的点变换及切触变换.1874年他结婚,婚后生有二女一子.这时他进入一个丰富多产的时期,特别是引入变换群理论对

微分方程的对称性加以研究.1876 年,他协助创立新的数学杂志《数学及自然科学文献》(*Archiv för mathematik og naturvidenskab*),这是挪威最早的专业期刊.同时,他和西洛共同编辑阿贝尔的全集,并于 1881 年出版.这样,他在挪威工作了 14 年,几乎完全是在孤立的状况下从事研究,没有什么交流,也缺少有才能的学生.除了克莱因及迈耶之外,他在国际上也不受重视.1882 年他再次去法国,结识了阿尔芳及拉盖尔等人,他们关于微分不变式的研究促使 S·李再度转向变换群的工作.

1886 年春,克莱因离开莱比锡大学到格廷根大学当教授,他的空缺想请 S·李继任,S·李接受了这个邀请.到了莱比锡后,他教出来许多学生,他们同他合作大大推动了李群理论的发展.他的名声也吸引了不少德国学生,恩格尔、谢弗斯、F·舒尔(Friedrich Schur,1856—1932)、史图迪(Eduard Study,1862—1930)以及豪斯道夫(Felix Hausdorff,1868—1942)是其中的佼佼者.前两位还帮助他完成了几部著作:3 大卷《变换群理论》(*Theorie der Transformationsgruppen*,1888—1893)、《微分方程讲义》(*Vorlesungen uber Differentialgleichungen*,1893)、《切触变换的几何学》(*Geometrie der Berührumgstransformationen*,1896)等.虽然他们都发展了 S·李的理论,但是 S·李的事业的真正推动者——基灵及É·嘉当却不是他的学生.他并不是很好相处的人,连帮他许多忙的克莱因都给他得罪了.他在《变换群理论》第 3 卷中说,一般人认为他是克莱因的学生,但实际上恰巧相反.这大大伤害了克莱因的感情.虽然克莱因不同他计较,继续同他交往,但克莱因的夫人却为此长期愤愤不平.

由于他巨大的名声,挪威政府做出特别的努力设法使他回国,其中包括在克里斯蒂安尼亚专为他设立教授职位,他接受

了,并于1898年返回祖国.不久,S·李于1899年2月18日去世,享年56岁.他于1892年当选为巴黎科学院通讯院士,1895年被选为英国皇家学会外籍会员,此外还获得许多荣誉,特别是1897年他荣获俄国喀山数理学会授予的第一届罗巴切夫斯基奖.他的著作被收入7卷《全集》(1922—1960)之中.

克莱因和S·李都站在当时数学的最前沿,对群有着深刻的认识.S·李的一句格言是"群能解决一切问题",他就是这样勉励自己和鼓舞学生的.但是,S·李的理论同现在的李群理论有很大不同,这是由于S·李的独特观点造成的.S·李的主要目的不是群本身,而是微分方程.他的出发点是想仿照伽罗华通过有限变换群解决代数方程问题的办法,通过连续变换群解决微分方程的可解性问题.他的主要目标并没有达到,不过,他对连续群进行研究的副产物却使这个"工具"成为一个独立的研究对象,甚至发展成一门独立的学科.另外,S·李的方法主要是分析的,他不喜欢抽象的、代数的方法,这大大限制了他的成就.就在他在世的时候,基灵和É·嘉当完成了复域上单李代数的分类,他们的方法完全决定李群理论以后的发展.而S·李却完全不理解他们的工作.

S·李的整个活动几乎都是研究连续变换群及不变式.他表明,这两个密切相关的领域能够把以前分散的各个学科——几何学、代数不变式论、力学、常微分方程及偏微分方程等统一在一起.1870年他在法国监狱里考虑的"切触变换"就是把整个哈密尔顿力学纳入群论体系的必经之路.

当时,正好是用群的思想来统一整个数学的时期.庞加莱说"群就是全部数学",并致力于把群与函数论和微分方程统一在一起,物理定律在他看来无非就是微分方程.而克莱因致力于把

群与几何学、代数方程论和代数不变式论统一起来.到 19 世纪末,群已由不见经传的抽象名词上升为数学中的新星,成为数学统一的基础.抽象群理论不仅推动了结构数学的产生,而且李群理论现在在整个数学中占有近乎中心的地位.李群理论同几何学有着密切的联系,它产生出几何学的重要研究对象——齐性空间,李群与三角级数结合形成抽象调和分析,它在物理学上的应用也推动了物理学的巨大进展.

不过,李群理论以后的这些发展与 S·李并不相干,从 1888 年起基灵所走的道路,虽然仍披着 S·李的外衣,却预示着另外一条真正通往现代李群理论之路,在这条道路上,至少要经过三个转折点:

①摆脱变换群的变换对象,使群成为抽象群.

②由对具体变换的研究变成对代数结构的研究,包括复半单李代数的结构理论及表示理论(1912 年由 É·嘉当完成).

③由局部的(无穷小)研究转向大范围的研究(1925 年由外尔及 É·嘉当开始).

李群出现百年之后,丢东涅讲:“李群成为数学的中心,没有它,什么大事也干不成.”他讲的当然不是 S·李的理论.有意思的是,不久之后,S·李的一些经典理论又悄悄地复兴,成为引人注目的对象.

2.2　连续变换群

2.2.1　连续变换群的来源

连续变换群的概念是 S·李一人的独创,在此之前有三股潮流引导这个概念的产生:

(1)置换群观念.置换群观念来自代数方程论,后来逐步成为独立的一般研究对象,它可看成是有穷集合到自身的变换的集合.1860年起经塞雷、克洛耐克、马蒂厄特别是若尔当的研究,已经系统化,并开始在其他领域应用.S·李本人在1863年就听说过伽罗华理论.

(2)几何变换及不变式观念.1841年起,数学家开始研究不变式论,几何上它来源于图形在坐标的线性变换下不变的特性,并据此加以分类.代数上它所考虑的是线性变换或映射变换的无穷集合,当时只知道两个变换之"积"仍是该集合中的变换.

(3)运动群的观念.第一个明确提出的连续变换群是若尔当在1867年提出的"运动群",这是三维欧氏空间中的平移群,不过他并没有把它作为一个独立的研究对象,也没有把它与上面两股潮流联系起来.

真正引导S·李得到连续变换群的是1869—1872年他独立得到或与克莱因合作得出的一系列富有成果的概念.

(1)几何元素观念的扩张.通常认为几何的元素是点,也就是线、面、体是点的集合.普吕克尔第一个把线作为几何元素,建立线几何学,其基本对象是线复形.克莱因是普吕克尔的学生,S·李是通过读普吕克尔的著作而进入数学领域并自认为是普吕克尔的学生的.因此,他们的变换观点就不仅仅限于点一点变换,而大大扩张了.1870年S·李创立切触变换,他还研究直线到球面的变换,创立了李球几何学.

(2)把不变性及不变量的观念推广到分析及微分几何学.S·李发现,通过求积法解微分方程的经典方法,实际上完全依赖于方程在"连续"族变换下的不变性质,并作为这个思想的应用.S·李的第一篇论文研究了瑞厄复形,这种复形是与四面体的面

交截于给定交比的四点的四直线集合.他的方法就是运用瑞厄复形,研究在三参数变换群($PGL(4,C)$的极大环面,使四面体的顶点不变)下的不变性质.1870 年春,他与克莱因合作,基本上定出平面射影群 $PGL(3,C)$的所有连通交换群.

(3)克莱因的埃尔兰根计划.1871 年以后,克莱因的兴趣转向非欧几何,进而以变换群为分类几何学的基础.其后,克莱因主要研究离散变换群,S·李主要研究连续变换群,但他们以群统一数学的观点是一致的.

(4)无穷小变换.在微积分发展初期,已有无穷小变换的概念.例如,笛卡尔已有瞬时转动中心的概念,这样,从无穷小观点来看,平面上的每个运动都可以看成一个转动.拉格朗日的解析力学也有类似的观点.1851 年,西尔维斯特为了求一般线性群 $GL(3,C)$的不变式,给他的矩阵元一个无穷小增量 $\alpha_j \mathrm{d}t$,从而不变式 $f((z_j))$满足

$$f((z_j + \alpha_j \mathrm{d}t)) = f((z_j)),$$

从而 f 满足线性偏微分方程

$$Xf = \sum_j \alpha_j \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0,$$

其中 X 实际上是表示方向导数的微分算子.这是最早明显写出的与无穷小变换对应的微分算子.其后,凯雷在计算特殊线性群 $SL(2,C)$的不变式时,也采用这种方法计算由两个无穷小变换得出的微分算子 X,Y,特别是他还明显算出 $XY - YX$,证明它也可由一个无穷小变换导出.不过算子的括号运算在一阶偏微分方程的雅可比—克莱布什理论中已经有了.当 X,Y 是函数时,熟知的有波瓦松括号及雅可比公式,对于这些相似之处,S·李是非常熟悉的,他是依照这个模式来建立自己的理论的.1868 年

若尔当在讨论运动群的论文中也从几何的观点出发,使用“无穷小变换”的概念,他首先引进由一个无穷小变换生成的单参数群的概念,并把它定义为“适当重复”该无穷小变换.这种观念在克莱因及S·李合著的论文(1871)中也用过,但他们所研究的是微分方程的积分曲线.

2.2.2 S·李的变换群理论

S·李的变换群理论正式在1874年发表,他曾多次谈到自己是在1873年开始研究连续变换群的,不过他在1873年写给迈耶的一封信中表明,1870年在巴黎时他已有变换群的概念.在1871年的一篇论文中,他已明确提出“变换群”这个词,并且明显提出问题,即决定 $GL(n,\mathrm{C})$ 的所有连续及不连续的子群.不过这个新领域对他来说显然并不容易,正如克莱因后来所说:“李无疑创造了连续算子群的想法……不过在当时一切还处于萌芽状态……”

经过几年的考虑,1873年S·李把自己的想法写信告诉迈耶.他由变换

$$x'_i=f_i(x_1,\cdots,x_n,a_1,\cdots,a_r)(1\leqslant i\leqslant n)$$

的“连续”群开始,其中 x'_i 依赖于 r 个参数 $a_1,\cdots,a_r$,而当参数为 $a_1^0,\cdots,a_r^0$ 时,此变换是恒等变换.从而在参数变化时,他进行泰勒展开

$$f_i(x_1,\cdots,x_n,a_1^0+z_1,\cdots,a_r^0+z_r)$$
$$=x_i+\sum_{k=1}^{r}z_kX_{ki}(x_1,\cdots,x_n)+\frac{1}{2}\sum_{k,h,j}z_kz_hX_{hj}\frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j}+\cdots,$$

并把上式写成

$$x'=G(x,z),$$

其中

$$x=(x_1,\cdots,x_n),$$

$$x'=(x'_1,\cdots,x'_n),$$

$$z=(z_1,\cdots,z_r).$$

由变换的组合

$$G(G(x,u),v)=G(x,H(u,v)),$$

其中 $H=(H_1,\cdots,H_r)$不依赖于 x,因此

$$H(u,0)=u,$$

$$H(0,v)=v,$$

$$H_i(u,v)=u_i+v_i+\frac{1}{2}\sum_{h,k}C^i_{hk}u_hv_h+\cdots.$$

于是 S·李得出关系

$$\sum_{j=1}^{n}\left(X_{hj}\frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j}-X_{kj}\frac{\partial X_{hi}}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=0}^{r}C^i_{hk}X_{li},$$

令

$$A_k(f)=\sum_{i=1}^{n}X_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

他得出

$$[A_h,A_k]=\sum_l C^l_{hk}A_l.$$

开始他称算子 $A_k(f)$为无穷小变换

$$\mathrm{d}x_i=X_{ki}\mathrm{d}t,\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

的“象征”(symbol),不久他就不加区别地称算子 $A_k(f)$为无穷小变换了.他通过切触变换及偏微分方程得到这个无穷小变换群,实际上是现在的李代数,后来他就抛开这些背景,专门研究这些“群”了.

1874 年以后,S·李继续研究变换群.一方面,他研究一般理

论,最后总结在3大卷《变换群理论》中.另一方面,他得出许多特殊的结果,其中包括定出直线及平面的连续变换群并加以分类.他还在1883年引进无限连续群,并开始涉足常微分方程.从1874年到1880年,他发表了十几篇有关连续群的论文,并同时研究一阶偏微分方程,特别是普法夫问题.在1877—1881年,他还研究了极小曲面.

S·李的《变换群理论》第Ⅰ卷及第Ⅲ卷中的5章是讨论所谓"连续有限群"的,其余部分讨论切触变换,在当时与连续群理论密切相关,现在看来,已经属于另外的学科了.第Ⅰ卷中总结的变换群理论,主要集中于S·李的三大定理,而现在这三大定理已成为李代数的公理.

S·李的第一定理是指函数f_i满足下列偏微分方程组:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_j}=\sum_{k=1}^{r}\xi_{ki}(f(x,a))\Psi_{kj}(a)\quad(1\leqslant i\leqslant n),\tag{1}$$

其中矩阵(ξ_{ki})具有极大秩,$\det(\Psi_{kj})\neq 0$;反之,如果函数f_i满足该方程及条件,则定义变换群的一个群芽.

S·李的第二定理给出ξ_{ki}之间以及Ψ_{ij}之间的关系.ξ_{ki}之间的关系为

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{ik}\frac{\partial \xi_{jl}}{\partial x_k}-\xi_{jk}\frac{\partial \xi_{il}}{\partial x_k}\right)=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}^{k}\xi_{kl}(1\leqslant i,j\leqslant r,1\leqslant l\leqslant n),$$

其中C_{ij}^{k}是常数(后称之为结构常数);Ψ_{ij}之间的关系按照毛瑞尔(Ludwig Maurer,1859—1927)在1890年的论文中所表述的,可以写为

$$\frac{\partial \Psi_{kl}}{\partial a_m}-\frac{\partial \Psi_{km}}{\partial a_l}=\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant r}C_{ij}^{k}(\Psi_{il}\Psi_{jm}-\Psi_{jl}\Psi_{im}),$$

其中$1\leqslant k,l,m\leqslant r$.引入无穷小变换$X_k$及$A_k$,可得现在熟知的

形式,令

$$X_k=\sum_{i=1}^{n}\xi_{ki}\frac{\partial}{\partial x_i}\quad(1\leqslant k\leqslant r),$$

$$A_k=\sum_{j=1}^{r}\alpha_{kj}\frac{\partial}{\partial a_j}\quad(1\leqslant k\leqslant r),$$

上面两式分别成为

$$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}^{k}X_k\quad(1\leqslant i,j\leqslant r),$$

$$[A_i,A_j]=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}^{k}A_k\quad(1\leqslant i,j\leqslant r).\tag{2}$$

反之,如果 r 个无穷小变换 $X_k(1\leqslant k\leqslant r)$线性无穷且满足条件(2),由这些变换生成的单参数子群就构成一个 r 参数变换群.

S·李的第三定理是给出结构常数 C_{ij}^{k}之间的关系

$$C_{ij}^{k}+C_{ji}^{k}=0,$$

$$\sum_{l=1}^{r}(C_{il}^{m}C_{jk}^{l}+C_{kl}^{m}C_{ij}^{l}+C_{jl}^{m}C_{ki}^{l})=0,$$

其中 $1\leqslant i,j,k,m\leqslant r$. 反之,如果满足上面两式,则存在无穷小变换系统满足

$$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{r}C_{ij}^{k}X_k\quad(1\leqslant i,j\leqslant r).$$

用现代语言表述,这些 X_i 形成李代数,反过来,每个有限维李代数均可如此得出.这后半个结果由F·舒尔在1889年证明.

S·李仿照置换群理论对变换群的结构问题进行了初步研究.他引进两变换群相似的概念,即存在一个变元的可逆坐标变换及一个参数的可逆坐标变换,将一个变换群变成另一个.他知道两变换相似的必要条件是其相应的李代数同构,由于他没有李代数观念,他称两群等连(gleichzusammengesetzt),但这个条件并不充分.他证明两群等连的充要条件是两群一一同态,这个词来源于若尔当.同样他也引入若尔当的另一词汇——映上同态,

而且知道其典型例子——伴随表示,以及它与群的中心的关系.他证明这些定理的主要工具都是雅可比—克莱布什关于一阶偏微分方程组的完全可积性定理,但没有引用弗罗宾尼乌斯的更一般的定理.

S·李还花费了很大力气把置换群的可迁性及本原性概念搬到变换群上,他还看出点的稳定子群与齐性空间概念的关系.不过,他始终在变换群中打圈子,而没能从置换群过渡到抽象群.同样,他基本上在局部打转,难得从大范围来考虑问题.更有甚者,他始终在微分方程及几何的应用中考虑问题,而不能跳出来对结构及分类问题进行研究.真正的现代李群、李代数的研究却不是S·李和他的学生的成果,而是由基灵从1888年开始研究,后由É·嘉当所继续,并成为结构数学的主流.可悲的是,S·李对于离开他的路线的基灵恨之入骨(他告诉他的学生:你们碰到基灵,就把他杀了),因此,他离开这个极富创造性的方向越来越远了.

3 群与微分方程

微分方程中群的影子很早就有,但是只有黎曼在1857年的超几何级数的论文中才首次明显地表现出来.1865年富克斯建立一般的复域上线性微分方程理论,研究解的代数性,群的概念才变得突出起来.富克斯理论一方面直接通向庞加莱的自守函数理论,另一方面通过克莱因与椭圆函数论相结合,这些问题成为19世纪70—80年代许多数学家研究的主要课题.

超几何方程是与群有关的最简单的方程,它的一个特殊情形是勒让德方程

$$(1-k^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1-3k^2}{k}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0,$$

它的解为椭圆积分的周期 K,K' 所满足,它们可以看成模 k^2 的函数

$$K=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

1829 年雅可比在《椭圆函数论新基础》中得出,对于与另一个模 λ^2 相应的解 L,L',如果满足

$$\frac{L}{L'}=p\frac{K}{K'},$$

其中 p 是素数,则 λ^2 与 k^2 满足$(p+1)$次多项式,而只有当 $p=5,7,11$ 时,次数可降至 p. 1832 年伽罗华在他的临终书信中讨论了这个问题,并且指出与 $PSL(2,Z/pZ)$的指数为 p 的子群有关.其后,埃尔米特等人搞清楚 $p=5$ 的变换与五次方程的关系,而对于 $p=7$ 的情形,直到 1879 年才由克莱因弄清楚,它与四次平面曲线及其上 28 条双切线相关.将模变换问题完全与椭圆函数脱钩,是胡尔维茨于 1881 年完成的.

对于超几何方程,库默尔在 1836 年发现的 24 个解已由变换群联系在一起,而真正搞清这个关系的是黎曼,他完全知道绕黎曼面上的闭路径,两个独立的解经历了一个变换,它可用单行矩阵来表示.黎曼也清楚两个矩阵之乘积,虽然埃尔米特于 1851 年最早引入单行(monodromie,一译单值)一词,而黎曼明显地定出由这些矩阵生成的超几何方程的单行群,但单行群一词首先是若尔当在他的巨著《通论》(1870)中引进的.富克斯在

1865—1868 年的三篇论文中，把黎曼的单行群理论推广到 n 阶线性常微分方程，由于问题的复杂性，他只考虑正则情形，这样解在扩张复平面上无本性奇点. 他也用单行矩阵研究解围绕奇点的解析开拓问题，在这个问题上，他不遵循黎曼方法（用到狄利克雷原理），而是完全按外尔斯特拉斯的幂级数方法，他的理论后来为弗罗宾尼乌斯及若尔当等所发展.

富克斯在论文中还提出一个重要问题：线性常微分方程的解何时全是代数函数？许多数学家在 19 世纪 70—80 年代通过各种方法来解这个问题. 1871 年施瓦茨首先用几何方法解决超几何方程的问题，他列出代数解的 15 种情形，但是他的方法难以推广. 1875—1878 年，富克斯、高尔丹用不变式论方法解决二阶方程的问题，而克莱因这时结合几何方法，运用不变式论及群论方法，更成功地解决问题. 在这个问题上最成功的是若尔当的群论方法，1876 年他先用群论方法解决二阶方程的代数解问题，1878 年又解决 n 阶方程的问题. 阿尔芳在 1884 年曾用不变式论来解 n 阶方程，但不久就由于庞加莱自守函数的成功而被人遗忘.

直接通向自守函数的微分方程是所谓拉梅方程，它是富克斯型方程，即

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-e_1}+\frac{1}{x-e_2}+\frac{1}{x-e_3}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$-\frac{[n(n+1)x+B]}{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}y=0.$$

它可以写成雅可比形式

$$\frac{d^2y}{dv^2}-[n(n+1)k^2\mathrm{sn}^2v+A]y=0,$$

或外尔斯特拉斯形式

$$\frac{d^2y}{du^2}-[n(n+1)P(u)+B]y=0.$$

拉梅方程是拉梅为解空间中的三重正交坐标而于 1845 年提出来的，他给出雅可比形式的一个解，它可表为 $\mathrm{sn}v$ 的 n 次多项式. 同年，刘维尔及海涅独立得出线性独立的第二个解. 埃尔米特考虑 A 可以是任意的情形，他在 1877—1882 年的一系列论文中证明，这类方程的解总是第二类椭圆函数. 而富克斯在 1878 年得出一般方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Py$$

的两个基本解都是第二类椭圆函数的条件. 他证明 P 是单值双周期函数，可明显表示为雅可比函数 H. 这个定理的逆定理也成立，毕卡在 1879 年给出证明.

在这种形势下，法国科学院在 1880 年提出以双周期函数系数的微分方程为大奖题目，结果阿尔芳获奖. 他在论文中把有理系数化为椭圆函数系数情形，而这正是富克斯在 1880—1881 年的一系列论文中所讨论的，由于他考虑的是一般的二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P(z)\frac{dy}{dz}+Q(z)y=0,$$

其中 $P(z)$，$Q(z)$是有理函数，微分方程不一定代数可积. 富克斯的这篇发表在 1880 年《克莱尔杂志》上的论文晦涩难懂，事实上很乱，也不完全，而它却引起法国年轻的数学奇才庞加莱的注意，1880 年 5 月 29 日他给富克斯写了一封信，要他进一步阐明. 他们开始通信，这导致自守函数论的产生.

4 庞加莱与自守函数论

4.1 庞加莱

庞加莱是19世纪末20世纪初法国最伟大的数学家,也是当时世界数学界首屈一指的人物.他于1854年4月29日生于法国南锡,父母都属于上层中产阶级.父母双方的家庭都在洛林居住有几代之久.他的祖父有两个儿子,一位是庞加莱的父亲莱昂(Leon Poincaré),他是一位医生并任南锡大学的医学教授;另一位是安托万(Antoine Poincaré),他曾在巴黎综合工科学校学习,后来在军事工程部队中晋升为高级军官.安托万的儿子莱芒(Raymond Nicolas Landry Poincaré,1860—1934)曾出任法兰西共和国总理(1912—1913),并且在第一次世界大战期间出任共和国总统(1913—1920);安托万的另一个儿子卢相(Lucien Poincaré)在大学里担任高级行政职务.

庞加莱自幼多病,由于运动神经共济失调,他不能很好地写字画画,5岁时患了一场白喉,留下喉头麻痹后遗症.他的视力很差,上课看不清黑板,也不能记笔记.在这种身体条件下,他无法像正常儿童那样活动与成长,不得不靠图书为伴.他有惊人的记忆力,可以说过目不忘,而且单靠听课,就能牢固掌握老师上课的教学内容,他的数学推导及计算不靠手头写写画画,而完全靠大脑完成.他可以迅速写出文章来而无需大改,因为一切早在头脑中按部就班地加工好了.1862年10月,庞加莱进入南锡公立中学学习,这时就已显示出他的数学才能,南锡中学的教授把他说成是"数学巨怪".1871年毕业,并进入预科中学学习,1872

年在全法中学优等生会考时，他荣获头奖，1873 年 10 月又以第一名的成绩考入巴黎综合工科学校．当时他的老师中有埃尔米特．1875 年毕业，并进入国立高等矿业学校学习，1878 年作为实习工程师到矿上工作，1879 年毕业并取得采矿工程师资格，其后从事过工程技术工作．在校期间，他曾自修数学，并且在 1878 年的旅途中，突然得到"自守函数"的思想，从而得到他的第一个数学发现．在这期间，他还写了数学论文，并于 1879 年 8 月在巴黎大学获得博士学位．

从这时起，他把主要精力投入到数学研究与教学活动中．1879—1881 年，他在卡恩大学理学院任分析学讲师，1881—1885 年任巴黎大学理学院分析学讲师，1885—1886 年任物理力学及实验力学讲师，1886 年晋升为理学院数学物理学及概率演算讲座教授，1896 年改为数学天文学及天体力学教授，直至去世．在这期间，庞加莱还曾兼任巴黎综合工科学校分析学讲师（1883—1897）以及普通天文学教授（1904—1908），1902 年以后还兼任高等邮电职业学校理论电学教授．他在巴黎大学理学院的讲课几乎遍及数学物理学的每一个领域，除了数学物理方程外，还讲过天体力学、位势理论、弹性力学、流体力学、热传导理论、热力学、电学、光学、气体分子运动论、概率论等，而且对世纪之交的新兴学科，如电子论、相对论、量子论等等，也讲授过．其中大部分讲义被整理成书，已出版的有十几种．另外，他还写过一些专著，如毛细现象理论、湍流理论等等．他的许多研究工作也是以这些学科为出发点，关于这些方面的论文占他所发表的论文总数的三分之二以上．

庞加莱一生发表近 500 篇研究论文，已收入 11 卷《全集》（1916—1954）之中，其中第 11 卷是对他工作的评述．他的许多

贡献是划时代的,开创了许多领域的新纪元.除了组合拓扑学外,还有自守函数论、微分方程定性理论、动力系统理论(稳定性、遍历性)、位势理论等.他还发展了许多新技术,如摄动法及渐近展开等.庞加莱的研究工作质量兼优,在法国内外获得巨大声誉,他几乎得到了一位数学家所能得到的全部荣誉,主要有:1887 年被选为巴黎科学院院士,1908 年被选为法兰西学士院院士.他还荣获许多国内国际奖励:1889 年因三体问题获瑞典国王奥斯卡二世(Oskar Ⅱ,1829—1907,1872—1907 年在位)奖,1901 年获英国皇家学会西尔维斯特奖章,1904 年获俄国喀山大学的罗巴切夫斯基奖,1905 年获匈牙利数学会的波耶奖.

庞加莱不仅是一位数学全才,而且他的科学思想博大精深,在物理学上接近于创立狭义相对论.他在科学哲学方面的四本著作《科学与假设》(1902)、《科学的价值》(1905)、《科学与方法》(1909)以及《最后的思想》(1912)被译成各种文字,有着广泛的影响.

4.2 自守函数论

1881 年 6 月 11 日,克莱因读到庞加莱的 3 篇有关富克斯函数的论文,第二天就写信给庞加莱,声称他自己早已在近几年深入考虑过这些题目,并且发表了关于椭圆模函数的几篇论文,他说:“当然这些只是你所考虑的关系的特殊情形,但是你仔细比较就会发现我已具有非常一般的观点.”自此,他开始和庞加莱通信,实际上克莱因意识到他已经有了一位对手.据克莱因后来讲,他从 1874 年开始研究黎曼的工作,这使他走向“老问题,即造出单变元的不连续群,特别是对应的自守函数”.他的确在直观拓扑方面以及代数、群论、不变式论方面发展了黎曼的思想,

并同数论联系起来.

与克莱因不同,庞加莱研究自守函数的方向更为一般,他是从函数论及微分方程出发的.庞加莱在 1878 年已得出他的一些主要想法,其后在瑞典新创办的《数学学报》前 5 卷中发表了 5 篇主要论文(1882—1884).值得注意的是,他开始这方面的研究时,除了埃尔米特关于模函数的工作之外,几乎什么也不知道.他没读过黎曼的著作,也不知道狄利克雷原理.他最早把自守函数称为富克斯函数,据说是受富克斯在 1880 年发表的一篇论文的启发,从而把自守函数同微分方程联系起来.这引起克莱因的不满及批评,克莱因提醒他注意自己早先几年的工作,并提到富克斯实际上对此毫无贡献.于是庞加莱在下一篇论文中把富克斯函数的推广戏谑地称为克莱因函数,尽管克莱因对此并没有贡献.

庞加莱一开始就有意识地把自守函数作为三角函数及椭圆函数的推广,在推广的过程中,不难看出椭圆函数发展的踪迹.推广的关键是群的观念,他研究的是无穷多分式线性变换

$$S_i : z \longrightarrow \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i},$$

其中 i 跑遍 $0,1,2,\cdots,\alpha_0=\delta_0=1,\gamma_0=\beta_0=0$,且满足 $\alpha_i\delta_i-\beta_i\gamma_i=1$,这些 S_i 构成一个真不连续群,他的目的首先是求单值复变函数 $F(z)$满足

$$F(z)=F\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right).$$

他首先研究系数均为实数的情形,他称这种群为富克斯群,称满足上述条件的函数为富克斯函数.后来他也研究系数为复数的情形,他称之为克莱因群及克莱因函数.

为了构造相应的自守函数,他引进级数

$$\Theta(z)=\sum_i H,$$

其中 $H(z)$是有理函数,他称之为 θ 富克斯函数或 θ 克莱因函数,显然,两个同 m 的 θ 富克斯函数的商就得出富克斯函数.克莱因函数也可以如法炮制.

显然,对应于相同的群的两个自守函数,存在一个代数关系,从而所有自守函数可以表为其中两个函数 z,ω 的有理函数,它们之间满足

$$f(z,\omega)=0,$$

这表示一条代数曲线,他证明其亏格可以通过基本域计算出来.庞加莱巧妙地利用非欧几何证明每一个真不连续群存在一个基本域,它以片断的直线或圆为边界,反过来,这种圆弧多边形当适合某些条件时,构成一个真不连续群的基本域.

对于二阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=\varphi(x,\omega)v,$$

其中 $f(x,\omega)=0$ 是代数关系,则由其两个线性独立的解 $v_1(x)$, $v_2(x)$的商

$$z=\frac{v_1(x)}{v_2(x)}$$

得到的反演 $x=g(z)$就是自守函数.这样,代数曲线的点的坐标可表示为单参数 z 的富克斯函数.更进一步,他证明每个具有代数系数的线性微分方程都可以通过富克斯函数及 ζ 富克斯函数积出来.

庞加莱不仅把自守函数论同函数论及微分方程联系起来,而且还应用到数论上,它表明三元不定二次型的算术变换理论

与非欧几何学是一回事.

庞加莱对自己的发现在《科学与方法》中有详尽的描述. 这本书表明,他在 1880 年 6 月 2 日已经研究富克斯函数的性质,并把它与非欧几何联系起来. 事实上,在 1880 年 5 月 28 日,也就是在给富克斯写信的前一天,他已经写了一篇论文,应征 1880 年法国科学院的大奖. 这篇论文获第二名,直到 1923 年才发表在《数学学报》上. 这篇论文实际上已包含富克斯函数的主要思想,但更多的内容出现在其后的三个附录中. 他把这三个附录匿名投寄到法国科学院,最近由数学史家格雷(Jeremy Gray, 1947—)在法国科学院的档案中发现,收到时间是 1880 年 6 月 28 日,9 月 6 日及 12 月 20 日,它们没有收入在庞加莱的《全集》中,其中包括二次型、非欧几何以及基本域的理论,这时他已得到可用 θ 富克斯级数来解代数系数的微分方程了. 他还研究了多边形分解,包括角度为 0 的情形.

因此,庞加莱第一篇公开发表的关于富克斯函数的论文是 1881 年的一系列短文,并由此同克莱因有一番较量. 但庞加莱的结果博大精深,克莱因并不是对手,到了 1882 年秋,克莱因完全垮掉了. 在这个期间,克莱因主要证明边界圆(Grenzkreis)定理,即每个亏格 >1 的黎曼曲面都可用圆盘状区域上无分支点的不变函数来表示. 不过,庞加莱陆续在《数学学报》上发表了 5 篇共 390 页的论文,已经把自守函数论弄得十分完全,以至于在当时没什么好做的了. 自守函数论最漂亮的结果是单值化定理,即任意黎曼面都可以用自守函数单值化. 1883 年,克莱因和庞加莱对此各发表了一个证明,但证明都不够完全. 直到 1907 年,科贝(Paul Koebe, 1882—1945)和庞加莱各自独立给出一个完整的证明.

到 20 世纪,关于参模空间以及克莱因群的研究成为一个热点,并深入到拓扑学、函数论、群论、几何学等领域,再次推动数学的全面发展.

第 16 章　基础研究

数学以精密科学而著称，它强调概念的普遍性、本质性，理论和方法的严格性、协调性，以及通过演绎的方法从最基本的公理推导出来．这类基础问题从数学一开始就出现，而且在许多关键时刻成为数学家和哲学家之间激烈争论的主题．这种带有哲学性质的讨论至今也不能说已经终结，但是从数学观点来看，用数学方法来讨论这些问题就构成了基础研究．从 19 世纪到 20 世纪初，数学的基础研究一直伴随着数学的发展，其中主要的问题有：

①数是什么？数应当是什么？量是否可以归结为数？虚数及复数是否合法？

②非欧几何是否合法？高维几何是否合法？空间是什么？

③什么是合理的几何学基础？什么是合理的公理系统？对这种公理系统的基本要求是什么？

④数学最基本的对象是什么？无穷集合论是否具有合法性？

在基础研究中，划时代的工作当属希尔伯特的《几何学基础》(1899)．它不仅把经典数学放置在一个可信的体系之上，而且开辟了元数学的未来前景，从而使基础研究成为数学研究的一个有机的组成部分．

1 希尔伯特

1862年1月23日，希尔伯特出生在东普鲁士的哥尼斯堡．祖父、父亲都是法官．希尔伯特刚刚上学念书时并不聪明，他8岁才上学，没有什么突出成绩．他上的文法学校以文科为主，没有自然科学课程，数学是不受重视的，拉丁文、希腊文是主修课程．大数学家高斯、黎曼在学习这些古典语言时都兴趣盎然，成绩出色，可是希尔伯特学起来却很吃力，往往死记硬背，勉强过关．据他的同学讲，他的理解力也颇迟钝，他自己觉得只有学起数学来还从容、舒服．最后一学年，希尔伯特转到另一所学校，这所学校比较重视数学，他以勤奋取得优秀的成绩．他的老师没有忽视他的才能所在，在评语中写道："他对数学表现出极强烈的兴趣，而且理解深刻．他能用非常好的方法掌握老师讲课的内容，并能有把握地、灵活地运用它们．"他的母亲对哲学、天文学、数学有着病态的爱好，她经常谈到素数的奇妙性质，而且对哥尼斯堡的伟大哲学家康德的遗迹有着近乎崇拜的感情．在母亲的影响下，他决定进哥尼斯堡大学攻读数学．

在大学的第一学期，希尔伯特听了积分法、矩阵论和曲面的曲率论三门课．在大学的第二学期，他就到海德尔堡大学去听当时微分方程的权威富克斯的讲课．富克斯课前不备课，讲课时现讲现推，这样非但没有影响教学质量，反而使学生能亲身体会到数学的思维过程实际上是怎样进行的．在第三学期，希尔伯特本来可以去当时德国数学的中心——柏林大学，可是他太想家了，还是回到哥尼斯堡大学念书．H·韦伯是该校的数学教授，他是一位数论、代数函数论专家，希尔伯特听了他的"数论"和"椭圆

函数论”的课,还参加了 H·韦伯的关于“不变式理论”的讨论班.正是这个讨论班使他接触到这个新领域,它在以后的 10 年里是希尔伯特的主要研究方向.1883 年 H·韦伯到柏林去当教授,继任数学教授的是林德曼,1882 年林德曼证明圆周率 π 是个超越数,因此成了数学界的大明星.林德曼的确是希尔伯特的真正老师,是他使希尔伯特转向不变式论研究.1884 年希尔伯特的博士论文题目也是他出的.希尔伯特在 1893 年的一篇论文中,给出 e 和 π 是超越数的一个非常简单的证明,这可以看成是林德曼工作的继续.

希尔伯特在大学里所受到的最大影响不是听讲,不是看书,也不是参加讨论班,而是同两位青年数学家的交往.一位是闵可夫斯基,他比希尔伯特小 2 岁,却比希尔伯特早半年上大学;另一位是胡尔维茨,1884 年春他到哥尼斯堡大学任副教授.他比希尔伯特大 3 岁,却已经对数学的整个领域有着非常深刻的了解.希尔伯特同这两位良师益友的交往是他一生中最幸福难忘的时刻.每天下午 5 时,他们三人一起在校园里散步,在日复一日的散步中,他们考察了数学世界的每一个王国,讨论了当前数学的状况,交换新得到的知识,交流彼此的想法和研究计划,就这样,三人结成了终身友谊.胡尔维茨以其全面、系统的知识对其他两位有着十分深刻的影响.希尔伯特用这种既容易而又有趣的学习方式,像海绵吸水一样吸收数学知识,给自己未来的事业打下了牢固而全面的基础.1884 年 12 月 11 日希尔伯特通过了口试,1885 年 2 月 7 日他通过答辩正式被授予哲学博士学位.

1885 年秋,希尔伯特到莱比锡跟着克莱因学习.圣诞节时,他成为克莱因家庭的座上客.在克莱因的劝说之下,他和史图迪一起到巴黎访问.在巴黎,他见到庞加莱、毕卡、达尔布等人,特

别是受到埃尔米特的热情鼓励.回来时,克莱因已经离开莱比锡到格廷根,希尔伯特便去格廷根向克莱因作了汇报,因为克莱因十分关心法国数学的发展状况.其后,希尔伯特返回家乡,并取得讲师资格.1886年冬,他开始以讲师资格在哥尼斯堡大学开课,并继续他对不变式论的研究.同时,他也关心整个数学的发展,他从1885年底开始记下自己的思想及问题,共有三大本笔记.1888年复活节期间,他曾到柏林、莱比锡、格廷根、埃尔兰根等大学去访问,见到20多位教授,并记下同他们的谈话,这对他后来的思想发展有一定的影响.

1888年夏,希尔伯特发表一篇4页的短文,解决了不变式理论的中心问题——任何 n 元型的不变式均具有有限基.这篇论文的意义不仅在于解决了一门学科的关键问题,更重要的是在数学方法论上完成了一次革命——用存在性证明来代替构造性证明.在当时的状况下,这是不能被接受的.不变式之王高尔丹叫嚷:"这不是数学,这是神学."许多人也对他的结果的可靠性表示怀疑.于是他不得不花上几年时间再用大家承认的构造性方法来证明这个定理.他成功了,大家也就无话可说了,连高尔丹也说:"神学也有神学的用处嘛!"这样,他开始成为青年数学家中的佼佼者.1892年春,他的好朋友胡尔维茨到瑞士苏黎世综合工科大学任教授,他接替其职务成为副教授.1893年秋,林德曼去了慕尼黑,他升为教授.这时他认为不变式论已经完成,于是开始转向数论的研究.1893年在慕尼黑召开的德国数学家联合会上,宣读了他关于数论的第一篇论文,其中证明了代数数域的基本定理——每一个理想可以惟一分解为素理想.这个定理以前由戴德金和克洛耐克用不同的方法证明过,但他的证明是新的.在这次会议上,德国数学家联合会委托希尔伯特和

闵可夫斯基在两年之内准备一篇"数论报告",可是闵可夫斯基很快就没有胃口搞下去,整个工作由希尔伯特独自完成.当然,他不断地征求他的朋友们,特别是闵可夫斯基的意见.这篇报告最后于1897年4月完成,它大大超过一篇报告的分量,是数学中最优秀的综合报告,几十年中一直作为代数数论学习者手中的"圣经".

1894年12月,H·韦伯去斯特拉斯堡大学任教,空出格廷根大学数学教授席位.在克莱因的积极帮助下,希尔伯特成为格廷根大学教授.1895年3月希尔伯特移居格廷根,从此同克莱因一起开辟了格廷根数学大繁荣的新局面.

希尔伯特到了格廷根后,三年来只谈"数域",可是1898年到1899年冬他转而讲授"几何基础",这使人们产生惊异的感觉,不过,他对几何基础问题的兴趣并不是自那时开始的.1891年,他曾在哈勒听过H·维纳(Hermann Wiener,1857—1939)关于几何基础的讲演.在返回哥尼斯堡的路上,他在柏林车站对人说,在一切几何学命题中,"我们必定可以用桌子、椅子和啤酒杯来代替点、线、面".这种朴素的说法,包含着他后来在《几何学基础》中阐述的本质思想.1899年初为纪念高斯—韦伯纪念像的建立,出版了文集,其中包括希尔伯特的《几何学基础》(*Grundlagen der Geometrie*).《几何学基础》是他的著作中读者最多的一部,1943年之前再版7次,他去世后又再版3次.它不仅对几何学的影响至为巨大,而且预示着后来他关于数学基础的工作.

1899年底,第二届国际数学家大会邀请他作一次讲演.在这世纪交替之际,他应该讲些什么呢?于是,他和闵可夫斯基商量.闵可夫斯基回信说,"最有吸引力的题材,莫过于展望数学的未来,列出在新世纪里数学家应去努力解决的问题.这样一个题

材将会使你的讲演在今后几十年的时间里成为人们议论的话题”.当然,这样做是极为困难的.经过一番考虑,希尔伯特决定提出一批急需解决的数学问题.经过半年的准备,希尔伯特把这篇长达40页的文章带到巴黎去.1900年8月8日,他在大会上作了这个讲演,他没能全讲,实际上他只讲了23个问题中的10个问题.他在这篇具有历史意义的演说中,强调了有具体成果的大问题的重要性.他说:“只要一门科学分支中充满着大量问题,它就充满生命力,缺少问题则意味着死亡或独立发展的终止.正如人类的每种事业都是为了达到某种最终目的一样,数学研究需要问题,解决问题能使研究者的力量得到锻炼,通过解决问题他可以发现新方法及新观点,并且扩大他的眼界.”他还说:“谁眼前没有问题而去探索方法就很可能是无用的探索.”他所讲的问题的确成为20世纪数学发展的方向,前三个是数学基础论的问题,在当时这门学科可以说还没有露头,而在20世纪已经发展成为一个庞大的领域.他对于基础的重视正预示着未来数学的方向.其次四个问题是关于数论和代数方面的,一个是超越数问题,一个是素数问题,还有实代数曲线的问题,这些问题都已经成为新学科,现在仍被人们紧张地研究着.最后三个分析问题都是19世纪的重大问题,在20世纪也取得相当大的进展,但是尚未彻底解决.他说,他只提供了一些问题的样品.他最后表示,他不相信也不希望出现数学被割裂成细小分支而彼此互不关联的情况,他认为,数学科学是一个不可分割的有机整体,它的生命力正是在于其各个分支之间的联系.他的这些问题为统一数学,增进数学家相互了解,防止过分专门化提供了良好的基础.正如闵可夫斯基所预料的,希尔伯特的这个演讲成为20世纪数学发展的一个指南、一个缩影.

20世纪初，世界上学数学的学生都受到同样的劝告："打起你的背包来，到格廷根去！"这样，听希尔伯特讲课的学生经常达到几百人，有时候连窗台上也坐满了人. 20世纪著名数学家外尔回忆说，他到格廷根时还是18岁的乡下孩子，一到大学就去听希尔伯特的课，"他讲的内容一直钻进我的脑子，新世界的门对我打开……"外尔立即暗暗下定决心，必须用一切办法来阅览希尔伯特所写的一切. 他还说过，希尔伯特的"光辉在我们那些共同的疑虑和失败的岁月中仍旧抚慰着我的心灵". 许多著名物理学家也听过希尔伯特的课.

在1900年冬，瑞典数学家霍姆格林在希尔伯特的讨论班上报告了弗瑞德霍姆最近关于积分方程的初步结果，马上激起希尔伯特的莫大兴趣. 希尔伯特一眼就看出积分方程和无穷多变元的线性方程的相似性，它们之间可以通过极限过程联系起来. 围绕希尔伯特的青年数学家形成了一个大的国际学派，积分方程成为当时最时髦的东西，不仅在德国，在法国、意大利乃至大西洋彼岸也是如此. 但是，整个效果却是给分析带来可观的变化. 泛函分析这门崭新的学科以它的第一个空间（希尔伯特空间的特例）的出现而宣告自己的诞生. 而对物理学家最有意义的事是希尔伯特创造了希尔伯特空间的算子谱理论. 20年后，量子力学就是用算子谱来解释原子光谱的. 希尔伯特在研究积分方程理论的过程中，一刻也没有忽略物理学的革命性进展. 他知道线性积分方程理论在分析、几何和力学上有着多方面的应用，难道不能使这个理论成为新的理论物理学的重要工具吗？1912年起，他开始用积分方程理论研究辐射理论. 在3篇文章中，他最后把辐射理论公理化. 在他看来，一门物理学到最后也必须公理化才算完整. 实际上他的目标要大得多，他要把整个物理学公

理化,但他没有成功.

早在1902年秋,闵可夫斯基到格廷根担任教授,这两位朋友迎来了他们的第二个青春.希尔伯特和他的朋友密切合作,系统地研究理论物理学,经常同这门邻近学科保持接触.闵可夫斯基关于相对论的工作就是这些共同研究的第一个成果.1909年闵可夫斯基去世时,希尔伯特这样谈起他们的友谊:“我们爱我们的科学超过了一切,正是它把我们联系在一起.它像是盛开的花园,花园中有许多平整的小径,可以使我们从容地左右环顾,毫不费力地尽情享受,特别是有趣味相投的伴侣在身旁;但是,我们也喜欢搜寻隐密的小路,去发现美丽的景色,当我们向对方指出来时,我们的快乐就更加完美.”闵可夫斯基去世以后,一直到1930年,希尔伯特还经常讲物理方面的课程,并指导讨论班.

从19世纪末起,希尔伯特就对数学基础极为关注,他的目标是把整个数学还原到实数、整数,最后建立在集合论的基础上.但是由于对分析的研究而中断一段时间.直到1917年9月他在苏黎世讲演“公理化思想”,才又回到数学基础问题.1922年他提出希尔伯特纲领,建立了证明论的体系,在其后十几年中发展了这个理论.1928年他和阿克曼(Walter Ackermann,1896—1962)合著的《理论逻辑纲要》(*Grundzüge der theoretischen Logik*)就是一本简明的数理逻辑入门书.遗憾的是,由于哥德尔在1931年证明不完全定理,才使得他不得不对他的形式主义纲领做适当的修正.1934—1939年出版的《数学基础》(*Grundlagen der Mathematik*)一、二卷是这方面的总结,这本书主要是贝耐斯(Paul Bernays,1888—1977)写的,但其精神实质完全是希尔伯特本人的.

1930年,68岁的希尔伯特从格廷根大学教授的职位上退

休，不过他还继续上了两年课．在 35 年的教授生涯中，他指导了 69 位博士生，听过他讲演的更是不计其数，他的影响远远超出德国而遍布全世界．

1933 年希特勒上台给世界带来大灾难，也破坏了德国数学的根基，格廷根数学的光荣也烟消云散，希尔伯特已经无能为力了．

1942 年初，80 岁高龄的希尔伯特在格廷根的街道上摔倒，折断了手臂．由于这次事故，他的身体活动不便，还引起并发症，1943 年 2 月 14 日他与世长辞．

2　几何基础

第一个几何学基础是由欧几里得的《几何原本》奠定的，它在数学史上的地位是无可争议的，其主要贡献大致有四个方面：

(1)把零散的数学知识组成一门科学体系．

(2)创立公理方法，从定义、公理、公设出发，建立数学的逻辑基础．

(3)强调命题的证明，从而把数学变成一门不依赖经验的演绎推理科学．

(4)使数学成为严密科学的代表以及训练逻辑推理的教育手段．

但欧几里得体系存在许多缺陷，2 000多年来遭到各方面的批评．例如，有的公理(如所有直角都相等)是多余的，有许多概念诉诸直观(如重合)等等，其主要的缺陷是：

(1)欧几里得的许多定义是无意义的循环定义，如定义点是没有部分的，定义线“有长无宽”等．

(2)许多术语没有明确的意义,实际上是承认直观的考虑,如一点在“两点之间”等.

(3)逻辑结构的缺陷,在证明的过程中有许多默认的假定,例如在证明命题 I_{16}时,不自觉地假定直线的无限性.

在希尔伯特之前,已有许多人对这些缺陷提出补救的方法,其中主要是德国数学家帕什(Moritz Pasch,1843—1930).帕什在1882年出版的《近代几何学讲义》中认为,几何学的基本命题应该从实验得来,但进一步的展开应遵循纯逻辑推断的途径.帕什用一套公理来实现他的计划,他列举出12条公理(相应于希尔伯特的结合公理及顺序公理),后来又发表10条合同公理,其中包括阿基米德公理.这样他已经非常接近一个完整的几何学公理系统了.但是,帕什的系统有一系列缺点:

(1)只讨论线段及平面片而不考虑直线及平面,使讨论变得极为繁复.

(2)没有把结合公理与从属公理分别列在不同的组中.

(3)合同公理太多.

在帕什及H·维纳等人的影响下,希尔伯特完成了几何学基础的彻底革新.

1899年希尔伯特发表的《几何学基础》不仅彻底清除了欧几里得几何学体系中的缺陷,建立起新的几何学基础,而且树立了现代数学的公理化模式,发展了公理学,推动了整个数学基础的研究.其重点在于:

(1)提出一些原始术语,对这些原始术语并不作定义.

(2)原始术语的性质只由公理反映出来的性质所决定.

(3)对于公理系统中的每一公理是否符合我们的直观不予考虑,只考虑公理系统中的公理是否彼此之间没有矛盾,也就是

相容性.

希尔伯特在《几何学基础》第一版中提出把点、线、面、在…上、在…之间和全等作为原始概念，并举出 21 条公理，其后作了一些改动及调整. 在他生前最后一版《几何学基础》(1930)中，提出五组共 20 条公理的表：

第一组：结合公理(共 8 条公理)；

第二组：顺序公理(共 4 条公理)；

第三组：合同公理(共 5 条公理)；

第四组：连续公理(共 2 条公理)；

第五组：平行公理(1 条公理).

希尔伯特的公理系统非常适合开拓一个几何理论的系统. 第一版中的连续公理只有一条，即阿基米德公理. 经庞加莱提醒，希尔伯特另补上一条完备公理. 但是，希尔伯特实际上发现，可以完全没有完备公理，也可以大部分不要阿基米德公理. 换句话说，没有连续公理的几何学照样可以行得通. 他在《几何学基础》第三、四章中开拓了这种非阿基米德几何学，他指出，在几何学中不一定要用数的概念，只用几何方法也可以定义运算. 为此，他引进"线段演算"，定义加法、乘法及其逆运算. 希尔伯特继而指出，通过公理的否定和加减可以得到新几何学. 他在第五、六章中建立了射影几何学的公理，这时他除去了第三组公理. 他的一个贡献是认识到，平面上的德萨格公理不能由平面射影几何学公理推出，因此德萨格公理或其否定可以加入到射影几何学公理当中，并建立不同的几何学系统.

希尔伯特以后，掀起一个数学公理化的热潮. 在欧氏几何学方面，皮埃利在 1899 年构造出一个公理系统，其中以点及运动作为原始术语，共有 20 条公理. 维布仑(Oswald Veblen, 1880—

1960)的公理系统以点及序为原始术语,共有 16 条公理.亨廷顿(Edward Vermilye Huntington,1874—1952)的公理系统以球及包含为原始术语,共有 23 条公理.帕什及希尔伯特之后,还有意大利数学家的许多工作,其中伏隆耐斯在 1891 年发表的《几何学基础》中,首次提出非阿基米德几何学.用运动的语言来处理合同概念的有舒尔在 1909 年发表的《几何学基础》和瓦仑(Theodor Vahlen,1869—1945)在 1905 年出版的《抽象几何学》.

射影几何学的公理化甚至比希尔伯特的公理系统还要早.1882 年帕什的《近代几何学讲义》开辟了一个新方向,他曾给出一个公理系统.其后,皮亚诺在 1894 年继续这方面的研究,由皮埃利在 1899 年完成.恩瑞克斯在 1898 年,莫尔(Eliakim Haines Moore,1862—1932)在 1902 年,舒尔在 1902 年都分别对射影几何学进行公理化.1908 年维布仑和杨(John Wesley Young,1879—1932)给出射影几何学完全独立的公理系统,用公理化来处理射影几何学的著作有他们合著的《射影几何学》Ⅰ,Ⅱ(1910,1917).英国著名数学家、哲学家怀特海(Alfred North Whitehead,1861—1947)在 1906—1907 年也提出了自己的公理系统.

从群论的角度将几何学公理化始于丹麦数学家赫尔姆斯列夫(Johannes Hjelmslev,1873—1950)发表的论文《平面几何学的新基础》(1907),其后由德国数学家托姆逊(Gerhard Thomsen,1899—1934)及巴赫曼(Friedrich Bachmann,1909—1982)等人所继续.

对于非欧几何学,希尔伯特的公理系统需要作改动.双曲几何学较为简单,只需用罗氏公理代替平行公理,其他公理可以保持不动.但是对于椭圆几何学来说,就不这么简单了,不仅需要去掉平行公理,加上任意两条直线都有一个公共点(单重椭圆几

何学)或至少有一个公共点(双重椭圆几何学)的公理,而且还必须改变另外一些公理,特别是顺序公理.哈尔斯特德(George Bruce Halsted,1853—1922)在1904年提出了双重椭圆几何学的公理系统,1905年海森伯格(Gerhard Hessenberg,1874—1925)提出了单重椭圆几何学的公理系统.

希尔伯特不仅为欧氏几何学奠定了新的公理化基础,更重要的是建立了一套模式来处理任何数学对象,并把它们建立在可靠的公理基础之上.他明确提出对公理系统的要求:

(1)无矛盾性,也称之为协调性、一致性、相容性,也就是由公理系统不能推出相互矛盾的结论.

(2)独立性,也就是公理系统中没有一个公理可以由其他公理推出.

另外,人们还希望公理系统有完全性及范畴性两个比较好的性质,前者是指凡是有关原始术语的命题或它的否定均可由公理推出,后者是指凡是适合公理系统的模型均同构,也就是满足公理系统的对象基本上是惟一的.这个概念是维布仑在1904年首先提出的.由于一般的公理系统不一定有完全性,更难得有范畴性,所以一般对公理系统不能要求太高.但无论如何,无矛盾性是公理系统的必要条件,因为不满足这个条件的公理系统根本就毫无价值.

希尔伯特为证明公理系统的无矛盾性,发明了构造模型的方法,也就是如果我们对几何公理给出一个算术模型或算术解释,我们就可以相信它是无矛盾的.希尔伯特的具体做法实际上利用了解析几何的方法,即把一个点同一对有序实数(a,b)相对应,把一条直线与一组联比$(u:v:w)$(其中u,v不为0)相对应.如果$ua+vb+w=0$,则点(a,b)在直线上.这样公理中的几

何语言均可翻译成实数与方程的语言,即成为等式或不等式.如果这些等式或不等式相容,即推不出矛盾的结果,则原公理无矛盾.为了证明公理系统的独立性,他也是采用构造模型的方法,即构造出一个模型不满足某一条公理而满足其他所有公理,如果能构造出这样一个模型,那就说明这一条公理不可能是其他公理的推论.从建立非欧几何学的模型时起,人们已经这样做了.另外,对于伏隆耐斯的非阿基米德几何学,列维-奇维塔已构造出一个满意的算术模型.现在,希尔伯特构造模型的方法已发展为证明公理系统的无矛盾性和独立性的标准方法.

3 实数理论

到 19 世纪中期,无论是分析基础的建立,还是后来的几何学基础的建立,最终归结为实数系的严密的逻辑定义.虽然古希腊人早就发现了无理数,但是无法有效地处理它们,并且形成了算术最终不如几何学可靠的观念.希腊人对实数连续统以及无穷也有许多探索,但终归不能自圆其说.长期以来,对于以自然数为基础的数论和以比例、几何为基础的量论是分别处理的,没有统一的办法.16—17 世纪,几何思想仍占统治地位,符号代数学只是形式地按照处理数的办法去处理量.随着代数的发展,许多数学家开始认为算术才更为可靠、真实,比如高斯在 19 世纪初已有这种看法,但是他没有对量建立可靠的算术基础.而符号代数学的基础始终不过是假定而已.直到 1833—1835 年,哈密尔顿在爱尔兰皇家学会上宣读两篇论文,并以《代数学作为纯时间的科学》为题发表文章,对无理数做了第一次处理,即把有理数及无理数的全体一起放在时间概念的基础上.他的基础仍然

诉诸直观,但他使有理数和无理数处于平等的地位而且不可分割地构成实数.他也有用无理数的分划定义无理数的思想,不过并没有完成.

长期以来,数学家都同意柯西关于无理数的概念,即无理数是有理数列的极限.但是这个定义有逻辑上的困难,而这点常为数学家所忽略.最先感到有必要建立实数理论的是外尔斯特拉斯及戴德金.1859 年外尔斯特拉斯在柏林的授课中建立了无理数的理论,但是长期以来并没有发表.戴德金是因为在 1858 年秋讲授微积分基础时,深感缺乏可靠的实数理论.他认为,许多基本的算术定理都没有得到严格证明,例如$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.他的实数理论在 1872 年以《连续性与无理数》的小册子发表,其中建立了戴德金截断或分割的概念,成为大家广泛接受的实数理论.

1869 年法国数学家梅莱(Hugues Charles Robert Méray, 1835—1911)发表论文,以有理数为基础给无理数下了一个定义,1872 年他在《无穷小分析新纲要》(*Nouveau Precis d' Analyse infinitesimal*)中重新阐述了该理论.他的定义与 G·康托尔所用的"基本序列极限"方法实际上是一样的.1870 年 G·康托尔在研究傅立叶级数时考虑到实数结构,他也是在 1872 年发表了自己的结果.同年,德国数学家海涅给出无理数的算术定义,也是建立在有理数序列的基础之上.这些定义无理数的方法尽管严密,但是逻辑上并不很自然,使用上也不方便.实际上,数学家通常采用一种熟知的小数表示法,也是一般人习惯的做法.沃利斯早在 1696 年曾把有理数与循环小数等同起来,无理数当然可以用不循环小数表示.史托尔茨在他的《一般算术讲义》中证明,每个无理数可以表示为不循环小数,他于是就采用这样的无理数定义.另外,也有许多数学家持有一种保守的观点,他们反对无理数理

论,其代表人物是克洛耐克及汉克尔.

所有这些无理数的定义都是在有理数为已知的情形下建立的,其中G·康托尔引进的“基本序列”是非常重要的.所谓基本序列是指一个(有理数)序列 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ 对于给定的正有理数 $\varepsilon > 0$,存在一个正整数 m,使得当 $n > N$ 时,恒有

$$|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon.$$

如果两个基本序列 a_k, b_k,当 $k \to \infty$ 时,

$$|a_k - b_k| \to 0,$$

则称这两个基本序列等价.于是,G·康托尔把实数定义为基本序列 $(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$ 的等价类,记作 a,利用基本序列可以自然地定义实数的加法、减法、乘法、除法,以及它们之间的等于、大于、小于关系.这样定义的实数既包含有理数,也包含无理数,而且由实数构成的基本序列的极限也在实数中,从而证明了实数系的完备性.

现在普遍公认的无理数理论是戴德金在1872年出版的《连续性与无理数》中提出来的.他在该书中首先讨论直线的连续性,特别是区别开稠密性与连续性,然后他把直线与实数对应起来,最后定义戴德金截断或分割.他的思想清楚地表达在下面的引文中:

“……上面把有理数比作直线,结果使直线上充满了间隙,它是不完备的、不连续的,而我们则把直线看成是没有间隙的、完备的和连续的.直线的连续性是什么意思?这个问题的答案必须包含研究所有连续区域时所根据的科学基础,只是泛泛而谈其最小子集的不间断的连续性,不会产生什么结果.我们必须要有连续性的一个精确定义,使它可以成为逻辑推理的基础.长期以来,我们对这些事情进行了深入思考,但始终没有取得成

果,直到最近我才发现我所要寻求的答案,不同的人对于我的发现将会有不同的判断,但我相信大多数人都会觉得它平凡无奇.在上一段中我曾经指出,直线上每一点 P 都将直线分成两部分,使得其中一部分的点都在另一部分的点的左方.我确信,连续性的实质就在于它的反面,也就是下面的原理:如果直线上所有的点都属于两类,使得第一类中每一点都在另一类中每一点的左方,那么就存在惟一的一个点,它产生了把直线分成两部分的分划."

戴德金的无理数理论的核心是他的"截断"(schnitt)或"分割"概念.一个截断把所有有理数分成两类,使得第一类中的每一个数都小于第二类中的每一个数;如果这个截断不"对应"于一个有理数,那么它就"定义"一个无理数.

假设我们已经指定某些规则,它们把所有有理数分成两类(比如说"左"类和"右"类),使得左类中的每一个数小于右类中的每一个数,在这个假设之下,下面三种互相排斥的情形只有一种是可能的:

(A)在右类中可以存在一个数小于该类中其他每一个数.

(B)在左类中可以存在一个数大于该类中其他每一个数.

(C)在(A)、(B)中所讲的数((A)中最小、(B)中最大)都不存在.

可能导出无理数的是(C).因为假如(C)成立,我们假设的规则就在所有有理数的集合中"定义"一个确定的中断或截断,仿佛左类和右类趋于交会在一起.为了使两类交会,这个截断必须用某个"数"填补起来,但是根据(C)可知,不可能由有理数填补,这样一来,这个截断就定义了一个无理数.接着,他给出一个截断大于另一个截断的定义.在定义了不等关系之后,他证明实

数具有下列性质：

①若 $\alpha>\beta$ 且 $\beta>\gamma$，则 $\alpha>\gamma$.

②不同实数 α 及 γ 之间存在无穷多个数.

③如果实数全体被划分为两类，且一类中的每一个数都小于另一类中的每一个数，则必有一个且仅有一个数产生这个截断.

有了实数的截断定义之后，自然地可以定义两个截断的加法及乘法，它们满足交换律和结合律.这样原来没有严格证明的公式

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$$

也就迎刃而解了.

在19世纪70年代初建立起基本上令人满意的实数系定义之后，分析基础可以说大功告成.但是从数学的逻辑基础来看，尚未完成.为了建立数学的逻辑基础，1870年以后，数学家从下面四个方向继续进行研究：

(1)建立有理数系及整数系的基础.所有的实数定义均假定有理数为已知，但当时有理数的基础并未很好地建立，因此很需要进一步奠定基础的基础，这是戴德金在1872年建立实数理论之后，花费了几年时间所做的事，他的最终成果是1888年出版的《数是什么，数应当是什么》(*Was sind und Was sollen die Zahlen*)一书.实际上这本书中已含有皮亚诺在1889年发表的自然数公理的原型.

(2)建立无穷集合的理论.有关实数系的定义均离不开无穷集合，换句话说，从分析出发，实数集或实数线中到底包含多少点？这些问题是G·康托尔从1872年以后所考虑的中心问题，他由此建立起集合论.

(3)实数系的公理化.希尔伯特的《几何学基础》把几何学公理的真实性归结为实数系的真实性,这就需要建立起实数系统的公理,这是希尔伯特在1899年以后所着重考虑的一个问题.

(4)数理逻辑的建立.到1900年左右,原来数学所讨论的许多对象,如数、量、函数、群、空间、集合等等,逐步归结为(或还原为)越来越基本的对象,最后剩下的是数(自然数)、集合、逻辑.许多刨根问底的人仍试图再进一步还原,首先是弗瑞格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege,1848—1925)试图把数还原为逻辑,他在1884年出版的《算术基础》(*Die Grundlagen der Arithmetik*)以及在1893年出版的《算术的基本法则》(*Grundgesetze der Arithmetik*)就是这方面的尝试.这种还原连同逻辑的符号化、证明、计算及公理的基础研究,构成20世纪前30年蓬勃发展的数理逻辑与数学基础的内容.这种还原虽最终以失败告终,但是它为现代数学增加了极其丰富的内容.

4　整数理论

由于实数理论是建立在有理数集合的基础上的,自然考虑到要建立有理数理论,这又涉及自然数理论以及由自然数生成有理数的问题.

在戴德金的《连续性与无理数》(1872)一书中,主要的问题是阐述连续性的概念.为此,他定义无理数,并把无理数加入到有理数中而成为完整的实数集合,这些都是建立在有理数为已知的基础上的.1872—1878年,连续性问题获得解决,他开始深入下一步的问题——有理数的生成问题,实际上是自然数的生成问题.在《数是什么,数应当是什么》一书中,戴德金阐述了他

的自然数理论,在序言中,他说明了自己的观点.他认为,数论是逻辑的一部分,数的概念完全不依赖于空间和时间的表象或直观,而是一种纯粹思想规律的直接产物.他对书名《数是什么,数应当是什么》的解释是"数是人类心智的自由创造,数作为一个工具使我们对于各种各样的事物能够更容易、更精确地掌握".这本书分为 14 章,戴德金首先细致地讨论了类的概念(他用的词是系统 System,实际上是集合).他叙述了类的并及交、一类到另一类的映射、"相似映射"(不同元素总映到不同元素上)等.他引进的重要概念是关于一个映射的"链".设 Φ 是一类 S 到其自身的映射,S 的一个子类 K 被称为(关于映射 Φ 的)链,如果 $\Phi(K)\subset K$(用近代词汇来讲,K 在映射 Φ 下是封闭的).对于任意一个子类 A,他定义 A 的链为包含 A 的所有链的交,用 A_0 表示.他再次指出无穷类和有穷类的差别,即无穷类总存在一个到自身的真子类的相似映射,而有穷类则不存在这种映射.

他引进的另一个重要概念是单无穷类 N,即存在一个 N 到 N 自身的映射 Φ,使得 N 是不属于 $\Phi(N)$ 的单元素的链.在这里,戴德金显然没有对单元素及单元素类加以区别.他在第 71 节中给出一类 N 为单无穷的条件,即存在一个映射 Φ 和 N 中一个元素 1 满足:

(α)$\Phi(N)\subset N$;

(β)$N=1_0$;

(γ)$1\notin\Phi(N)$;

(δ)映射 Φ 是相似映射.

接着,他在第 73 节中给出一个单无穷类 N 的元素为自然数或序数(简单地说,就是数)的定义.这样的 N 可以按照 Φ 排成一个顺序,成为一个数列,第一个数是 1,第二个数是 $\Phi(1)$,第三

个数是 $\Phi(\Phi(1))$,……所以,戴德金的映射 Φ 就把 N 中的一个元素 x 映射到它的后继 $\Phi(x)$上,而且在这个定义中,已经抽去元素的具体内容,赋予数一个抽象的定义.他没有明确说(α)~(δ)就是数的公理,但他由这些特征性质导出了自然数的其他性质,特别是他在第 80 节中证明了数学归纳法.不难看出,(α)~(δ)与下面的皮亚诺自然数公理有着这样的对应关系:

(2)↔(γ),

(3)↔(α),

(4)↔(δ).

在第 10 章中,戴德金证明所有单无穷类是数列,因此它们彼此相似,这也就惟一定义了自然数列.在第 11~13 章中,他由上述(α)~(δ)定义了数的加法、乘法、幂,并证明简单的算术性质.最后一节讨论有穷类的计数、基数、序数以及它们的初等性质.

戴德金对整数的处理过于复杂,因此并没有成为整数的基础.不过,在他的工作基础上,皮亚诺自然数公理却备受青睐.皮亚诺在《算术原理新方法》(1889)中,首先采用公理方法定义自然数集合.他将"集合"、"属于"、"自然数"、"后继"作为不加定义的概念,以下面五个公理为自然数的公理:

(1)1 是一个自然数;

(2)1 不是任何其他自然数的后继者;

(3)每一个自然数 a 都有一个后继者;

(4)如果 a 与 b 的后继者相等,则 a 与 b 也相等;

(5)如果由自然数组成的集合 S 含有 1,且当 S 含有任何数 a 时,S 也含有 a 的后继者,那么 S 含有全部自然数.

他根据这些公理给出加法、乘法以及负整数、有理数的定义,从而完成了对整数及有理数的处理.

至此,经典数学,特别是几何及分析,作为数与量的科学,已经有了一个大致可靠的基础,对于一般数学家来说,也就到此止步了.不过深究起来,显然一个新的问题被突出地提了出来,这就是无穷集合论.另外,也有一些数学家还要进一步奠定数学的逻辑基础.不过,这两方面在给数学带来丰富内容的同时,也给数学基础带来无穷的麻烦.也许我们可以这样说,由此我们可以划分经典数学和现代数学.

第 17 章　集合论

对数学基础的研究最终使无穷从后台走向前台.把无穷集合作为数学研究对象是 G·康托尔的一个独创.但它决不是凭空的捏造.无穷集合从一开始就同数学分析血肉相连.而在康托尔集合论被承认之后,它便构成现代结构数学的基础,同时由于其内在的矛盾而导致数学基础的危机,促进了元数学这一全新领域的诞生.

1　G·康托尔

G·康托尔,1845 年 3 月 3 日生在俄国圣彼得堡的一个商人家庭,父母都是犹太血统.1856 年父亲移居德国法兰克福,1863 年去世.母亲生于一个具有艺术才能的家庭,这种才能遗传给她的子女,只不过 G·康托尔的艺术创造天性表现在数学及哲学上面.G·康托尔先在威斯巴登上中学,1859 年进入达姆施塔特的中等职业学校及实科中学.在中学时,他就表现出对数学的兴趣和数学才能.1862 年他进入瑞士苏黎世理工学院学习,一年后转到柏林大学,在柏林大学专攻数学与哲学.1866 年在格廷根大学待了一个学期后,又回到柏林大学.当时的柏林大学有数学三巨头:库默尔和克洛耐克主要研究数论,外尔斯特拉斯主要研

究分析.在他们的影响下,G·康托尔深入钻研高斯的《算术研究》.在博士论文中,G·康托尔研究了高斯留下的不定方程

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

的整数解问题.1869 年他在哈勒大学取得讲师资格,1872 年升为副教授,1879 年升为正教授.

G·康托尔在历史上以集合论的创始人而知名.1873 年 11 月,他在和戴德金的通信中提出了一个问题,这个问题使他从以前的分析研究转到一个新的方向上.他认为,有理数的集合是可以"数"的,也就是可以和自然数的集合成一对一的对应.但是他不知道,对于实数集合,这种一对一的对应是否能办到.他相信不能有一对一的对应,但是他"讲不出什么理由".不久之后,1873 年 12 月 2 日,他在给戴德金的信中承认他"没有认真地考虑这个问题,因为它似乎没有什么实用价值",接着他又补充一句,"要是你认为它因此不值得再花费力气,那我就会完全赞同".可是,G·康托尔还是考虑起集合的映射问题来,很快他在 1873 年 12 月 7 日又写信给戴德金,说他已经成功地证明,实数的"集体"是不可数的.这一天可以看成是集合论的诞生日.戴德金祝贺 G·康托尔取得成功.其间,证明的意义也越来越清楚,因为G·康托尔还成功地证明,实代数数的集合是可数的.G·康托尔关于集合论的第一篇论文发表在 1874 年的《克莱尔杂志》上,题目是《论所有实代数数集合的一个性质》.文章断言,所有实代数数的集合是可数的,所有实数的集合是不可数的,因此,非代数数的超越数是存在的,并且其总数要比我们所熟知的实代数数多得多,也就是超越数的集合也是不可数的.G·康托尔的这种证明是史无前例的,他连一个具体的超越数都没有举出来,就"信口开河"地说超越数存在,而且比实代数数的"总数"多得多,

这怎么能不引起当时数学家的怀疑甚至愤怒呢?

其实,G·康托尔的这篇集合论著作主要是证明了无穷之间也有差别,既存在可数的集合,也存在像实数集合那样的不可数的、具有"连续统的势"的集合.过去数学家认为靠得住的只有有限,而无穷最多只是模模糊糊的一个记号∞,而G·康托尔又把无穷分成至少两个"层次",这真有点太玄乎了.

1874年G·康托尔结婚,在瑞士度蜜月时,见到了戴德金.戴德金很赞同他关于集合与无穷的一整套想法,由此G·康托尔逐步完整地建立起集合论的整个体系.

1878年,G·康托尔发表了关于集合论的第二篇文章,其中把隐含在1874年的文章中的"一一对应"概念提出来,并作为判断两个集合相同或不同的基础,这是最原始的等价观念,而两个集合相互之间能够一一对应就称之为等势,势的概念于是应运而生.

在1878年的论文中,G·康托尔还证明了一个令人惊讶不已的结果.在一维和二维的连续区域之间存在着一一对应,很快他认识到,要是加上连续性在内,也就未必成立.他对于维数不变性给出的证明是有缺陷的.维数的拓扑不变性要到30多年之后才由布劳威尔给出严格的证明.

1879—1884年G·康托尔发表了题为《论无穷线性点集》的一系列文章,共有6篇,这些文章奠定了新集合论的基础.这些文章引进了导集和超穷数的记号,特别是在1883年的文章中引进生成新的超穷数概念,并且论证了所谓连续统假设,即可数基数后面紧接着就是实数基数.对于这个假设,他相信是正确的,但没能证明.这个假设对于20世纪数学基础的发展起着极其重大的作用.同时他引进超穷数算术以及良序集,后来又引进一些

拓扑概念,如完备集等.

1874—1884年这10年是G·康托尔创造成果的顶峰.第一篇论文发表在德国柏林大学编辑出版的《克莱尔杂志》上,虽然克洛耐克已经闻到异端的气味,但是论文题目中的"代数数"属于他的专长,他还是开了绿灯.但是,G·康托尔以后的论文就一概不能再登了.于是他求助于格廷根大学出版的《数学年刊》并得到支持.不仅如此,他还受到外尔斯特拉斯的学生、瑞典数学家米塔格-莱夫勒的大力帮助.米塔格-莱夫勒在瑞典新办了一个国际性杂志《数学学报》,把G·康托尔从1874年到1883年的全部论文译成法文发表,这大大有利于集合论在国际上的传播.

可以说,G·康托尔的主要工作在他40岁时已经完成,但是数学界对于集合论的态度是极为不同的.只有少数人赞成,其中只有戴德金是第一流的数学家.大部分人反应冷淡,还有不少人反对,特别是柏林大学的克洛耐克.克洛耐克从反对集合论发展到对G·康托尔进行人身攻击,由于他是数学界的权威,对集合论的传播显然不利,而且对G·康托尔的未来愿望也是一大打击.G·康托尔非常想从平凡的哈勒大学教授职位升为声名显赫的柏林大学教授,但是要办到这点首先得通过克洛耐克这一关.他曾多次试图与克洛耐克修好,但是克洛耐克非但不让步,而且多次通过第三者大肆攻击G·康托尔,在这种攻击之下,G·康托尔的精神崩溃了,加上他对于"连续统假设"百思不得其解,他在1884年5月精神全面崩溃,不得不住进医院.从这时起,他的病情反复发作,有时时间长些,有时短些,经常住院,直到1918年1月6日在精神病院中去世.

第一次精神崩溃恢复之后,G·康托尔对自己失掉了自信,他向校方申请由数学系教授改为哲学系教授,没有得到批准.他

开始研究哲学,并热衷于组织德国数学家联合会的活动. 1889 年在海德尔堡召开的德国自然科学家及医生协会年会上,G·康托尔提议在第二年的不来梅会议上召开德国数学家联合会成立大会. 在 G·康托尔及格廷根许多数学家的努力之下,1890 年 9 月 18 日德国数学家联合会正式成立,G·康托尔被选为第一届主席,并决定于 1891 年在哈勒召开第一届年会. 他在建立协会的过程中希望为年轻人提供一个自由表达自己思想的论坛,使他们不要像他那样受到少数权威的压制. 1891 年 6 月他以主席身份邀请克洛耐克参加在哈勒举行的年会,他希望给克洛耐克一个机会对他的集合论进行公开的攻击,这样也给自己提供一个公开论战的讲坛. 但是,克洛耐克由于妻子去世而没能参加. G·康托尔在这届年会上宣读了自己的论文,其中论述了他新发明的对角线方法.

1891 年以后,特别是克洛耐克去世之后,G·康托尔的地位有了一定的改善,但是柏林的权威集团仍然不买他的账. 随着时间的流逝,他对德国数学界感到失望,柏林数学界不喜欢他,格廷根的克莱因对集合论也不感兴趣,他开始希望争取国际上的同情及支持,于是他又发起创建国际数学家大会. 经过他的努力,第一届国际数学家大会终于在 1897 年召开. 在这届大会上,胡尔维茨和阿达马在他们的报告中都提到集合论,显示出集合论最早受到各方面的重视. 1895—1897 年他关于超穷集合论的两篇论文发表,形成一般的抽象集合论. 他的论文很快被翻译成意大利文及法文,不久又被翻译成英文,集合论也正式被认为是一门数学而不再是一门哲学. 1899 年 G·康托尔又遭到事业及生活上的打击. 他不能证明连续统假设,而新的悖论又出现了. 他的弟弟去世后不久,他的爱子又于年底去世. 一连串的打击又使

他精神崩溃,1902年他又住进哈勒精神病院,从此进进出出没能彻底恢复.

2 康托尔无穷集合论的建立

尽管历史上对无穷有过各种探讨,但是,只有G·康托尔才是真正把无穷变为数学研究对象的数学家,为此,他花费了一生的心血.他的集合论并非凭空而起,而是数学发展的自然产物.G·康托尔建立集合论的过程大致分为如下几个时期.

(1)前集合论时期(1869—1872).

这是G·康托尔的分析时期,三角级数的研究触发他对点集的结构进行探讨,实数的研究促使他研究连续性,这一开始就触及无穷的根本问题.

(2)集合论时期(1873—1897).

这个时期又可以分成四个阶段:

①1873—1878年是初始阶段,实际上他只研究两个问题:一个是实数集合的不可数性问题,一个是维数的不变性问题.他幸运地从第二个难于处理的拓扑问题中脱身,而更深入地考虑第一个问题:点集的结构问题.

②1879—1883年是他创造成果最丰富的时期,在这一阶段中,他奠定了点集论的基础,并开始向一般集合论过渡.

③1884—1894年是他从点集论向一般集合论过渡的阶段,这个阶段他主要发表哲学方面的论文,但一般集合论的主要思想都是这时确定的.

④1895—1897年是他的一般集合论即超穷集合论的完成阶段,但由于许多问题未能解决,他的全部计划没有贯彻到底.

(3)后朴素集合论时期(1898—1918).

G·康托尔的最后 20 年基本上没有对集合论再有什么贡献,集合论走上自己的发展道路.

G·康托尔的点集论主要来源于函数的三角级数表示的惟一性问题:每个函数 $f(x)$都对应它的傅立叶级数,那么 $f(x)$除了傅立叶级数表示外,是否还可能有其他的三角级数表示?1870 年,海涅的论文指出,如果连续函数的傅立叶级数一致收敛,则函数能够惟一表示为三角级数.接着,他又进一步证明,如果不连续点只有有穷多个,惟一性定理也成立.但是,海涅的一致收敛条件太强了,他自己也怀疑是否每一个连续函数都能够表示为一致收敛的三角级数.实际上,不久之后有人就指出,这不一定行.正是在这点上,海涅希望 G·康托尔能改进他本人的结果.G·康托尔在两个方面取得了突破:一是把一致收敛的严格条件放宽;一是把海涅只允许有限多点的"例外集"推广到无穷多点.1870 年 4 月,在海涅的论文尚未发表时,G·康托尔已经得出优越得多的结果:只要函数 $f(x)$存在对每个 x 值都收敛的三角级数,那么这个三角级数表示就是惟一的.

1871 年 1 月,G·康托尔已经明确进一步改进的方向,"在某些点 x 上,或者用三角级数表示 0 不成立,或者三角级数的收敛性不成立".对于无穷多例外点的极限点只有一个或有限多个的情形,G·康托尔还能证明惟一性定理成立,这是向无穷点集论迈出的最初的一步.在惟一性定理最一般的证明给出之后,他开始研究离散集和连续域两者之间的深刻差别.

1873 年 11 月 29 日 G·康托尔在给戴德金的一封信中,终于把导致集合论产生的问题明确地提了出来,即正整数的集合(n)与实数的集合(x)之间能否把它们一一对应起来.实际上,

这个问题他已经考虑了很久,特别是在考虑连续性的本质时,他总是要碰到这个根本问题,他在信中写道:

“取所有正整数 n 的集体,表示为(n),然后考虑所有实数 x 的集体,表示为(x);简单说来,问题就是(n)和(x)是否能够对应起来,使得一个集体中的每一个个体只对应另一个集体中的一个且惟一一个个体? 乍一看,我们可以说答案是否定的,这种对应不可能,因为(n)由离散的部分构成,而(x)构成一个连续统;但是从这种说法中我们什么结果也得不到.虽然我非常倾向于认为(n)和(x)不能有这样一个一一对应,但是我讲不出理由,我对这事极为关注,也许这理由非常简单.”

戴德金的复信承认这个问题无法马上回答.不久之后,1873年12月2日,他在给戴德金的信中承认他“没有认真地考虑这个问题,因为它似乎没有什么实用价值”.同年12月7日,G·康托尔又写信给戴德金,说他已能成功地证明,实数的“集体”是不可数的,也就是不能够同正整数的“集体”一一对应起来.这个日期应该看成是集合论的诞生日.1874年,他发表了这个证明,论文的题目是《论所有实代数数集合的一个性质》,这篇论文可以看成是集合论的公开问世.G·康托尔这第一步的主要成就在于在无穷中划出一条线,从而区分为可数的与不可数的两类,这成为研究无穷的出发点.他第一次把可数性概念这个词引进数学,在此之前,几何学家史坦纳也用过这个词,但是只有G·康托尔才给这个概念以明确的含义,并给出判定的方法,这样集合论才有一个良好的开端.

有了“一一对应”这个工具之后,他进而研究更一般的问题.1874年1月5日,G·康托尔写信给戴德金,提出下面的问题:“是否能把一块曲面(如包含边界在内的正方形)一一对应地映

射到一条线上(如包含端点在内的线段),使得面上每一点对应线上一点,而且反过来线上每一点对应面上一点?”“据我看,回答这个问题困难很大,尽管答案似乎显然是否定的,以至于证明看来几乎是不必要的.”

他在1874年5月18日的信中写道,柏林的数学家认为这种事很荒谬,显然两个独立变量不能归结为一个独立变量.1874—1876年就这样无声无息地过去了,其间他没有发表一篇数学论文,不论是经典数学还是集合论,他没有任何创造.实际上这三年G·康托尔酝酿着集合论的主要突破.1877年6月20日,他写信给戴德金,信中再次谈到三年半之前的问题,这次他告诉他的朋友这个问题的答案是肯定的理由.他对这个结论毫无思想准备,这使他惊呼:“我看到了,但我简直不能相信它!”这篇论文在1878年发表之后,立即激起关于维数不变性的讨论,但是这个涉及拓扑的问题并没有使G·康托尔考虑多久,他及时地转向线性点集的研究.

1879—1883年整整五年间,他写了6篇系列论文,论文的题目是《论无穷线性点集》Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ,分别发表在《数学年刊》第15卷、第17卷、第20卷、第21卷、第21卷和第23卷上,出版时间为1879年、1880年、1882年、1883年、1883年和1885年.其中前4篇同以前的论文类似,讨论了集合论的一些数学结果,特别是涉及集合论在分析上的一些有趣的应用.1882年,在前4篇论文写完之后,G·康托尔感到有必要对无穷的新理论作进一步的推广,并且对集合论予以系统而明确的阐述.因此,第Ⅴ篇论文从风格上讲与其他论文是完全不同的,其中特别讨论了哲学问题,对集合论的研究也大大超出线性点集的范围,因此,它的意义与前4篇不可同日而语.他认识到这篇论文的重

要性,立即同当时最著名的数学文献出版社——莱比锡的特伯纳出版社联系,以单行本出版.单行本的书名为《一般流形论基础》或《一般集合论基础》,也反映出这篇著作与众不同,实际上这本书才是康托尔集合论的奠基性著作.第Ⅵ篇论文是第Ⅴ篇的补充,在第Ⅴ篇第14节之后加上5节(第15~19节).前4篇论文的主要目标是对线性点集进行分类,他创造了分类无穷线性点集的工具,这就是导集合.利用导集合可以对原来的集合进行分类.导集合还可以有导集合,继续下去就产生一系列集合 $p', p'', \cdots, p^{(v)}, p^{(v+1)}, \cdots$.有些无穷集合,到一定阶段 $p^{(v)}$ 等于空集合;而有些无穷集合,对任何有穷数 v, $p^{(v)}$ 均不空.这两种无穷集合应该说很不一样,如果 $p^{(\infty)}$ 也不空,它还可以有导集合 $p^{(\infty+1)}$,这样就可以产生更高级的导集合.其实,这已经预示着超穷集合论的思想.他证明,任何孤立点集合是可数的.对于可数集合,他证明可数无穷集合的每个无穷子集合仍是可数无穷集合,有穷个或可数个可数无穷集合的并集也是可数的.如果点集合 p 的导集合 p' 是可数的,则 p 本身也可数.如果点集合 p 的导集合 p' 是不可数的,则 $p^{(\infty)}$ 是完备集合,连续统或实数区间都是完备集合,也就是它们的导集和它们自身相等.除此之外,他又造出一个特殊的完备集合,这个集合被称为康托尔集合.

第Ⅴ篇论文在数学上的主要成果是引进超穷数.为了定义超穷数,他引进两个生成原则,他把通过逐次加1定义有穷序数的过程概括为“第一生成原则”,他将全体有穷整数的集合称为第一数类,用(Ⅰ)表示.显然第一数类没有最大的数,在这种情况下,他引进一个整数 ω 作为大于所有自然数的最小整数.这样我们可以得出第二生成原则:假如一个确定的整(实)数序列

存在,且其中没有最大的数,则创造一个新的数作为这些数的极限,即比它们所有数都大的下一个数.反复应用这两个生成原则,总能不断地产生新数,这样就生成第二数类,记为(Ⅱ).要是永远这样下去便没有个完.他于是给出第三个原则,被称为限制原则,也就是在适当的时候给第二数类加上一个确定的界限,而把以后的数归入第三数类或更高的数类.

G·康托尔的目的正如他自己所说,“在于把实整数序列扩张到无穷之外……这也许显得有点大胆,但到适当的时候,这种推广会被认为是相当简单、适宜而又自然的一步”.也就是说,对于有穷集合,基数就是集合元素的个数,而对于无穷集合,则必须引进完全新型的数——超穷基数.对于超穷基数,不能随便把有穷数的特征强加于它,而应成为具体研究的对象.

在第Ⅴ篇论文中,他定义了超穷基数的大小、加法、乘法及乘幂.他定义自然数集合的基数为$\aleph_0$,连续统的基数为 C.他证明,对于任何基数为 a 的集合,其所有子集合的基数为 2^a,且 $2^a > a$.他还证明 $2^{\aleph_0} = C$.

他接着建立序数的概念,首先定义全序集及序型.两个全序集相似,如果它们一一对应且保持顺序相同.这样可定义序数.

为了引进新序数,他只考虑良序集合(即有起始元素的全序集)的序数,显然具有同一无穷基数的良序集合可以有不同的序数,如可数良序集合的序数可以是

$\omega:1,2,3,\cdots,$

$\omega+1:2,3,4,\cdots,1,$

$\omega+2:3,4,\cdots,1,2,$

……

他定义这些序数的集合为$\aleph_1$,并证明它比$\aleph_0$ 大.同样,具有基

数$\aleph_1$的良序集合的序数也形成一个集合

$$\Omega,\Omega+1,\Omega+2,\cdots$$

其基数为$\aleph_2$.如此下去,可以得到一系列基数,被称为阿列夫.

这样他就建立起超穷集合论、超穷基数及序数理论.不过这时碰到两个问题使他不安,一是连续统假设,即是否$C=\aleph_1$;一是良序性假设,即任何全序集合均可以良序化.对于后者,G·康托尔实际上假设成立,因为证明两个基数可比较时,要求良序性假设成立.但是他在1878年提出连续统假设后,花费了毕生精力去证明它,但一直没有成功.

按照弗兰科尔(Abraham Adolf Fraenkel,1891—1965)的观点,1884年以后,G·康托尔几乎再没有提出什么独创性的见解.实际上,他此后的大部分论文带有哲学味道,具有论战性质.在数学方面,1891年他发现对角线方法,1895年他发表《对超穷集合论基础的贡献》第一部分,实际上是对以前有关集合论的著作加以系统化,并且推广良序集的理论.本来他声称在1897年发表的第二部分中证明连续统假设,但是他没有成功,因此他没能完成集合论的理论体系,而虎头蛇尾地草草收兵了.这个时候,集合论的内在矛盾又悄悄地溜出来,不过,直到最后,G·康托尔的主要敌人还是连续统假设.希尔伯特对此也有同感,他把连续统假设及良序性假设作为他的23个问题中的第1个,显然认为它是整个数学基础的重中之重的首要问题.

3 20世纪初的基础危机

一般认为,19世纪末在集合论中出现了悖论,因此导致第三次数学危机.但从历史上看,这种说法不很准确.实际上,引起

基础危机的是 1903 年罗素在《数学的原理》上发表的悖论,而以前的"悖论"最多只当成可以解决或已经解决的矛盾,其实 G·康托尔早就意识到集合论中的这个问题.

通常认为,第一个公开发表的"悖论"是布拉里·福蒂的最大序数悖论,实际上 G·康托尔本人在 1895 年已发现这个悖论,并在 1896 年写信告诉了希尔伯特.这个悖论是说,序数按照它们的自然顺序形成一个良序集合,这个良序集合根据定义也有一个序数 Ω,这个序数 Ω 由定义应该属于这个良序集合.可是由序数的定义,序数序列中任何一段的序数要大于这段之内的任何序数,因此,Ω 应该比任何序数都大,从而又不属于 Ω.这就是 1897 年 3 月 28 日布拉里·福蒂在巴洛摩数学会上提出的悖论.不过,布拉里·福蒂本人并没有说这是悖论,而只是证明了这个序数的自然顺序只是一个偏序,而不是 G·康托尔在几个月之前证明的结果:序数集合是全序的.

早在 1883 年,G·康托尔就提到不能谈"所有集合的集合"之类的话,否则会导致矛盾,后来他又多次重申这一点.1895 年他率先发现最大序数"悖论"之后,1899 年他又发现最大基数"悖论".这是说,如果我们把所有集合都放在一起形成一个大集合 U,这个集合之大不可想像,因为它包含所有观念的集合、所有数的子集合的集合……在内.显然 U 包含所有可能的集合.因此,它不能再扩大了,所以 U 的基数应该比任何基数都大.但是另一方面,由康托尔幂集合定理可知,由 U 可以造出 U 中所有子集合的集合 $P(U)$,而且 U 的基数 $<$ $P(U)$的基数,这与上面的结果相矛盾.

这些集合论悖论都涉及到一些共同的东西:"所有"或"全体",例如:

①所有集合的集合.

②所有基数的集合.

③所有序数的集合.

④所有不是自身元素的集合.

看到了它们之间的共性,G·康托尔认为,悖论容易解决,只要你不说“所有”.1899 年他在给戴德金的一封信中说:“如果把一个总体中所有组分看成一个整体会导致矛盾,就不应该把这一总体看成一个完成了的对象,我称这种总体为绝对无穷或不相容的总体.”这样,他区别开相容集合与不相容集合,而把集合论限制在相容集合的范围,这就把集合论的悖论轻易地排除在集合论之外.

真正发现集合论悖论的是罗素.1902 年 8 月他在写给弗雷格的信中说,他早在 1901 年 5 月就已发现了“罗素悖论”:

集合分成两类:一类是集合不是它本身的元素,一类是集合是它本身的元素.考虑所有前一种集合的集合类 A,那么 A 属于哪一类呢?如果 A 是后一种集合,根据定义,A 的元素不该属于 A,即 A 是前一种集合;反过来,如果 A 是前一种集合,根据定义,所有不是它自身元素的集合应该属于 A,即它属于后一种.所以 A 是前一种集合当且仅当 A 是后一种集合,这显然是一个矛盾.

罗素的悖论发表以后,基础研究的重点有一个转变.在此之前,数学基础的研究大致分成四大支脉:

(1)数的理论以及空间或其他对象的理论.说到数学分析,就要搞清楚什么是无理数,什么是实数;在大家对实数定义了以后,大家又该追问自然数是从哪儿来的.这个方向领头的是外尔斯特拉斯、戴德金、G·康托尔及皮亚诺.

(2)集合及无穷或超穷数的理论、连续统的理论，这是 G·康托尔一个人的独创.

(3)公理化理论. 1899 年希尔伯特的《几何学基础》的出版是这个方向研究的里程碑，由此形成一个公理化热潮，集合论也不例外.

(4)逻辑的数学理论. 从 19 世纪中叶起，这是在孤立的情况下进行的，可以说与数学主流脱离得很远，直到 19 世纪末才汇入整个数学研究的大河之中，领先的是布尔，其后弗雷格及皮亚诺做出决定性的贡献，再后罗素及怀特海又集其大成.

而在此之后，形成焕然一新的局面：

(1)在最早的 10 年中，通过各种途径消除悖论，积极的方法主要是罗素的类型论及策梅罗的公理集合论，两者都是在 1908 年发表的. 消极的方法就是直觉主义、构造主义的倾向，从根本上铲除无穷集合论.

(2)两次世界大战之间，在逻辑主义、形式主义及直觉主义之间形成基础研究大战.

(3)1930 年哥德尔证明不完全性定理，使希尔伯特把全部数学纳入一个体系之内的纲领受到打击，最终使基础问题与数学问题脱离开来. 作为基础研究的数理逻辑正式成为一门独立的数学学科，它就是我们所说的元数学. 它包括以“计算”和“证明”的元理论为对象的递归论和证明论，作为结构数学的基础的集合论，特别是公理集合论，以及作为各种结构的模型的元数学——模型论. 从 20 世纪 50 年代起，它们进入自己独立发展的道路. 而 19 世纪所形成的逻辑演算和逻辑代数，一方面形成符号逻辑的基础，另一方面与计算机科学相结合，在应用领域取得很大进展.

第18章 20世纪的数学

比起19世纪来,20世纪的数学更趋于统一,但这并不意味着20世纪缺少新学科.实际上,现在数学的课题中有80%以上是20世纪创造的,但也有20%左右的课题是19世纪遗留下来的.许多新学科是在19世纪开始萌生的,除了极少数问题是在18世纪末以前提出的之外,大部分是19世纪的创造.19世纪的数学中,除了数论、代数、分析及几何四大领域(即所谓经典数学)之外,还有四个重要领域在20世纪有显著进展,它们是代数数论、代数几何学、微分几何学(特别是高维的)和李群理论.

在19世纪具体的数学背景下,20世纪开创了结构数学及元数学两大范畴的一系列新学科,其中属于结构数学的有:群论、环论、域论、格论、一般拓扑学、点集拓扑学、组合拓扑学、代数拓扑学、微分拓扑学、几何拓扑学、同调代数学、测度与积分理论、泛函分析、算子代数理论等,以及由它们衍生出来的子学科.元数学几乎完全是20世纪的产物,特别是20世纪30年代以后形成的公理集合论、递归论、证明论及模型论.这些领域现在大都已独立发展,不过在其深处仍同结构数学有着千丝万缕的联系.另一方面,伴随计算机科学的兴起,作为基础的元数学又产生出许多边缘学科.

结构数学不是无源之水、无本之木,因此,它的产生不但大

大扩大了数学对象的领域，而且与经典数学结合在一起，对经典问题的解决有着极大的促进作用.数学结构的观点把建立在实数域和复数域上的代数、数论、分析及几何推广到一般域上，特别是代数数论一方面推广到局部域上，另一方面推广到函数域上.代数几何学推广到一般域上，而且有了内蕴的定义.现代的代数几何学几乎是交换代数学的同义语.实数空间上的分析也推广到一般流形上，构成大范围分析.实数域上的傅立叶级数理论推广到李群之上，形成抽象调和分析，而泛函分析则完全改变了偏微分方程的研究路线.它们在 20 世纪形成一个蔚为大观的局面，这里我们只能择其一二概述如下.

1　结构数学

1.1　抽象代数学

现代代数学，即抽象代数学，是在 19 世纪末 20 世纪初发展起来的.1930—1931 年，范·德·瓦尔登的《现代代数学》(*Moderne Algebra*)一书问世后，抽象代数学成为现代代数学的主流，在第二次世界大战后，更是自然而然、堂而皇之地去掉“抽象”及“现代”的字眼了.

与古典代数学不同，抽象代数学研究代数结构，即一个集合中的元素及子集合之间的关系.它的目标是对特定的代数结构进行刻画及分类.它所研究的对象已经完全不同于古典代数学那种符号的演算以及求方程的解之类的问题了.但是，它的对象仍然可以从古典代数学及几何学看到其来源.

现代代数学的对象一般有两个来源，一是从具体的数学对

象中产生的,如群、环、域、可除代数、交换代数、结合代数、李代数、布尔代数等;二是由抽象的数学对象衍生出来的,如整环、半群、拟群、圈、广群、具单元半群、半环、近环、交错代数、幂结合代数等,它们是由已有的结构经公理的增减及改动得出来的结构.

现代代数学的具体对象来自多种学科,主要是方程论、代数数论、代数几何学、不变式论、四元数论、超复数论、几何学、逻辑等.

1.1.1 群论

群是数学中的第一个抽象概念,虽然其观念可追溯到很久以前,但直到19世纪末,数学家才对它有比较清楚的认识.从那时起,几乎所有大数学家无不强调其重要性,把它视为数学的中心概念以及统一数学的基础.S·李说:"群和不变式的概念,每日每时在数学中都占有优越地位,而且越来越趋于支配整个这门科学领域."外尔说:"没有群就不可能理解现代数学."

群论是当代数学最重要的分支之一,也是发展得比较完整的一门学科,已成为现代抽象代数学的模式.在伽罗华之后的100年间,群论的研究大致有彼此多少有些重叠的五个方面:

①抽象群的定义及公理化;

②具体群的构造、刻画及分类;

③抽象群的具体表示;

④有限群的列举;

⑤一般的结构定理.

(1)抽象群的定义及公理化.

抽象群与具体群的不同之处有三点:一是摆脱掉具体的作为变换对象的集合,群的元素不一定是具体的变换、置换、运动、

作用、运算或数，而是抽象的符号，元素的数目不加限制；二是用公理来刻画；三是各种同构的具体群只不过是同一抽象群的不同表示，对此我们不加区分．在 19 世纪，无用的推广和抽象不受欢迎．因此，抽象群概念的产生过程是极为缓慢的．通常认为，最早的抽象群是凯雷在 1854 年定义的，实际上，他只是把群看成抽象符号的集合．符号间有二元运算（或复合运算、给合运算），集合对此二元运算是封闭的．至于结合性、存在么元等只是事后假定，而不在定义中出现．他认识到运算是结合的，但不一定可交换．克洛耐克在 1870 年的论文中明确表述了交换律及结合律．代克（Walther Franz Anton von Dyck，1856—1934）在 1882 年引用凯雷的定义，他认识到同构的群应被当做同一个群，他定义的群不限于有限群，包括有限生成的“离散群”．1883 年他还明确要求存在逆元素．同年，H·韦伯给出第一个抽象群的定义：任何种类的元素 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 的系统 G 被称为 h 阶群，如果满足下列条件：

①由系统中的两个元素，可以通过组合或乘法导出同系统中的一个新元素，用符号表示为

$$\theta_r\theta_s=\theta_t.$$

②结合律，即

$$(\theta_r\theta_s)\theta_t=\theta_r(\theta_s\theta_t)=\theta_r\theta_s\theta_t.$$

③左消去律和右消去律，即由 $\theta\theta_r=\theta\theta_s$ 或 $\theta_r\theta=\theta_s\theta$ 可得出

$$\theta_r=\theta_s.$$

由此可推出系统存在么元，且每个元素存在逆元，这个定义的局限性在于他假设抽象群为有限群．1893 年他去掉这个限制并写入他的极有影响的著作《代数学教程》第二卷（1896）中．1889 年荷尔德也给出类似的定义．正式的公理定义是 20 世纪初在希尔

伯特《几何学基础》的影响下掀起的公理化热潮中出现的，主要是1902—1905年莫尔、亨廷顿及狄克逊等人的论文，其后仍不断有许多研究.

从历史上看，从具体群到抽象群的研究经历了很长时期，到20世纪初，对有限群和无限群的研究还是分开的.第一部用抽象群统一论述群论的著作是法国数学家德·塞基埃(J. A. de Seguier, 1862—1937)在1904年出版的《抽象群论原理》，其中谈到“抽象群的观念，不依赖于其元素是什么而只考虑群本身，来自代数、分析及几何中不同的特殊的群.许多过去属于不同领域的研究组成一个更一般的理论”.这本书预示了结构数学的理论结构，即首先置于康托尔集合论的基础上，然后通过四个公理定义，并通过反例证明其独立性.这本书的重点放在有限群上.从无限群开始的抽象群论著是原苏联数学家什密特(Otto Shmidt, 1891—1956)在1916年出版的.

(2)群表示论.

19世纪90年代，群论最主要的成就是群表示论的出现，它是由德国数学家弗罗宾尼乌斯奠定的，后来由他的学生舒尔所发展，成为研究群论所不可缺少的工具.所谓群表示，即把群具体实现为某种结构的自同构群.例如，对于域 F 上的有限维线性空间的线性变换群，通常把群的元素与 F 上的 $n \times n$ 可逆矩阵相对应.英国数学家伯恩塞德的经典著作《有限阶群理论》第2版(1911)中已有这方面的综述及应用.

群表示论来源于群的特征标理论，而阿贝尔群的特征标理论最早来自高斯关于二元二次型的种和特征标理论.他对每个二次型 F 定义一个特征标，并对两个二次型同种给出定义，即如果其行列式及特征标对应相等.高斯的理论由狄利克雷在

1839 年表示为有限阿贝尔群及其特征标理论. 戴德金在狄利克雷的《数论讲义》第 3 版中进一步推广到代数数域的理想类群上. 他在 1886 年引进群行列式，并向弗罗宾尼乌斯提出问题，这直接导致群表示论在 1895 年的诞生.

在弗罗宾尼乌斯发表群表示论两年之后，1897 年他又举出一些有趣的例子，但看不出有什么用处，当时人们对群表示论普遍持怀疑的态度. 这时，伯恩塞德在他的《有限阶群理论》第 1 版的序言中写道："……而我们现在所知道的、纯粹理论中的许多结果，大多数可以马上从置换群的性质中得出，很难找出一个结果，它更直接从线性变换群的考虑中得到. "这可以说明他在第 1 版中为什么没有论述群表示论，但他的态度在几年之后就有了明显的转变. 在该书的第 2 版(1911)中，他承认他完全忽略群表示论"不再合适". 他写道："现在，似乎这么说更正确：为了进一步发展抽象理论，必须更着重把群看成线性代换群的表示. " 14 年间这种观点的大转变来源于他所说的"群论中最一般的问题". 什么是一门学科最基本的问题以及对这个问题的看法的转变，是一门学科历史发展中最关键的主题. 在 1897 年，群论的主要问题是列举问题：对于给定阶 n 的群，列举其所有可能不同的类型. 而这类问题慢慢变成另外一种提法，逐步变成结构问题：什么样的群具有可解性？ 由于可解群是大家感兴趣的群，是否从阶数就能看出群的可解性结构当然是重要问题. 这个历史上的主题移位(shift)使群表示论大有用武之地，而这个问题的历史发展进程是这样的：

①1872 年西洛证明，p^{α} 阶群一定是可解群，这里 p 为素数，α 为正整数.

②1894 年，弗罗宾尼乌斯证明，如果 G 的阶 $|G|$ 不被任何

素数的平方除尽(即无平方因子),则 G 是可解群.

③下一个目标当然是 $p^{\alpha}q^{\beta}$,其中 p,q 为素数,α,β 为正整数,弗罗宾尼乌斯和伯恩塞德等人陆续用各种方法,有的用群表示论,有的不用,得出在特殊条件下,群是可解群.

④1904 年,伯恩塞德在确确实实使用群表示论的情况下证明:每个阶为 $p^{\alpha}q^{\beta}$ 的群均为可解群.这是一个了不起的定理,而且可以说是用群表示论证明的第一个大定理.这种情况当然出乎人们的意料,甚至也出乎弗罗宾尼乌斯本人的意料.因为就在1902 年他证明定理的一个特殊情形时,他说"定理的证明完全用的是纯群论的考察而没有借助于任何代换群理论,即没有用到任何群的表示".顺便说一下,直到 20 世纪 60 年代,汤姆逊(John Griggs Thompson,1932—)才设计了一个纯群论的证明,1970 年哥德什密特(David Goldschmidt)首先发表完全的证明.不过这个证明极难,伯恩塞德用群表示论得到的证明仍是最好的.由于这个定理的证明,人们对群表示论的怀疑一扫而空.

1895—1905 年弗罗宾尼乌斯等建立有限群表示论的基础之后,舒尔在 1905 年作了简化的论述,特别是证明著名的舒尔引理.1904—1911 年舒尔还引进有限群的射影表示.而首先发展一般群表示论的是 E·诺特,她在 1927—1928 年冬季学期的讲课中,首先把超复量及表示论这两大领域联系在一起,把表示论推广到一般基域之上,形成了群与代数完整的抽象理论.其后群表示论不仅在理论上得到很大发展(建立模表示论及李群表示论),而且在物理学上取得重要应用.

(3)有限单群的分类.

20 世纪有限群论的中心问题是有限单群的分类.20 世纪初人们所知道的有限单群,除了素数阶循环群及交错群之外,还有

许多特殊的线性射影变换群 $PSL(n,q)$,它们通过行列式为 1 的 $n\times n$ 矩阵群(元素取在有限域 $GL(q)$中)的商群构造出来. 另外,对于正交矩阵、辛矩阵、酉矩阵也可以造出一批单群来. 这些"典型群"从若尔当时候起就已知道,后来美国数学家狄克逊、荷兰数学家范·德·瓦尔登、法国数学家丢东涅分别进行了具体研究. 真正重大的突破是 1955 年薛华荔(Claude Chevalley, 1909—1984)在日本的《东京数学杂志》上发表的论文《论某些单群》,他把这些单群通过李代数方法系统构造出来,被称为薛华荔群. 这些薛华荔群经过美国数学家斯坦伯格(Robert Steinberg, 1922—　)、韩国数学家李林学(Rim Leon Dock S., 1928—　)、比利时数学家梯茨(Jacques Tits, 1930—　)、日本数学家铃木通夫(Suzuki Michio, 1926—　)等人加以扩充,最终得出全部李型单群的 16 个系列. 除了上述 18 个系列的有限单群之外,还有一些"散在单群",1861—1873 年马蒂厄得出的 5 个马蒂厄群不属于上面任何一个系列,但直到 1965 年才找到第 6 个,其后 10 年间又发现了 20 个,共 26 个散在单群. 到这时候,问题是:是否所有单群均已找到,也就是有限单群的分类已经完成了吗? 证明这点经历了漫长的时期. 最早的突破是一系列群论性质及表示论的成果,其中包括 1955 年布劳尔(Richard Brauer, 1901—1977)的工作. 第二个突破是 1963 年美国数学家费特(Walter Feit, 1930—　)和汤姆逊证明,除循环群之外,奇阶群都是可解群,这篇长达 250 页的论文包含了极其丰富的信息. 20 世纪 70 年代在群的结构研究上有了新的突破,最终导致 1981 年有限单群分类的彻底完成,不过全文需要 15 000 页以上,这是各国上百位群论专家通力合作的结果. 到 20 世纪 90 年代,有关证明已陆续发表,篇幅也大大缩减了.

1.1.2 域论

从算术开始,人们就知道有理数经加、减、乘、除之后仍为有理数,并满足通常的交换律、结合律、分配律等公理,也就是所有有理数构成现在所说的“域”.不过长期以来,人们并不从集合的角度来对有理数进行整体考虑,也不用公理定义,更没有抽象域的观念,这三步都完成已是19世纪末20世纪初的事了.

最早引进具体域概念的是阿贝尔和伽罗华,他们在研究方程论时有复数域的子域概念,其中都包含有理数域,但没有用专门术语来表达.伽罗华还有对已知量的“域”添加一个新量构成新域的想法.

第一个新的域是1830年伽罗华构造的有限域,现在称之为伽罗华域,并得出它的许多性质.1855年以后,克洛耐克及戴德金开始用集合论的词,如“区域”、“系统”、“集合”等,来表示具有某种共同性质的元素的集合,但直到1871年戴德金在狄利克雷的《数论讲义》第2版的附录Ⅹ中,才引进“体”的概念,它并不是现在的抽象域而是复数域的子域,是一种特殊的数域.不过,在当时它已经足够普遍,可以涵盖所有的代数数域了.19世纪末已经知道有理数域、实数域、复数域、代数数域、一个变元或多个变元的代数函数域.除此之外,德国数学家亨塞尔又引进p进域,并在1908年出版的《代数数论》中详细地加以阐述.按照亨塞尔自己的说法,p进数是他多年思考的结果,最早可追溯到1893年,他受到来自函数论的启发:黎曼曲面上一个亚纯函数可以在一点的邻域展开成单值化参数的幂级数.当时许多人都知道代数数域与代数函数域的类似性,所以他就考虑对代数数域是否可以得到相应的展开.1899年他第一次发表一个摘要,

1900 年发表详细论文,主要是对每个代数数域 k 中的元素给出对应的一个形式和 $\sum_{k=r}^{\infty} a_k p^k$. 1904 年他向前迈进了一大步,把有理数域 Q_p 扩张成包含所有这种形式和的集合,而不管形式和是否对应一个有理数. 通过对形式和定义四则运算,从而构成一个 p 进域,而且他还进一步研究它的代数扩张以及其中的整数环,这样他就建立了一套全新的理论.

对于有限域,1893 年莫尔证明,每个有限域均为素幂阶的. 1905 年魏德本(Joseph Henry Maclagan Wedderburn,1882—1948)及狄克逊分别独立证明,有限域一定是乘法可交换的.

在群的公理化的影响下,H·韦伯在 1893 年首先提出域的公理系统,其后狄克逊和亨廷顿在 1902—1905 年分别独立给出域的公理系统. 在 H·韦伯及亨塞尔等人的工作的影响下,德国数学家史坦尼茨(Ernst Steinitz,1871—1928)在 1910 年发表论文,系统地奠定了抽象域论的基础. 他引进域的特征观念,把域按照特征进行分类,特征为 0 的域都含有有理数域为其子域,而特征为 p 的域都含有有限域为其子域,它们是素域. 他认为,抽象域论的主要问题是研究域的扩张问题. 域的扩张分为两类:一类是代数扩张,一类是超越扩张. 为了细致地进行研究,他引进有限扩张及扩张次数的概念,还引进可分扩张、不可分扩张以及完全域的概念. 他仿照代数学基本定理引进代数闭包的概念,证明域论基本定理:对于任意域 k,总存在 k 的代数扩张 K 是代数封闭的,即任意域的代数闭包存在且惟一. 史坦尼茨的抽象域论已成为抽象代数学的重要组成部分,也标志着代数域论基本建成. 但是,除了有限域、有理数域及其代数扩张之外,其他域还具有其他的复杂结构. 因此,1910 年以后域论又有了新的方向,主要是

赋值论以及更一般的拓扑域、有序域以及微分域的研究. 以实数域为例,实数域具有三种结构,即作为域的代数结构、全序结构以及拓扑结构,而且三者具有相容关系. 但复数域就没有自然的全序结构,不过可以赋值,也就是每个元素可取绝对值,而绝对值满足阿基米德公理. p 进数域也可以赋值,但是赋值不满足阿基米德公理,因此被称为非阿基米德赋值. 从 1904 年开始,到 1912—1913 年库尔夏克(Jozsef Kürschák, 1864—1933)和奥斯特洛夫斯基(Alexander Ostrowski, 1893—1986)分别建立赋值论,只有不到 10 年的时间. 到 20 世纪 30 年代,一般赋值论建立起来,而且其基本定理也获得证明.

1.1.3 交换环论

交换环是具有乘法的交换群,它对于乘法也是封闭的,并且乘法满足交换律 $ab = ba$. 交换环的具体原型是有理整数环及多项式环. 当然,域也是一种特殊的环,一般的环的元素对于乘法不一定有逆元. 环中具有逆元的所有元素被称为可逆元,也称之为单位或单元. 交换环论最早来源于代数整数环,从 1831 年高斯引进复整数时开始,其后有二次代数整数环及分圆整数环. 对于这些环,主要问题是代数整数的因子分解问题. 由于因子不惟一分解的情形普遍存在,于是库默尔引进理想数. 1870 年戴德金引进模的概念,而其特殊情形就是理想,从此理想理论诞生. 戴德金的理想已经明确是一种集合,而且同数一样成为计算的对象,这种计算不仅有集合论的(如交),而且有代数的(如和及积). 理想论的主要问题是把理想分解为素理想的乘积. 克洛耐克把相当于代数整数环的集合称为序环,在其上建立了除子理论. 这构成了一维交换代数的基础. 而代数几何则构成"高维"交

换代数的基础,特别是希尔伯特证明的基定理及零点定理.这时交换环论可以说还是具体的:一方面是复数域上的多项式环及其理想理论,另一方面还没有从域的观念中摆脱出来而成为环的理论.这是由于它们来自具体的数学对象——代数数论、代数函数论、代数几何和不变式论等的不同分支.这种具体的交换代数的结构理论由腊斯克所发展,他在 1905 年引进准素理想概念,提出准素分解.1913 年麦考莱曾考虑分解的惟一性问题.而摆脱上面的具体限制真正迈入抽象交换环论的是 E·诺特,她在 1921 年完成了对于抽象环特别是诺特环的公理刻画,即理想的升链条件,证明它等价于有限基条件及极大条件,而且证明一般形式的准素分解定理.1926 年她把代数数域及代数函数域的整数环,通过五条公理进行刻画,称之为五公理环,即后来的戴德金环,并证明惟一素因子分解定理.这两项工作完成了抽象交换环论的建立.其后抽象交换环沿着多个方向发展,一是建立不变量理论与结构理论,如维数及局部环理论,一是建立表示理论,导致同调代数的发展.更重要的则是逐步几何化,并与抽象代数几何融合在一起.

1.1.4　环论

(1)从四元数到超复数系.

到了 1830 年左右,人们对于复数有了比较清楚的认识,它们也满足人们所熟悉的有理数的加、减、乘、除等性质.由于人们生活在三维空间中,所以哈密尔顿希望能找到一个三元数,也具有普通实数和复数的性质.如果能找到这样的数,那么表示物理学中的速度和力以及空间的坐标就非常方便了.

哈密尔顿的出发点是复数.他虽然知道并且使用过复数的

几何表示,但他还是愿意把复数 $a+bi$ 表示成数对.他向自己提出的任务就是寻找类似于复数乘法的三重数(a,b,c)的乘法,也就是要求

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)$$

仍然是一个向量,并且满足:

①可以逐项相乘;

②积向量的长度等于因子向量的长度之积.他称这个规律为"模律"(law of the moduli).

为此,他曾经尝试过各种情形,至少复数情形应满足模律,因此必须假定

$$\mathrm{ii}=-1,$$

同样,必须令

$$\mathrm{jj}=-1.$$

那么 ij 与 ji 有什么关系呢?他试过 $\mathrm{ij}=1$ 或 $\mathrm{ij}=-1$,结果乘积系数的平方总不等于

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

他又试过 $\mathrm{ij}=0$,也不行,经过长期反复思考,始终未能成功.

1843 年 10 月 16 日,当哈密尔顿和夫人在都柏林散步时,他突然产生了灵感,于是四元数就降临了人世.实际上,他发觉满足所有普通运算规律的三元数是不存在的,所以新的数至少要包含四个分量.他当时想到的就是:除了复数单位 i 之外,还要加上两个新的虚数单位 j,k,而且 i,j,k 之间要满足一些基本的方程.他于是就拿出笔记本,记下所想到的基本方程,这就是

$$\mathrm{ij}=\mathrm{k}=-\mathrm{ji},$$

$$\mathrm{jk}=\mathrm{i}=-\mathrm{kj},$$

$$\mathrm{ki}=\mathrm{j}=-\mathrm{ik},$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

他发现,四元数可以像复数一样,表示为 $a + bi + cj + dk$ 的形式,四元数之间可以进行加、减、乘、除,而且满足加法交换律、加法结合律、乘法结合律和分配律,惟一美中不足的是乘法不能满足交换律,所以它和复数相差并不太多,而且它还满足模律.

哈密尔顿对他的四元数热情极高,他相信四元数和微积分同等重要,会成为数学、物理中的重要工具.他本人也把四元数应用到几何学、电学和力学上.但是四元数的使用仍然有阻力,就是因为乘法不满足交换律,在运算上也很不方便.虽然有一些人支持四元数,但是随着向量的出现,四元数的地位大大地削弱了.然而,四元数却给代数学开辟了一个新的方向,也就是对于超复数的研究,即包含 n 个分量的“数”或称 n 元数,这种研究自从四元数出现之后就开始了.

实际上,哈密尔顿在发现四元数的次日,就把结果告诉他的朋友格雷夫斯(John Graves),格雷夫斯到同年 12 月已经找到了由 8 个基本元素

$$1, i, j, k, l, m, n, o$$

构成的数,称之为八元数(octonions),格雷夫斯定义其乘法如下:

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1,$$

$$i = jk = lm = on = -kj = -ml = -no,$$

$$j = ki = ln = mo = -ik = -nl = -om,$$

$$k = ij = lo = nm = -ji = -ol = -mn,$$

$$l = mi = nj = ok = -im = -jn = -ko,$$

$$m = il = oj = kn = -li = -jo = -nk,$$

$$n = jl = io = mk = -lj = -oi = -km,$$

$$o = ni = jm = kl = -in = -mj = -lk.$$

格雷夫斯的八元数满足模律,但正如哈密尔顿所指出的,它连结合律也不满足.格雷夫斯的结果到1848年才发表,在这之前,1845年凯雷重新发现了八元数,它的单位是1以及$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_7$,它们满足一些方程.这种八元数不仅乘法交换律不成立,而且乘法结合律也不成立.它实际上就是格雷夫斯的八元数,因为他率先发表,故后来称之为凯雷数.

顺着这种思路下去,格雷夫斯自然考虑造出十六元数,他多次尝试,但没有成功.正如哈密尔顿的三元数一样,这不可能成功.

实际上,它们的模律无非是要求

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2.$$

对于满足这个等式的n,实际上早就有所研究.不过,由于哈密尔顿自学成才,他并不注意文献,什么也不知道.

欧拉早就知道复数的模律

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

欧拉在1748年5月4日致哥德巴赫的信中给出四个平方和的类似公式:

$$\begin{aligned}(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)^2 + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)^2 \\ &\quad + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)^2,\end{aligned}$$

实际上这就是四元数的模律.他的信经福斯编辑于1843年在彼得堡出版,当然哈密尔顿并不知道.

如果说哈密尔顿不知道上述公式情有可原,可是三元数的模律不成立,也就是使得等式

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = u^2 + v^2 + w^2$$

成立的 a,b,c 及 x,y,z 的双线性函数 u,v,w 不存在，这已经明白地写在勒让德的《数论》(1830)中．与八元数对应的 8 个平方和的乘积公式，也早在 1818 年由丹麦数学家德干发现，并且在 1822 年发表．

平方和的乘积公式对什么 n 成立，直到 1898 年才由胡尔维茨完全定出．他证明，只有当 $n=1,2,4,8$ 时，该公式才成立．至此，要求乘法服从模律的所有情形均已找到．放宽这个限制，还是大有可为的．

哈密尔顿在他的《四元数讲义》中，也引进了另外一种八元数，他称之为拟四元数或双四元数(biquaterions)，也就是系数为复数的四元数．这种四元数有一种奇怪的性质，和以前所有的数都不一样，即两个非零的拟四元数相乘可以等于零，这在数学中第一次出现非零因子．

克里福德于 1873 年又引进了另外两种类型的超复数，他也称之为双四元数．他的双四元数等于 $q+wQ$，其中 q,Q 为四元数，w 与每个实四元数都能交换．一种双四元数 $w^2=0$，另一种 $w^2=1$．后一种双四元数没有零因子，而且乘法也不满足结合律．后来他又把他的双四元数加以推广，成为有 2^n 个不同单元的数．这 2^n 个单元由 $1,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 生成，它们满足

$$e_i^2=-1,e_ie_j=-e_je_i(i\neq j).$$

这种数后来被称为第一类克里福德代数．当 $n=1$ 时，它是复数，当 $n=2$ 时，它是四元数．而在一般情况下，它是一个典型的线性结合代数，原因是它一般不具有适当的除法，因此与实数、复数和四元数等有所不同．

19 世纪下半叶，新的超复数系统大量涌现，基本元素数目相同的结合代数也可能有很多很多，原因是它们的乘法可以用

不同的方法来定义.1870年,美国哈佛大学数学教授B·皮尔斯(Benjamin Peirce,1809—1880)发表一篇重要文章,题目是《线性结合代数》.线性的意思是任何两个元素的积仍然可以分解成为某些元素的线性组合,结合的意思是乘法满足结合律.在这篇文章中,B·皮尔斯列举了大量线性结合代数的实例,在这些实例的基础上,他引进了一些元素的特殊性质,一个是幂零元素的概念,即元素 a 对于某个整数 n 满足 $a^n=0$,一个是幂等元的概念,即元素 a 对于某个 n 满足 $a^n=a$.他还证明,一个代数如果在其中至少有一个非幂零元,则必具有一个幂等元.其后,他的儿子C·S·皮尔斯(Charles Sanders Peirce,1839—1914)以及É·嘉当等对超复数系(结合代数)的结构进行了深入的研究.原苏联数学家摩林(Theodor Molien,1861—1941)在1900年证明:复数域上维数≥2的单(结合)代数都和复数域上适当阶的矩阵代数同构.美国数学家魏德本在1907年得出结构定理:结合代数可以分解为幂零代数及半单代数,半单代数可以表为单代数的直和,而单代数可以表为域上某个可除代数的矩阵代数.

当时知道的可除代数(即体,除了零外,每个元素都有乘法可逆元,但乘法不一定可交换)只有四元代数,1914年狄克逊又构造出一些新的可除代数.关于可除代数的研究有许多算术上的困难,为此E·诺特引进交叉积的概念,由此,E·诺特等人证明了"主定理":代数数域上任何有限阶中心单代数都是循环代数,所有交叉积都是中心单代数.反过来,中心单代数是否都是交叉积?这直到1972年才由以色列数学家阿米祖尔(Shimshon Amitzur,1921—1994)举出反例.

对实数域上的有限维结合代数加以刻画的一个基本定理是弗罗宾尼乌斯在1878年证明的定理:实数域上的有限维结合代

数如果没有零因子且满足交换律,则只有实数域及复数域;如果没有零因子且不满足交换律,则只有四元代数.这个定理经历了80年才被推广到实数域上的有限维非结合代数.1958年克外尔(Michel Kervaire,1927—)和米尔诺(John Milnor,1931—)利用鲍特(Raoul Bott,1923—)的拓扑结果,各自独立证明实数域上的有限维可除代数只有实数域、复数域、四元代数及凯雷代数.

(2)一般环论.

一般环理论对于乘法并不要求一定满足交换律甚至结合律,由此分别得出结合环理论及非结合环理论.结合环理论是超复数系的直接推广,超复数系可以说是结合代数,它并没有完全摆脱掉基域.由代数到一般环的过渡是阿廷在1927年完成的,他首先考虑满足降链条件(等价于与诺特极大条件相对立的极小条件)的环(后来这种环被称为阿廷环),并证明相应的魏德本结构定理.1930年诺特学派的科特(Gottfried Köthe,1905—1989)引进根基的概念,并力图把根基理论推广到更一般的环上,由此开辟了结合环论的未来方向.一般结合环理论由于不像交换环那样以代数几何为背景,它的发展呈现出多样性,其中重要的有:群代数,来源于E·诺特把超复数系与群表示论的结合;PI代数,它是满足多项式等式的结合代数,与李代数及群论的伯恩塞德问题密切相关.非结合环及非结合代数的主要研究领域有李代数及约当(Pascual Jordan,1902—1980)代数,另外还有交错代数及幂结合代数.

1.2 一般拓扑学

一般拓扑学来源于对实数连续统及实数集合结构的研究.

1873 年 G·康托尔开始对欧氏空间中的点集进行系统研究,已经有一些属于拓扑学的概念,如聚点(极限点)、开集、闭集、稠密性、连通性以及维数等.19 世纪 80 年代意大利数学家已经有函数集合和曲线集合以及其上泛函的概念.1883 年 G·康托尔虽然引进一般集合论,但 19 世纪考虑的主要集合实际上是函数集合和曲线集合两类,而对其上的拓扑研究并没有深入开展.

最早研究抽象拓扑空间的是法国数学家弗瑞歇(Maurice Frechet,1878—1973),他由极限观念定义拓扑.1904 年他引进列紧的概念,1906 年他定义列紧空间及度量空间(或距离空间),他的主要目的是研究泛函分析,因此,他主要是以函数空间为背景的,他的定义仍有局限性.真正一般拓扑的创造者是德国数学家豪斯道夫,他在 1914 年出版的《集合论大纲》(*Grundzüge der Mengenlehre*)中通过邻域的概念,建立了拓扑空间的完整理论.所谓在一个集合 E 上给定拓扑,就是对 E 中每个元素 x,均对应一族子集 U_x,被称为其邻域,满足四个条件.这样他定义了相当一般的一类拓扑空间——豪斯道夫空间.在他之前,希尔伯特在 1902 年对于平面引进过邻域的概念.后来,外尔在 1913 年把它推广到黎曼面上,豪斯道夫则对之进行一般的推广.

从豪斯道夫的概念出发,可以定义拓扑学的许多基本概念,如开集、闭集、紧致性、连通性、分离性以及连续映射、同胚等,这样,一般拓扑学的理论框架基本上建立起来.

20 世纪 20 年代,一般拓扑学在原苏联和波兰取得进一步的发展,特别是通过开集、闭集直接定义拓扑空间,并且得出其种种性质.另一方面,对于拓扑不变量——维数,也有了精确的定义及深入的研究,这样曲线就有了明确的定义.

20 世纪 30 年代,布尔巴基学派对一般拓扑学进行整理及

补充,引进滤、一致性结构以及仿紧性等概念,理论基础趋于成熟,构成第二次世界大战以后数学研究的坚实基础.

1.3　测度与积分理论

正如康托尔集合论由实数连续统到点集论再到一般集合论,拓扑学由点集拓扑学到一般拓扑学,测度论也由实数点集的测度到一般点集的测度再到一般测度论.

测度是长度、面积、体积概念的推广.在微积分中,测度是与积分联系在一起的.在过去,函数的图象与坐标轴围成的面积就是函数的积分.这里连续函数的积分是第一位的,测度是第二位的.但是当点集很复杂时,函数也就不连续了.这时便无法定义积分.对于这样的一般问题,勒贝格走出了自己的路.他在他的博士论文(1902)中首先定义测度,然后定义积分.他在确定点集的测度时,用无穷个区间序列,而不是有限个区间序列,来覆盖这个集合.这样就能够定义某些特殊集合的测度,比如有理数集合的测度,而这在过去是无法办到的.有了点集的测度之后,在定义 $y=f(x)$ 的积分时也不是像过去那样只把自变量 x 的区间加以重分,而是把 y 的区间重分为有限多小区间.由于 x 轴上集合的测度已知,这样就可以求出积分的上、下界,并可以使上、下界之差任意小,从而确定一定的积分值.所有积分存在的函数(不一定限于连续函数),统统被称为勒贝格可积函数.勒贝格测度和积分理论是现代分析的基础,也是泛函分析中不可缺少的概念.值得一提的是,意大利数学家维塔利与英国数学家杨(William Henry Young,1863—1942)在 1904 年各自独立引进相当于勒贝格测度的测度概念.1913 年拉东通过完全可加集函数,引进 R^n 的拉东测度,由此定义的积分既包括勒贝格积分,也包

括斯蒂尔捷斯积分.至此,无论是G·康托尔、若尔当、保莱尔,还是勒贝格、拉东,他们都是在 R^n 中的点集上定义测度.第一个考虑在抽象集合上定义积分的是弗瑞歇(1915),这导致他的所谓一般分析的建立.而建立在公理基础上的抽象测度论则是1918年由卡拉提奥多里建立的.其后,测度的概念被推广到李群(1933)乃至一般局部紧群(1938)以及无穷维空间上.

1.4 泛函分析

泛函分析是研究无穷维抽象空间及其上分析的学科,它建筑在函数空间概念的基础上.古典分析研究实数集合或复数集合上的函数运算及其性质,而泛函分析则研究一般集合,特别是函数集合、曲线集合上的函数,泛函实际上就是函数集合上的函数.泛函分析的发展可分为三个阶段.

第一阶段是创始时期,大约从19世纪80年代到20世纪20年代.首先是意大利数学家引进泛函演算,特别是他们引进原始泛函以及线性算子的概念.后来法国数学家发展了泛函演算,特别是阿达马在1897年为了研究偏微分方程而考虑了闭区间[0,1]上的全体连续函数所构成的族.他发现这些函数构成一个无穷维线性空间,并于1903年定义了这个空间上的函数,即泛函.这些还只是具体的结果.

法国数学家弗瑞歇利用当时的集合论观念把前人的结果统一成为一个抽象的理论,他把它们的共同点归纳起来并加以推广:

(1)把函数或曲线看成一个集合或空间中的点.不妨把它们看成一个抽象集合.

(2)点列的极限概念也可以推广,这样就引出极限概念的集

合,他称之为 L 空间,这是后来拓扑空间的萌芽.

(3)集合上可以定义取值在实数里的实函数,即泛函.由于有了极限概念,就可以定义泛函的连续性.

(4)泛函可以进行代数运算,也可以进行分析演算,比如微分.这样就成为名副其实的泛函分析了.

大约与弗瑞歇同时,希尔伯特对于积分方程进行了系统的研究.他在前人的基础上,认识到积分方程与无穷多变元线性方程组之间的相似性,并发现积分方程的有解性与无穷多变元的收敛性条件有关.这样他实际上得到了具体的希尔伯特空间理论.抽象的希尔伯特空间理论是他的学生施密特得到的.他引进实的和复的希尔伯特空间的几何观念,把函数看成是平方可和序列空间(l^2 空间)中的点.1907 年,匈牙利数学家黎斯等人引进勒贝格平方可积函数空间(L^2 空间),发现其性质与 l^2 空间相同.两个月之后,德国数学家费歇尔(Ernst Fischer,1875—1959)与黎斯证明 l^2 空间和 L^2 空间同构,它们只不过是同一种抽象希尔伯特空间的两种具体表现而已.这也反映出研究抽象空间的重要意义.黎斯—费歇尔定理也更清楚地表明积分理论和抽象空间的泛函之间的紧密联系.拉东在 1913 年,弗瑞歇在 1915 年以及丹尼尔(Percy John Daniell,1889—1946)在 1917 年都分别利用泛函分析方法推广积分理论.

1910 年黎斯仿照 L^2 空间研究了 L^p 空间($1 < p < \infty$),也就是全体 p 次方可积函数构成的空间,后来又研究了 l^p 空间,它们不是希尔伯特空间,而是巴拿赫空间.他还发现,L^p 上连续线性泛函的全体构成一个"对偶的"空间 L^q,且 p,q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.这些空间在研究偏微分方程方面是不可缺少的工具.

第二阶段从20世纪20年代到40年代,泛函分析正式发展成为一门学科.在两次世界大战之间,波兰数学家在泛函分析及拓扑学等方面取得了重要的成就,引起全世界数学家的注目.其中最杰出的是巴拿赫,他进一步把希尔伯特空间推广成巴拿赫空间,用公理加以刻画,形成了系统的理论.他在1932年出版的《线性算子论》一书,统一了当时泛函分析的众多成果,成为泛函分析的第一本经典著作.这时泛函分析不仅在理论上较完备,而且在古典分析的应用上起着举足轻重的作用.其中,特别是波兰数学家肖德尔(Juliusz Pawel Szauder,1899—1943)和法国数学家勒瑞(Jean Leray,1906—)的不动点理论,是现代偏微分方程理论的重要工具.他们把微分方程的解看成巴拿赫空间到自身映射的不动点,并得出了基本定理,这是现代非线性泛函分析的出发点.

1926年冯·诺伊曼来到格廷根大学,他把希尔伯特空间公理化,并把量子力学的数学基础建立在泛函分析之上.他吸收抽象代数的思想,把希尔伯特空间的有界线性算子组成代数,开拓了算子代数的新分支.他在20世纪30年代的几篇文章中对于所谓冯·诺伊曼代数的因子进行了相当完满的分类,其遗留的一些问题直到20世纪70年代才完全解决.

20世纪30年代末,波兰数学家马祖尔(Stanislaw Mazur,1905—1981)与原苏联数学家格尔范德(Israel Gelfand,1913—)发展巴拿赫代数理论,而且通过抽象方法轻而易举地证明了古典分析中的大定理.这显示了泛函分析方法的威力,也论证了泛函分析独立存在的价值.

第三阶段是泛函分析的成熟阶段.从20世纪40年代起,泛函分析在各方面都取得突飞猛进的发展.法国数学家施瓦兹

(Laurent Schwartz, 1915—　)系统地发展了广义函数论，它现在已成为数学中不可缺少的重要工具，它的前身就是狄拉克(Paul Adrien Maurice Dirac, 1902—1984)量子力学中引进的 δ 函数. 20 世纪 30—40 年代，美国数学家希尔(Einar Hille, 1894—1980)与日本数学家吉田耕作(Yosida Kosaku, 1909—1990)发展了半群理论，成为泛函分析中的一个具有很大应用价值的重要分支.

1.5　代数拓扑学

组合拓扑学的思想可以追溯到莱布尼茨，他在 1679 年提出位置几何学，它直接对位置关系进行研究，而不涉及坐标，也不考虑度量. 1736 年欧拉解决了哥尼斯堡七桥问题，标志着组合拓扑学的开端. 哥尼斯堡是东普鲁士的首府，普雷格尔河横贯其中，其上有七座桥，如图 11 所示，七桥问题是问我们散步时能否经过每一座桥，而且每座桥只经过一次. 欧拉在 1736 年用组合方法证明这办不到. 这是用“组合的”方法解决的第一个具有拓扑性质的问题.

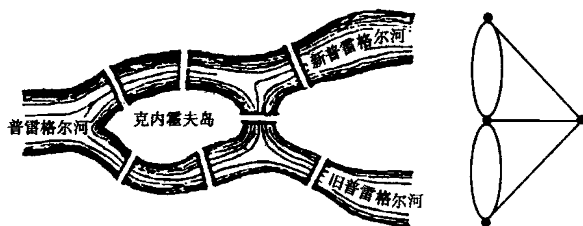


图 11

组合拓扑学的第一个重要定理是欧拉公式，即实心多面体的顶点数 V，棱数 E 与面数 F 之间总有关系

$$V - E + F = 2.$$

$V - E + F$ 可以说是拓扑不变量欧拉—庞加莱示性数的初始形式.据数学史研究,笛卡尔在1638年已提出过类似的公式.这个公式在1813年由柯西推广到空心的多面体,并提出相应的改动公式.

1833年,高斯用线积分定义空间中曲线的环绕数,这是第一个用分析方法表示的拓扑不变量.1847年,德国物理学家李斯亭写的《拓扑学引论》出版,这是最早出现"拓扑"这个词的文献.实际上,他在1836年已用这个词来代替位置几何学,以免同通用的射影几何学相混淆.此外,他和莫比乌斯各自独立发现了单侧曲面——莫比乌斯带.

1852年,四色猜想也被提出来了.所谓四色猜想,就是在平面或球面上绘制世界(或全国)地图时,如果使得相邻的国家(或地区)能涂上不同的颜色来加以区别,问最少需要使用多少种颜色.这是1852年法朗西斯·格思瑞(Francis Guthrie,1831—1899)在写给他的弟弟弗雷德里克·格思瑞(Frederik Guthrie)的一封信中首先提出来的,他问是否能从数学上证明.弗雷德里克·格思瑞问他的老师德·摩根,但德·摩根只能证明:不可能把五个国家排成这样,使得每一国和其他四国都相邻,但这并非四色猜想.1879年肯普(Alfred Bray Kempe,1849—1922)声称他得到证明.1890年海沃德(P.J.Heawood,1861—1955)指出其中有错,但可以证明五色足够了.这个猜想最终在1976年借助于计算机的帮助才得到证明.

从莱布尼茨、欧拉到庞加莱,可以说是组合拓扑学的前史时期.黎曼之前的时期,可以说是无意识时期,他们在研究过程中并没有抓住拓扑学的精髓,即在连续变换之下的不变性问题.黎

曼首先有意识地把拓扑观点引入分析的研究.他强调,要研究函数,就不可避免地需要位置分析的一些定理.实际上这是观点上的突破.在他之前,柯西的围道积分与留数定理,电动力学的高斯积分定理以及高斯—邦内公式,都包含着拓扑不变性的观念,但是没有得到明确确认.黎曼之后,数学家才对拓扑不变的性质予以特别注意,特别是莫比乌斯在 1863 年明确指出,在拓扑对应和点的一一对应之下,邻近的点对应邻近的点,而这正是拓扑对应的实质.

19 世纪中叶,黎曼在函数论的研究中贯穿着拓扑的思想,对后来拓扑学乃至整个数学的发展有着重要意义.他提出黎曼面的构造,并解决了闭定向曲面的同胚分类问题.在几何学的研究中,他明确提出 n 维流形的观念.在他的影响下,意大利数学家贝蒂提出后来被称为贝蒂数的概念.其后,关于曲面的定向问题又有许多研究.克莱因证明射影平面不可定向,并在 1882 年举出克莱因瓶,证明它不可嵌入在三维欧氏空间中.

使组合拓扑学成为一个重要的数学分支的是庞加莱.他在 1881—1886 年的微分方程定性理论以及后来的天体力学的研究中,都有意识地发展拓扑的思想.他从 1892 年起对拓扑学开始进行系统的研究.在 1895—1904 年发表的关于位置分析的 6 篇论文中,他创造了组合拓扑学的基本方法,并引进重要的不变量、同调及贝蒂数、基本群、挠系数,还进行具体计算.他还证明了庞加莱对偶定理的最初形式.1904 年他提出了著名的庞加莱猜想,即单连通的闭(定向)三维流形同胚于球面.这个猜想至今未得到证明.庞加莱推测,将贝蒂数、挠系数、基本群加在一起,说不定可以完全解决流形的同胚分类问题,也就是说,如果两个流形的两组不变量对应相等,那么这两个流形同胚.1919 年亚

历山大(James Waddell Alexander,1888—1971)创造出透镜空间,并举出两个透镜空间,其贝蒂数、挠系数及基本群都对应相等,但它们不同胚.其后,数学家又引进各种群、环、代数等更为精致的拓扑不变量.

来源于实践的纽结理论到现在仍是拓扑学研究的一大热门.19世纪已经对简单的纽结进行分类,研究最多的是英国物理学家台特,他由物理学中的以太的涡旋模型出发,开始对纽结进行分类.他把纽结投影到平面上,产生一些结点,由此他把结点数为9以下的纽结列表分类.其后,英国数学家李特尔(John A.Little)又加以扩充及补充.1928年亚历山大得到最重要的纽结不变量——亚历山大多项式,但它不能完全分类纽结.1984年新西兰数学家琼斯(Vaughan Jones,1953—)得出新的不变量,不仅大大推进了纽结理论,而且使之进入数学和物理大统一理论的核心.

荷兰数学家布劳威尔继庞加莱之后对拓扑学做出了突出贡献.他开创了不动点理论,创造出单纯逼近方法来证明维数的拓扑不变性,还确立了组合流形的概念.1915年亚历山大证明了贝蒂数及挠系数的拓扑不变性.

对偶定理是揭示拓扑不变量之间关系的重要方面.1922年亚历山大证明亚历山大对偶定理,是对庞加莱对偶定理的重要补充及发展.1930年,莱夫谢兹证明莱夫谢兹对偶定理,上述两个对偶定理为其特殊情形.

对基本的拓扑不变量加以改造,早在1908年梯茨的文章中已经开始,他和其他人开始考虑整数以外的系数,如模2的系数及有理数.1926年亚历山大引进 Z_n 系数.1925—1926年,E·诺特在同亚历山大洛夫(Pavel Sergeevich Aleksandrov,1896—1982)

等拓扑学家接触时,曾建议把组合拓扑学建立在群论的基础上.在她的影响下,浩普夫(Heinz Hopf,1894—1971)于1928年定义同调群,但E·诺特的思想直到以后才逐步为大家所了解和接受.1935年切赫(Edouard Cech,1893—1960)曾考虑将系数取在任何交换群中.

20世纪20年代起,数学家曾试图把同调论从流形逐步推广到更一般的拓扑空间.先是维埃陶瑞斯(Leopold Vietoris,1891—)(1927)、亚历山大洛夫(1928)等人把它推广到紧度量空间,继而切赫推广到一般拓扑空间(1932),即所谓切赫同调论.同时,莱夫谢兹发展了奇异同调论.这是两个最重要的同调理论,它们在1944年被公理化.

20世纪30年代初,由于抽象代数的发展,代数工具逐步引入拓扑学,拓扑不变量也从数扩大到群、环、模等代数结构上,从而形成利用抽象代数方法研究拓扑学问题的代数拓扑学.代数拓扑学的名称始见于莱夫谢兹在1942年出版的《代数拓扑学》,但其思想从1928年浩普夫发表关于同调群的文章时起一直在不断发展.

在代数与几何的对偶观念的影响下,许多数学家在20世纪30年代初提出同调群的对偶观念——上同调群.除了同调群和上同调的加法结构外,许多人从各个角度寻找其中的乘法结构.莱夫谢兹和浩普夫在1930年左右研究流形的交口环,1935—1938年亚历山大、切赫、惠特尼(Hassler Whitney,1907—1989)等人独立引进复形的上积,后来才证明同调不一定有上同调那种自然的乘法(1952).上同调具有环的结构,也有更多的应用.1947年,斯廷洛德(Norman Steenrod,1910—1971)定义了平方运算,后来发展成上同调运算的理论.

1935年代数拓扑学的另一重要分支——同伦论诞生.同伦论给代数拓扑学带来了方向性的变革.1895年庞加莱定义的基本群是第一个同伦群,其后布劳威尔、浩普夫等人对于球面到球面的映射进行过初步的研究,尤其是1931年浩普夫映射的发现促使人们注意对连续映射的研究.1932年,切赫在国际数学家大会上定义了高维同伦群,但未引起注意.1933年波兰数学家霍尔维兹(Witold Hurewicz,1904—1956)开始对连续映射进行研究,在1935—1936年发表4篇论文,定义了高维同伦群并研究了其基本性质.霍尔维兹还定义了伦型的概念.由于当时所知道的大多数拓扑不变量均为伦型不变量,从而使同伦论的研究有了巨大的推动力.

由于计算同伦群,特别是球面同伦群,刺激了整个拓扑学的发展,给拓扑学的宝库中添加了许多重要工具,如纤维空间、谱序列等.但是由于计算极难,在1950年之前,进展不大.1950年塞尔(Jean-Pierre Serre,1926—)在同伦论研究上取得突破,证明除了 $n \doteq r, n = 2r - 1$ 之外,所有球面同伦群 $\pi_n(S^r)$ 均为有限群.

1958年,鲍特利用莫尔斯理论证明典型群的稳定同伦群的周期性定理,从一方面促进了 K 理论的产生.K 理论满足上同调论的7个公理中的6个,只有维数公理不成立.这样它成为第一个广义上同调理论.K 理论的产生解决了一系列拓扑学问题(如球面向量场问题),也推动了代数 K 理论的产生.其后又产生许多广义上同调理论,如复配边理论,成为数学家的有力工具.它们给拓扑学乃至整个数学带来了丰富的结果.

1.6　微分拓扑学与大范围分析

微分拓扑学是研究微分流形和微分映射的拓扑学.微分流形的概念起源很早,拉格朗日、黎曼、庞加莱都曾把它当做研究的对象.外尔在他的《黎曼面的思想》(1913)一书中,首先给一维复流形一个内蕴定义,即不依赖解析表达式及其嵌入的空间.微分流形的一般定义是惠特尼在 1936 年给出的,他在 1936 年还证明了微分流形的嵌入定理,并在 1944 年改进为较好的形式,这是微分拓扑学的重要基本定理.大约同时,他还研究了关于微分映射的奇点理论.

随着代数拓扑学的进步,微分拓扑学到 20 世纪 50 年代突飞猛进地发展起来.1953 年道姆(René Thom,1923—2002)发表关于配边理论的研究,其方法及结果大大推动了数学的进展.1956 年,米尔诺因发现七维球面上有不同寻常的微分结构而引起轰动.他和克外尔又对球面上的微分结构进行详尽的研究.1958 年,克外尔发现存在分段线性流形不具有微分结构.1960 年,斯梅尔证明五维以上微分流形的“广义”庞加莱猜想.

克外尔等人的工作显示出拓扑流形、分段线性流形及微分流形三个范畴之间的巨大差别.20 世纪 60 年代初,研究这三大范畴及其间关系的几何拓扑学应运而生.

拓扑流形是否可剖分,剖分成的分段线性结构是否一样(主猜想),是拓扑学家早就研究的问题.拉多(Tibor Rado,1895—1965)在 1925 年,莫伊斯(Edwin Evariste Moise,1918—　)在 1952 年分别对二维流形及三维流形作出肯定证明.1969 年克尔比(Robin Cromwell Kirby,1938—　)和基奔曼(Laurence Carl Siebenmann,1938—　)举例说明五维流形不可剖分以及可剖分的五维

流形的分段线性结构不同.实际上,他们得出分段线性结构中存在的“阻碍”.

微分流形的可剖分性早在 1935 年由克恩斯(Stewart Scott Cairns,1904—1982)所证明.对于分段线性流形及拓扑流形,五维以上的广义庞加莱猜想也在 20 世纪 60 年代初得到证明.1981 年证明四维拓扑流形的庞加莱猜想,1983 年得出四维欧氏空间具有非通常的微分结构,而且有不可数无穷多.

从 20 世纪 70 年代起,关于低维流形的研究取得巨大进展,主要是色斯顿(William Thurston,1946—)对于具有双曲结构的三维流形取得较完整的结果.20 世纪 80 年代,人们又用场论定义新的拓扑不变量,除了琼斯的纽结不变量,还定义了卡松(Andrew Casson)的三维拓扑不变量以及唐纳森(Simon K. Donaldson,1957—)的四维拓扑不变量,同时,在此基础上形成二维、三维、四维拓扑场论.

随着 20 世纪 50 年代代数拓扑学及微分拓扑学的进展,微分流形上的分析——大范围分析也有了新的发展.1968 年召开的大范围分析会议正式使用这个名称,这是分析与拓扑学有机结合的产物.

微分映射的奇点理论最早是惠特尼在研究微分流形时引入的,1955 年对 $R^2 \to R^2$ 的微分映射奇点进行分类,这个理论在 1956 年经道姆的推广而成为一个重要分支.其中的主要问题——奇点分类问题已有相当大的进展.另外,1968 年米尔诺开展关于复孤立奇点的研究,并得出分类的拓扑不变量.另一个主要问题是微分映射或拓扑映射中较好的稳定映射.虽然拓扑稳定映射是稠密的,但 1969 年麦泽(John Norman Mather,1942—)证明,微分稳定映射只是对于某些好的维数才是稠密的.对于这

些好的映射，可以用一定方法决定其典范形式．在这里起关键作用的是马尔格兰日（Bernard Malgrange，1928—　）证明的微分的外尔斯特拉斯预备定理（1963）．

大范围分析另一方面的发展是斯梅尔从 20 世纪 60 年代初创始的微分动力系统理论．这是微分流形上的常微分方程理论，在 20 世纪 70 年代以后获得长足的发展，特别是混沌的发现成为 20 世纪 80 年代的一大热门．而叶状结构理论可以说是偏微分方程理论，由于鲍特在 1970 年取得突破后，色斯顿等人得到了出色的结果．

2　经典数学

2.1　单复变函数论

19 世纪数学最主要的成就之一是复变函数论的产生与发展．有人说，“19 世纪是函数论的世纪”．实际上，19 世纪所研究的主要是特殊函数，特别是椭圆函数及其推广以及由微分方程定义的函数，如勒让德函数及贝塞尔函数．应该说，到 19 世纪末，一般函数论才真正成为函数论的主要方向，其主要分支如下．

（1）整函数及亚纯函数理论．

比多项式复杂的函数是超越整函数．n 次多项式有 n 个根，它们可以表示为各因子的乘积．如果复变元 z 的复值函数在所有不等于 ∞ 的点 z 处全纯，则称 $f(z)$ 为整函数．当 ∞ 是 $f(z)$ 的极点时，$f(z)$ 就是多项式，而不是多项式的整函数，也就是超越整函数，例如 e^z，$\sin z$，$\cos z$ 等．外尔斯特拉斯最先研究一般（超

越)整函数,他在 1876 年把整函数表示成典范乘积,他还证明,所有复值(包括∞)都是当 z 趋于∞时 $f(z)$ 的极限值. 1879 年法国数学家毕卡大大推广上述定理,证明了毕卡大定理:每一个超越整函数 $f(z)$ 对每一有限值 w,最多除了一个之外,都取无穷多次. 这个定理成为后来值分布理论的出发点,这个可能不取的值被称为例外值. 如果我们把∞也算一个值,则例外值可以有两个. 儒利雅(Gaston, Julia, 1893—1978)在 1919 年把毕卡大定理加以精密化. 他证明,对于超越整函数,至少存在一个方向,在这个方向的狭窄角域中,毕卡大定理也成立,这个方向被称为儒利雅方向.

比整函数再稍微复杂一些的函数是亚纯函数(半纯函数),它在复平面上可以有极点. 同样,外尔斯特拉斯证明它可表为两个整函数的商. 1877 年瑞典数学家米塔格 - 莱夫勒给出部分分式的表示. 对于亚纯函数,毕卡大定理也成立. 在经过许多人的研究之后,芬兰数学家耐凡林那(Rudolf Nevanlinna, 1895—1980)对于亚纯函数的值分布理论进行了统一的论述. 他引进特征函数 $T(r)$ 及亏数等概念,证明第一、第二定理,使值分布理论成为精致的定量理论. 1935 年芬兰数学家阿尔福斯用拓扑的方法建立了覆盖面理论,由它不仅可以推出耐凡林那理论,而且还得出亚纯函数的许多其他结果,由它还明确了例外值的个数 2 的拓扑意义,即与球面的欧拉示性数有关. 其后,值分布理论按照耐凡林那理论的模式向一般区域或黎曼面上进行推广.

(2)级数表示及边界性质.

幂级数及狄利克雷级数是应用最多的复变函数,从 19 世纪末开始有着多方面的研究,特别是对于一个幂级数的收敛圆周成为自然边界的条件,有各种各样的缺项定理. 应用上最常用的

是陶贝尔型定理.陶贝尔型定理是阿贝尔定理的逆定理.1826年,阿贝尔得到阿贝尔定理:如果

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

的收敛半径为1,$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛,其和为 A,则当 z 沿着某条道路趋于1时,$f(x)\to A$.1897年奥地利数学家陶贝尔给出其逆定理成立的条件,即

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

1910年英国数学家李特尔伍德把条件放宽到 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$,而且这个条件不能再放宽了.N·维纳在1932年把李特尔伍德的陶贝尔型定理推广到可测函数,进而证明素数定理.对于在数论上应用最多的狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$,同样也有许多有关其系数及奇点性质的研究,它也有相应的陶贝尔型定理.

(3)几何函数论.

在区域 D 内定义的单值解析函数 $f(z)$,如果 D 内不同两点映到不同点,则称之为单叶函数.单叶函数理论研究是关于保角映射的几何函数论的重要组成部分,有关在单位圆内单叶函数族的理论研究开始于科贝的单值化问题.科贝于1909年得出畸变定理,畸变定理反映了函数值的某种界限.德国数学家毕勃巴赫(Ludwig Bieberbach,1886—1982)在1916年推导定量结果时,得出单叶函数系统理论,同时证明标准化的单叶函数

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

的系数 $|a_2|\leqslant 2$,并猜想 $|a_n|\leqslant n$.几十年来,数学家对此猜想发表了上千篇论文,研究了各种方法,特别是德国数学家娄伍纳

(Karl Löwner,1893—1968)在 1923 年引进偏微分方程,首先证明 $|a_3|\leqslant 3$.美国数学家席弗尔(M.Schiffer,1911—　)在 1938 年引进变分方法,然后得出 $|a_4|\leqslant 4$(1956).直到 1972 年才证明,对于 a_5,a_6,毕勃巴赫猜想也成立.出乎人们的意料,美国数学家德·布兰吉斯(Louis de Branges,1932—　)在 1984 年一举证明了毕勃巴赫猜想,从而结束了这个问题近 70 年的历史.

(4)黎曼面理论.

对于黎曼面的分类,最初是分型问题,即区别开黎曼面是圆盘、复平面,还是开黎曼面的覆盖面,由芬兰数学家阿尔福斯、梅尔堡(P. J. Myrberg,1892—1976)等人从 20 世纪 30 年代初开始研究,后来进入一般开黎曼面的分类,这是从撒利奥(Leo Reino Sario,1916—　)在 1946 年的工作开始的.

1913 年,德国数学家外尔出版了具有划时代意义的著作《黎曼面的思想》,对黎曼面做了抽象的刻画,引进了复流形的概念.其后,匈牙利数学家拉多及罗马尼亚数学家斯托伊洛夫(Simion Stoilow,1887—1961)做出了基础性的贡献.对于闭黎曼曲面的分类,归结为对参模结构的研究.近年来,对于黎曼面的参模结构进行了重要的研究,这方面的工具是 1928 年德国数学家格罗采(Herbert Grotzsch,1902—1993)引进的拟保角映射.保角映射可把地图上的一个小圆映成一个小圆,并保持两条线的交角不变,而拟保角映射则可看成把一个小圆映成一个小椭圆.1939 年德国数学家台什缪勒(Oscar Teichmüller,1913—1943)应用极值保角映射观念研究黎曼面的模,他的文章极为晦涩,后来发现他的思想还是正确的.第二次世界大战以后,黎曼面理论沿着这条路线取得了巨大的进展.

2.2　多复变函数论

多复变解析函数论是单复变解析函数论的自然推广.早在19世纪,已出现特殊的多复变函数,特别是θ函数.至19世纪末,外尔斯特拉斯、庞加莱就已经把单复变情形最简单的结果平行地推广到多复变情形,而且尝试把一些一般定理,如外尔斯特拉斯定理(整函数的表示问题)及米塔格-莱夫勒定理(亚纯函数的有理分式表示)推广到多复变情形.1895年,法国数学家库辛(Pierre Cousin,1867—1933)提出库辛第一问题和第二问题,即给定零点、极点作出相应亚纯函数问题.库辛对函数定义域G是整个n元复空间C^n的情形(以及一些特殊情形)肯定地解决了第一、第二问题,但一般情形直到1935年才由日本数学家冈洁(Oka Kiyoshi,1901—1978)解决.他证明,当G是全纯域时,库辛第一问题永远可解,而第二问题即使对全纯域也还需要满足一定条件,这显示出全纯域的重要性.但是多复变解析函数的定义域远比单复变情形复杂,而且多复变解析函数还具有不同于单复变函数的独特性质,这就是1906年由德国数学家哈托格斯(Friedrich Hartogs,1874—1933)发现的向内可解析开拓性:设C^n中的域G内有一个紧集K,只要$G-K$是连通的,任何在$G-K$上的全纯函数都可开拓到整个G上.这个性质对$n=1$是决不成立的,由此多复变函数论走上自己独立的发展道路.对于向外开拓,多复变情形不同于单复变情形,总有开拓不出去的全纯函数,一般所有全纯函数都可以开拓到更大的域中去,而不具有这种性质的域则被称为全纯域.20世纪上半叶,多复变函数论的主要问题是研究全纯域的刻画问题.为此,哈托格斯及意大利数学家列维引进伪凸性(或拟凸性)的概念,1910年列维提出列维

问题:伪凸域是否是全纯域? 在这方面的第一个重要结果是由H·嘉当及德国数学家图伦(Peter Thullen,1907—)在1932年给出的,他们证明可以用全纯凸性来刻画全纯域.但由全纯凸性过渡到伪凸性又经历了20年.冈洁在1942年证明 $n=2$ 的情形,直到1953年才证明一般情形.1954年诺盖(François Norguet,1932—)及布列莫曼(Hans Joachim Bremermann,1926—)也分别独立证明同样的结果,至此列维问题得到完全解决.

另外,关于多复变解析函数还有一些沿着不同道路进行的研究:德国数学家莱因哈特(Karl Reinhardt)于1921年开创的解析自同构研究;博赫纳(Saloman Bochner,1899—1982)及伯格曼(Stefan Bergman,1899—1977)从1922年开始的核函数研究.对单复变整函数及亚纯函数论的推广也并非易事,法图(Pierre Fatou)等还引出毕卡定理的反例,即解析映集.毕勃巴赫函数 $f: C^2 \to C^2$ 的行列式处处不为零,但其象在 C^2 中的全集却具有非空开集.1930年,H·嘉当证明解析映射的惟一性定理,但1926年儒利雅已把正规族理论推广到多复变情形.在几何函数论方面,庞加莱早就知道 C^2 中的圆盘与双圆柱不是双全纯等价.关于自守函数的推广有两个方向,一是希尔伯特及他的学生布鲁门塔尔(Otto Blumenthal,1876—1944)在20世纪初的工作,一是西格尔在1935—1950年的工作,这些工作与代数数论、李群的无穷维表示和代数几何学联系在一起,形成当前十分活跃的领域.

最早对多复变函数论进行综述的著作是奥斯古德(William Fogg Osgood,1864—1943)的《函数论》第二卷(1924),并在第二版(1929)中作了较全面的总结.其后的成就见于贝恩克(Heinrich Behnke,1898—1979)和图伦的《多复变函数论》(1934),以及博赫纳和马丁(William Ted Martin,1911—)的《多复变》(1948).对

于 1950 年以前的多复变函数论，外尔在《半世纪的数学》一文中说“多复变解析函数论，虽有一些深刻的结果，但仍然还处于它的草创阶段”.实际上，从 1951 年起，在拓扑学、微分几何学、抽象代数学、李群理论以及分析学的共同作用下，多复变函数论迎来了一个辉煌的时期.

首先，研究对象已由多元复数空间 C^n 中的域推广到复解析流形及解析空间. 1951 年德国数学家施泰因（Karl Stein，1913—　）把全纯域的性质抽象出来，定义了后来以他的名字命名的施泰因流形.它具有许多好的性质，特别是 1951 年 H·嘉当和塞尔在其上引进绯索系数上同调及凝聚绯索的概念，用层上同调来表述分析结果，特别是库辛第一、第二问题，这样一举解决了这类问题.反过来，则用绯索上同调来刻画施泰因流形.德国数学家格劳尔特（Hans Grauert，1930—　）在 1958 年证明，复解析流形的相对紧域如果是强伪凸的，则是施泰因流形. 1953 年塞尔提出猜想：底及纤维均为施泰因空间，丛空间是否也是施泰因空间？这个问题刺激了多复变函数论特别是施泰因空间理论的发展. 1977 年斯科达（Henri Skoda）举出一个反例.

复解析流形虽然是单复变解析函数的定义域——黎曼面（一维复流形）的自然推广，但是许多自然定义的集合，最简单的像解析函数的零点集，一般并不是一个复解析流形.因为不是每一点都有一个邻域与 C^n 双全纯等价.显然，这是因为有奇点的缘故.为此，必须把研究对象由复流形大大推广，这就是复空间或解析空间的概念.它首先是由贝恩克和施泰因在 1951 年引进的.从 20 世纪 50 年代中期起，运用绯索上同调理论，格劳尔特、雷姆尔特（Reinhold Remmert，1930—　）及施泰因等人得出一系列基本结果.

解析空间之间的映射中,重要的一类是正常映射(紧集的原象是紧的).关于正常映射的基本结果是格劳尔特在 1960 年证明的直接象定理:如果 $f: X\to Y$ 是正常映射,则 X 上的凝聚绯索的各次直接象都是 Y 的凝聚绯索,而且 $f(x)$是 Y 的解析子空间.另外,广中平祐还把奇点解消定理推广到解析空间.

与单复变情形不同,两个单连通的域不一定双全纯等价(存在一对一的保角映射或共形映射).庞加莱早就指出,在二维复数空间 C^2 中,球体

$$|z_1|^2+|z_2|^2<1$$

与双柱体

$$|z_1|<1, |z_2|<1$$

之间不存在双全纯映射,这由它们的解析自同构群不同即可看出,也知道 C^n 中存在单连通的全纯域,它没有非平凡的自同构.对于一般解析空间的自同构群,只有特殊的结果,而关于它们之间映射的普遍定理,只有费弗曼(Charles Fefferman,1949—)在 1974 年证明的扩张定理:如果 C^n 中两个严格伪凸域 D_1, D_2 之间存在映上同构,则该同构可扩张成包含边界的微分同胚.1980 年以后,有人给出简短的证明.

与施泰因流形对立的另一极端是紧复流形,其概念可追溯到外尔的《黎曼面的概念》(1913)一书.由于紧黎曼面与光滑代数曲线是同一事情的不同说法,紧复流形理论也可看成是代数几何学的推广,而在方法上却有微分几何学及分析上的好处.最重要的一类复流形是凯勒(Erich Kähler,1906—2000)流形,特别是所有非奇异射影代数流形都是凯勒流形,反过来则不成立.1954 年小平邦彦证明,只有约束型凯勒度量的复流形(浩治流形)才是代数流形.凯勒流形上重要的工具是调和积分论,这是

由浩治在 1941 年发展起来的,它可看成黎曼面上的调和函数论在复流形上的推广.调和积分理论把拓扑的关系通过具体的调和积分表示出来,由此可以得出一系列深刻的结果.例如,1954 年小平邦彦证明的致零定理把曲率与拓扑性质联系起来.

1963 年美国数学家柯恩(Joseph John Kohn,1932—　)对重要的伪凸流形,特别是强伪凸流形,解决诺意曼问题,开创了一个新时期.利用这种方法不仅解决了许多函数论问题,而且把浩治及小平邦彦关于紧复流形的结果推广到非紧复流形及带边缘复流形上.

2.3　调和分析

调和分析也称傅立叶分析,来源于实值周期函数的三角级数表示.对于函数 f 可以定义其傅立叶展开

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

另外,我们也不难把它推广到复值情形.

调和分析的主要问题是函数 f 的傅立叶级数的"和"是否存在,是否"等于"f.最初,"和"与"等于"自然地理解为逐点收敛的,后来更富成果的是几乎处处收敛和依范数收敛.人们早就知道,存在连续函数的傅立叶级数,它在某一点上,甚至在许多点上发散.如果考虑切萨洛意义下的求和,则费耶尔(Lipót Fejer,1880—1959)定理(1904)指出:在这种意义下,每一连续函数 f 的傅立叶级数逐点收敛于 f.但对于可积函数,情况就差得多.柯

尔莫哥洛夫证明,若只要求 $f\in L^1[0,2\pi]$(即 f 在 $[0,2\pi]$ 上可积),则 f 的傅立叶级数几乎处处发散(1923),或甚至于处处发散(1926).介乎两者之间是 $L^p(1<p<\infty)$ 情形,最典型的是鲁金问题:如果 $f\in L^2[0,2\pi]$,则 f 的傅立叶级数是否几乎处处收敛于 f 呢? 过了50年仍无法回答这个问题,寻求肯定证明的努力遭到无数次失败,以至于20世纪50—60年代专家们几乎一致认为,鲁金问题的答案必定是否定的.令人感到惊异的是,其答案却是肯定的.1966年,瑞典数学家卡尔松给出了第一个证明,特别是他的证明没有用到以前所不知道的技巧.1967年洪特(Richard A. Hunt)证明,如果 $f\in L^p[0,2\pi]$,其中 $1<p<\infty$,则 f 的傅立叶级数几乎处处收敛于 f.这样就漂亮而完整地结束了傅立叶级数论中最重要的一章.

对于函数 f 及其傅立叶级数的系数序列 $\{a_n\}$ 之间的关系,只有当 f 是平方可积函数($\in L^2$)时才有极好的性质,即1907年由黎斯及费舍尔分别独立证明的黎斯—费舍尔定理,它指出任意 L^2 中的函数都存在收敛于其自身的傅立叶级数,反过来,对任意平方可积序列 $\{a_n\}$,也都存在 L^2 中的函数 f,使 $\{a_n\}$ 为其傅立叶级数的系数序列,同时有帕塞瓦尔定理成立:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2.$$

这当然是最理想的情形.但是,对于任何 $L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 情形要复杂得多.设 $1<p<2$,$f\in L^p$,它展开成傅立叶级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{-inx},$$

那么如果在系数前随机地加上正负号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\pm a_ne^{-inx}$,则这些三角级数以概率1不是傅立叶级数.1930年起,李特尔伍德及佩

利(Raymond Edward Paley, 1907—1933)创立李特尔伍德—佩利理论,特别是把 f 分解为"二进"块之和

$$\triangle_0 + \triangle_1 + \cdots + \triangle_k + \cdots$$

其中 $\triangle_k = \sum a_n e^{inx}$,用这个分解来代替傅立叶级数可得 L^p 空间的结果. 相应于 L^p 空间,对于单位圆上的全纯函数,哈代及黎斯建立了哈代空间 H^p 理论. 对于 $1 < p < \infty$,可以证明 L^p 与 H^p 同构,有趣的情形只是 H^1 及 H^∞.

以傅立叶级数理论为模式,可以在许多方向上进行推广. 首先是从周期函数推广到全实线$(-\infty, \infty)$上的任意函数,这样就产生傅立叶积分理论. 对于在$(-\infty, \infty)$上的勒贝格可积函数 f,可定义其傅立叶积分或傅立叶变换式

$$Ff = \hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x.$$

傅立叶积分理论大致与傅立叶级数理论平行,但也有许多差别. 例如,对周期函数有 $L^p \subset L^1$,而对非周期函数有 $L^p \not\subset L^1$,因此定义时可取 $L^p \cap L^1$ 中的函数. 与傅立叶级数情形类似,L^2 的情形最理想. 瑞士数学家普兰舍瑞尔(Michel Plancherel, 1885—1967)在 1901—1915 年对此进行了研究,特别是在 1910 年证明了普兰舍瑞尔定理:傅立叶变换 F 及其逆变换 F^{-1} 是 L^2 空间到自身的等距变换. 这个定理是后来许多推广的出发点. 由此可推出帕塞瓦尔定理成立:

$$\| f \|_2 = \| \hat{f} \|_2,$$

其中"$\| \ \|_2$"表示 L^2 中的范数;对于 L^p 空间,$1 \leqslant p \leqslant 2$,相应的只有不等式

$$\| \hat{f} \|_q \leqslant \| f \|_p,$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，这通称豪斯道夫—杨不等式，是他们分别在1923年和1913年得出的，由此出发，发展出一套算子内插理论.

第二次世界大战前后，傅立叶分析向多维化及抽象化方向发展.多维傅立叶分析正如多复变函数论一样，与一维情形相差甚远，最早是博赫纳的工作.从20世纪50年代起，阿根廷裔数学家卡尔德隆(Alberto-Pedro Calderon，1920—1998)与波兰裔数学家齐格蒙(Antoni Zygmund，1900—1992)所创立的奇异积分理论起着最重要的作用.其后，斯坦因(Elias M. Stein，1931—)和外斯(Guido Leopold Weiss，1928—)把H^p空间推广到高维，而且在一维问题上也有突破.1971年巴克荷路德(Donald L. Burkholder，1927—)等人用概率论的方法刻画H^1中函数的实部.次年，费弗曼及斯坦因把它推广到n维；同时，费弗曼证明，H^1空间的对偶空间是BMO，这里BMO是1960年由约翰(Fritz John，1910—1994)及尼仑伯格(Louis Nirenberg，1925—)引进的有界平均振动函数空间，这个结果也立即被推广到n维.

由于周期函数可以看成是定义在圆圈群T上的函数，R本身对加法也是交换群，调和分析最大的发展是向一般群上的推广.这在20世纪50年代产生出抽象调和分析理论.对于局部紧交换群，有一套漂亮的理论，例如用代数方法证明N·维纳在1932年提出的广义陶贝尔型定理.而对于局部紧李群，则与群表示论方法相结合，形成非交换调和分析的庞大分支.

2.4 偏微分方程论

一般偏微分方程理论到19世纪末还没有成熟，当时只有柯西及柯瓦列夫斯卡娅的存在定理.20世纪初阿达马开始探讨一

般理论.他在1903年提出偏微分方程的“适定”问题,不仅要求解存在及惟一,而且要稳定,即连续地依赖于给定的初始条件或边界条件,否则就不是具有物理意义的解,至此才明确偏微分方程理论的中心问题.从这时起,证明偏微分方程解的存在惟一性及稳定性是偏微分方程论的主要任务.20世纪上半叶发展了一套有效的方法.其中最常用的是先验估计,首先证明对条件的连续性,然后应用泛函分析的定理(巴拿赫定理及黎斯定理)证明存在性和惟一性.反过来,巴拿赫的闭图象定理又可以在多种情形下,由存在性及惟一性证明其连续依赖性.另外,阿达马对于二阶正规双曲型方程引进基本解(法文称初等解)的概念.勒瑞、肖德尔在1930年得到的不动点定理,索保列夫(Sergei L'vovich Sobolov,1908—1989)在1936年引进的广义解概念,尤其是施瓦兹提出的广义函数论,给偏微分方程提供了系统的函数空间工具.

第二次世界大战以后,偏微分方程理论取得巨大的发展.1954年左右,马尔格兰日等人证明,对于常系数线性偏微分方程都存在基本解.1956年刘威(Hans Lewy,1904—1988)举出著名的反例,对于光滑系数线性方程可能没有解存在.1958年卡尔德隆证明光滑系数偏微分算子的柯西问题的惟一性条件.1970年,尼仑伯格等人分别得出这类方程有解的充分条件和必要条件.1973年,费弗曼等人得出充分必要条件.在这个过程中,1965年许多人同时引进一大类伪微分算子,1968年它们又被瑞典数学家赫曼德尔(Lars Hörmander,1931—)推广为傅立叶积分算子,这一大类算子是举世瞩目的中心,它们不仅包含从前所知的微分算子,而且也包括奇异积分算子.它们的集合构成算子代数,具有很好的不变性质.

1967年,加德纳(Clifford S. Garnder,1924—　)等人解决了浅水波的考德威赫—德·夫瑞斯方程的孤立子解,震动了整个数学及物理学界,他们用的是逆散射方法,由此开创了非线性分析的新时代.

结 束 语

数学史研究应该能统摄过去并指明未来.当然,历史研究还不足以科学地作出精确预测,特别是对突发事件,但是确实应该对发展趋势提出一些自己的看法.作为一部《近代数学史》,我们很难对20世纪的数学进行详细的论述及分析,不过通过对近代数学长入现代数学的概括性论述,我们还是可以对当代数学的趋向作出初步的预测.

近代数学,特别是19世纪的数学,给数学带来多样性,它不仅把18世纪及其以前的古典数学问题基本解决并纳入其广博的体系之中,而且开创了丰富多彩的新领域.几乎现代数学的所有主题,都可以在19世纪的数学中寻找到自己的根.20世纪的数学给数学带来统一性,它把经典数学在数学结构的观点之下统一在一起,并且由于结构的相互作用而产生许多新的学科,布尔巴基学派就是这种统一的代表.他们不仅成功地统一了大部分数学,而且用结构的观点扩大数学的领域,解决了一系列经典问题.20世纪40—70年代,可以说是布尔巴基学派的全盛时期.20世纪70年代以后,数学又出现了一些全新的趋向.

(1)结构数学与经典数学相结合,导致许多遗留几十年乃至二三百年的问题获得明显进步乃至完全解决.我们只列举几个例子:

①通过椭圆曲线这个简单的三次代数曲线,导致一系列问题获得解决,从费尔马大定理到素数判定和素因子分解.

②代数曲线或黎曼面的参模结构问题,与此有关的如肖特基问题,特别是诺维科夫猜想在1986年由盐田隆比吕所解决.

③伯恩塞德猜想取得明显进展,伊凡诺夫(I.I.Ivanov)在1992年解决有界型伯恩塞德猜想,捷尔曼诺夫(Y.I.Zelmenov,1955—)在1990—1991年肯定解决限制型伯恩塞德猜想.

④法尔廷斯在1983年证明莫德尔猜想.

⑤在1983年琼斯引进新的环结多项式之后,1986年有6位数家学引进HOMFLY多项式,一方面包含亚历山大多项式,一方面包含琼斯多项式.1988年瓦西里耶夫(Vassiliev)引进更一般的纽结不变量,纽结的完全分类已为期不远.

⑥卡塔兰猜想,2002年已完全解决.

(2)许多经典问题取得很大进步,但总有一些问题有着不同程度的困难,很难解决.其原因在于一些偏题、孤立的问题脱离了数学主体,解决不解决对数学的影响不太大,如奇完全数是否存在这类千年难题.哥德巴赫猜想与孪生素数猜想在方法上可有改进,华林问题的各种推广也是如此.

在21世纪初,一些重要的经典问题可望获得解决或取得突破:

①黎曼猜想;

②三次不定方程是否有算法判定可解性;

③椭圆曲线的BSD猜想;

④实代数曲线的拓扑研究(希尔伯特第16个问题);

⑤极限环问题(希尔伯特第16个问题);

⑥三维庞加莱猜想(2003年俄罗斯数学家佩列尔曼(Perel-

man)已取得决定性突破);

⑦数的几何基本问题;

⑧存在无穷多实二次域具有类数 1(高斯猜想);

⑨伽罗华理论逆问题.

从本书所叙述的系统可以看出,19 世纪的数学通过 20 世纪的扩大化、抽象化及互相关联,形成了统一化的趋势,这必将继续在 21 世纪获得蓬勃的发展.

数学家小传

这里介绍20位19世纪重要数学家的生平及工作，以求略微弥补正文中未能涉及的不足.

1　贝尔特拉米(Beltrami)

贝尔特拉米，1835年11月16日生于意大利的克雷莫纳，1853—1856年在帕维亚大学学习数学，后来曾任铁路工程师的秘书.在米兰时曾继续学习数学.1862年发表第一篇数学论文，讨论曲线的微分几何学.1862年在博洛尼亚大学任教，1864—1866年任比萨大学测地学教授，在这期间与贝蒂结成终身友谊.当时黎曼正在比萨休养，他们的谈话对贝尔特拉米的一生有重大影响.1866年回到博洛尼亚大学任理论力学教授，1873—1876年在罗马大学任教授，其后回帕维亚大学任数学物理学教授.1891年又返回罗马大学，直至1900年2月18日去世.他于1873年被选为山猫科学院院士，1898年被选为院长.

贝尔特拉米的数学研究大体分为两部分.1872年之前主要研究曲线及曲面的微分几何学，1861—1863年写了8篇小论文，其后突然在1868年发表了《分析应用于几何学的研究》，内容直接建立在高斯、黎曼的思想基础上，出现微分参数Δ_1，Δ_2，为自

己以后的研究奠定了基础.例如建立测地线的方程,从而解决了"把曲面上的点映射到平面之上,使测地线映为直线".他得出定理:使曲面上的测地线映到平面上的直线的曲面均为常曲率曲面,即各点的曲率均相等的曲面,曲率等于0时为平面,不等于0时为球面.同年他又发表了《论非欧几何学的解释》,其中首先给出第一个罗巴切夫斯基几何学的模型——伪球面模型,其后又推广常曲率曲面到高维空间,并得出高维的非欧几何学.他第一次在微分几何学中引进微分不变式理论,这极大地推动了非欧几何学及微分几何学的发展.

1872年之后,贝尔特拉米转向应用数学的研究,特别是流体动力学、位势理论、波动理论、热力学、光学、弹性理论及电动力学.其中突出的是他在分析问题中引进几何方法,这对后来的数学物理学有一定影响.贝尔特拉米的非欧几何学模型是非欧几何学发展的分水岭.在此之前,大多数人认为非欧几何学荒谬,而其后除了少数人之外,非欧几何学被广大数学家所接受.

2 凯雷(Cayley)

凯雷,1821年8月16日生于英格兰的里士满.父亲在俄国经商,他从小在圣彼得堡长大,直到1829年全家返回英国,定居在伦敦附近的布莱克希思,这时凯雷进入一家私立学校读书,很快他就表现出对数值计算的爱好和才能.14岁时,父母把他送进伦敦王立学院中学.中学校长发现他具有数学天才,就劝告他的父亲让他上大学深造.他的父亲原来想让儿子继承父业,在老师的劝说下,同意他上剑桥大学.这样他在17岁时,就到剑桥三一学院读书.在大学时,他就享有"数学家"的名声.当时英国数

学远远落后于欧洲大陆,一些有识之士组织分析学会,主张向欧洲大陆数学学习,并且开始创办一些数学期刊,《剑桥数学杂志》也在这时应运而生.还在大学时,他已经写了3篇论文发表在这个杂志上,他的这些最早的工作是学习拉格朗日和拉普拉斯的力学著作的结果.1842年,他以优异的成绩毕业,不久就获得研究员职位.在整个19世纪中,他是取得这个职位时最年轻的毕业生.

他继续留在剑桥大学,除了教几个学生之外,主要从事研究工作,在短短4年当中,他写了28篇论文发表在数学杂志上.但是,这个职位收入有限,他必须选择另外一个足以维持生活的职业,他挑选了法律.而要取得律师资格,必须加入到伦敦的四个法律协会中的一个进行学习和实习.1846年他在林肯法律协会中学习,1849年取得律师资格,从此一直干到1863年.他具有非凡的表达能力与业务才能,律师工作对他来说还是不难的.但是,他热爱数学,仍然把所有的业余时间都献身于数学研究.还在学法律时,他就曾跑到都柏林去听哈密尔顿关于四元数的演讲.他的朋友西尔维斯特当时也在伦敦当保险统计员,两人经常在法律协会的院子里散步,讨论当时刚刚出现的不变式论.在从事律师行业的14年中,凯雷就写出了200多篇数学论文.

当时在英国能够靠数学谋生的职位真是凤毛麟角,剑桥大学只有卢卡斯教授职位,这是牛顿曾经任职的讲座.1860年塞德勒夫人捐赠的基金被用来建立一个新的数学教授职位,规定新教授的义务是"阐明和教授纯粹数学的原理并从事这门科学的研究和发展".1863年,42岁的凯雷被选为塞德勒教授.教授的薪水仍很微薄,远远比不上律师的收入,但他毅然放弃法律业务,到剑桥大学当教授.他马上结婚并且在剑桥定居下来.他的

家庭生活美满幸福,他全心全意投入到他所热爱的数学当中.他一年只教一个学期的课,到 1886 年教学改革后教两个学期.听讲的学生不多,开始时只有几个人,后来也不过十几人.他把大量的时间和精力用来从事研究工作,他的论文一篇接一篇地写出来,在欧美各个数学系里流传.到他 1895 年 1 月 26 日去世时,一共发表了上千篇论文,其中三分之二以上是他当剑桥教授后写的.

他不是一门心思钻研数学的人,他还有许多业余爱好.他一生喜欢读小说和旅游,年轻时还爱爬山,是爬山俱乐部成员.他喜欢绘画和建筑,自己没事也爱画水彩画.他热爱学生,总是很和蔼、耐心地指导他们.他的法律知识对他担任学校的行政职务也有好处.他还关心女子的大学教育运动,并直接帮助女子学院的教学活动.

3 沙勒(Chasles)

沙勒,1793 年 11 月 15 日生于法国埃培农,父亲是木材商人,沙勒早年入帝国公立中学读书,1812 年进入巴黎综合工科学校学习,1814 年被征入伍参加巴黎保卫战,战后他回到巴黎综合工科学校,被接受参加工程兵部队,但因照顾一个贫困同学而放弃了.回家后他服从父亲的意愿到巴黎一家股票经纪所工作,不过不太成功,于是他回到家乡,潜心于数学及历史的研究.1837 年他的主要著作《几何方法的起源与发展历史概述》发表,给他带来几何学家及历史学家的巨大名声,于是,1841 年他被任命为巴黎综合工科学校测地学及应用力学教授,直至 1851 年.1846 年他就任巴黎大学理学院专门为他设立的高等几何学

教授职位,并任职到 1880 年 12 月 18 日去世.1839 年他被选为法国科学院通讯院士,1851 年被选为院士.他在《几何方法的起源与发展历史概述》一书中,表明了他捍卫庞塞莱纯粹综合几何学的观点,这种观点在他后来于 1852 年完成的《高等几何学通论》(1880 年出版)及 1865 年出版的《圆锥曲线论》中也有所反映,他把对偶原理及射影原理都建立在一般图形变换理论的基础上.

沙勒是 19 世纪中叶重要的科学史家,除了上述著作外,还有 1870 年发表的《几何进展报告》,这是研究 1800—1866 年几何学史的重要资料.除了几何学史的著作以外,还有《算术史》(1843),对数系的起源及演化进行了探讨.他还收集 17 世纪许多科学家的通信,并发现德萨格的遗著.1860 年出版《欧几里得衍论三卷》.

沙勒在几何学上的主要贡献是开创了"计数几何学"这一新领域.1864 年他提出"特征"方法及几何置换方法.1865 年的《圆锥曲线论》一书中已包括计数几何的结果,即决定有多少某种类型的图形满足某种代数或几何条件.

4 克里福德(Clifford)

克里福德,1845 年 5 月 4 日生于英格兰的埃克斯特.他幼年丧母,在家乡的私立学校接受初等教育,很小就表现出非凡的天才.15 岁时进入伦敦国王学院学习,在学院中不仅表现出特殊的数学才能,而且在古典语文和英国文学方面也成绩优异.18 岁时,他进入剑桥大学三一学院攻读,在三年级就荣获学院的奖励.1867 年他以优等第二名的成绩毕业,1868 年他成为伦敦大

学学院研究员.1870 年赴意大利观测日食时,船在西西里岛海岸附近遇难,他得以幸免.1871 年被任命为应用数学及力学教授.1875 年结婚后,他的家成为许多朋友的聚会场所.1876 年他染上肺病,曾去阿尔及利亚和西班牙休养半年.但他仍继续努力工作.一年半以后,病情再度恶化,他又一次到地中海岸边疗养.1878 年秋,他到麦德拉岛休养,但已回天无望,于 1879 年 3 月 3 日去世,还未满 34 岁.

在短短十多年的时间里,他不仅著有大量数学论文,而且写了许多哲学论著.他喜欢小孩,为孩子们写了童话《小人儿》,还写了不少诗.他是一位卓越的教师,自己打算编写一大套数学教科书,不过在生前只出版了《力学原理》前三卷,第四卷在他去世后才出版.他还是科学思想的伟大传播者,他的讲演生动、有趣而深刻,很受欢迎.

克里福德是当时英国最好的数学家之一,他把非欧几何学及黎曼的思想介绍到英国来,自己也做了许多这方面的工作.

5 达尔布(Darboux)

达尔布,1842 年 8 月 13 日生于法国的尼米斯,他的父亲是服饰业商人,1849 年去世.他的母亲承担起养家及教育两个儿子的双重责任.他是长子,1853 年进入尼米斯中学.在母亲的精心照料下,达尔布顺利地读完中学,并取得科学业士学位.1859 年 10 月,达尔布进入蒙特彼里埃高级中学读预科数学,在老师查理·贝尔热(Charles Berger)的热心指导下,他对数学产生很大兴趣,并立志献身教育事业.1861 年 10 月,他先后考上巴黎综合工科学校和巴黎高等师范学校,都是第一名.一般学生都愿意上

巴黎综合工科学校，但是达尔布毅然选择了巴黎高等师范学校，这开了一个先例，从此大批优秀数学家成了巴黎高等师范学校的毕业生.

在巴黎高等师范学校的三年学习生活中，达尔布深入钻研蒙日、高斯、庞塞莱、杜潘、拉梅、雅可比等人所解决的一些重大的几何学问题，从此开始了自己的研究.1864年他开始发表关于正交曲面的论文.1864年9月在教师资格会考中，他又考了第一名.著名科学家巴斯德(Louis Pasteur,1822—1895)写道:“这位年轻人很快会成为我们最著名的数学家中的一位.”这样，他留校当助手，并继续自己的研究工作.此后不久，他写出《论正交曲面》的论文，并于1866年7月在巴黎大学取得博士学位.

在当了一年代理教授之后，他到著名的路易十四高级中学任教.在这期间.他写了不少分析及几何方面的论文，特别是1870年发表的《一类重要的代数曲线和曲面》和《论二阶偏微分方程》.

1872年10月，达尔布离开中学，到巴黎高等师范学校任助教，1873—1881年任讲师，其间曾代刘维尔的天体力学课及沙勒的高等几何学课.1881年4月任巴黎大学理学院高等几何学教授.1889—1903年任理学院院长，后任名誉院长.他于1884年当选为法国科学院院士，1900年起任法国科学院几何学部终身秘书.1917年2月23日在巴黎去世.

6 戴德金(Dedekind)

戴德金，1831年10月6日生于德国的布隆什维克，他的父亲是一位法学教授，他的母亲是一位教授的女儿.戴德金是四个

孩子中最小的,7岁起在家乡上中学,开始对化学和物理学产生兴趣,而把数学只看做是辅助性学科.但是,他很快就感觉到物理学缺少条理和严格的逻辑结构,于是就专心学习数学.1848年戴德金进入了卡罗琳学院,这也是高斯的母校.在这里,他学到了解析几何、微积分以及力学等知识.1849—1850年间,他还给低年级学生授课.1850年复活节,他进入格廷根大学学习,当时格廷根大学刚建立起数学和物理学讨论班,在这里他开始学到数论的基础知识.1851年黎曼开始参加这个讨论班,他们很快结下了深厚的友谊.他在大学里还学习物理和天文,并听过高斯讲的最小二乘法及高等测量学,还听过其他学者开的课程.他只上了四个学期,就在高斯的指导下准备博士论文,论文的题目是《关于欧拉积分的理论》,得到了高斯的好评,高斯还预言他未来会有很大的成就.这时,戴德金觉得虽然他的知识对于教中学已绰绰有余,可是他对格廷根的课总感觉程度不高.在格廷根,听不到狄利克雷、雅可比、史坦纳讲授的高等数论、高等几何、椭圆函数、数学物理等最新的课程,因此他又花了两年时间弥补他受教育的不足.

1854年夏,他取得大学讲师资格,同年年底开出概率论和几何学两门课程.1855年,狄利克雷到格廷根之后,戴德金听他讲授了数论、位势理论、定积分及偏微分方程的课程.他很快同狄利克雷有了密切的交往,并同他进行了多次富有成果的讨论.据戴德金后来回忆,狄利克雷把他变成了一个新人,并大大扩展了他在学术方面的视野.他还参加了狄利克雷和他的朋友们的社交活动.1855—1856年,戴德金听黎曼讲授了阿贝尔函数和椭圆函数的课程,他自己也开始讲授伽罗华理论.他可能是第一个开伽罗华理论课程的人.在讲课中,他引进了域的概念,并且把

置换群的概念用抽象群的概念来取代.

1858年戴德金被聘任为瑞士苏黎世理工学院教授,他在讲授微积分的课程时深感分析基础的薄弱,从此开始对实数理论基础进行研究.1859年9月,戴德金陪黎曼到柏林大学访问.在那里他遇到了外尔斯特拉斯,也遇到了他以后的论敌克洛耐克.1862年,他被家乡的高等工业学院聘任为教授,于是他返回家乡,直到1916年2月12日去世.

戴德金终身未婚,同他的二姐住在一起,在他亲属的关怀下,他有充分的时间和自由从事基础数学的研究工作.但是布隆什维克是个小地方,他同别人的交流不是太多,他有时也到外地旅游,曾在1874年遇到了G·康托尔,两人的思想交流和书信往来推动了集合论的诞生.由于戴德金在数学方面的许多重大贡献,1862年被选为格廷根科学院通讯院士,1880年被选为柏林科学院通讯院士,1910年被选为巴黎科学院通讯院士.戴德金富有音乐天才,他演奏的钢琴和大提琴都相当不错,而且还作过曲.

在完成从古典数学到现代数学的转变中,戴德金是一个重要的代表人物,他在代数数论上有卓越的贡献,并直接导致抽象代数学的产生.狄利克雷的《数论讲义》是高斯的《算术研究》的最好入门书.戴德金在编辑该书的第2~4版时,把自己的思想作为附录附在书后.在1871年第2版的附录Ⅹ中,他建立了一般代数数域理论,定义了一般理想的概念.后来,戴德金还定义了环与单位等概念.1900年,他定义了对偶群(即格)的概念,这些都是现代数学的基本对象.

7 狄利克雷(Dirichlet)

狄利克雷是高斯和黎曼之间最伟大的数学家之一,但是他的名声往往被这两位数学家所掩盖,没有得到应有的注意.实际上他在数学研究的深度、广度及个人影响方面都是巨大的,特别是他和雅可比两人从根本上扭转了德国数学在数学教学及科研方面的落后状况,开始了德国数学在100年间处于领先地位的局面.

狄利克雷,1805年2月13日生于德国亚琛附近的都仑,他的父亲是邮政局长,他是家中的第七个孩子,1817年到波恩上中学,1819年转到科隆进入耶稣会中学.他的数学老师是马丁·欧姆.当时德国数学虽然出了高斯,但整体水平不高,于是他在1821年中学毕业之后,决定去当时的数学中心巴黎学习.他从1822年5月到1826年秋定居巴黎,在法兰西学院及巴黎大学理学院听课,结识了拉克鲁瓦、傅立叶及波瓦松,课余自修高斯的《算术研究》.1823年夏,他被福瓦将军聘为家庭教师.1825年夏他结识了亚历山大·冯·洪堡,并认识了许多法国科学家.同年,勒让德及拉克鲁瓦代表巴黎科学院接受了他的第一篇关于五次不定方程的论文,证明费尔马大定理 $n=5$ 的情形.1825年冬,福瓦将军去世,他离开福瓦家.1826年5月,他致函普鲁士文化部长史泰因申请工作,并附上亚历山大·冯·洪堡的介绍信.1826年底他回到都仑,1827年初在波恩获得名誉博士学位,并被布列斯劳大学聘为无薪讲师.1828年4月升为副教授,不久又到柏林军事学校上课,并在柏林大学兼课.1829年夏,他去度假时认识雅可比,两人结下终身友谊.1831年7月,他被正式任

命为柏林大学副教授,同时继续在柏林军事学校上课.在亚历山大·冯·洪堡的介绍下,他结识了著名音乐家门德尔松(Felix Mendelsohn,1809—1847)一家,1832 年娶其妹莉百加(Rebecca,1811—1858)为妻,婚后生有三子一女,他的家庭也成为柏林文化界的社交中心.1832 年初他被选为柏林科学院院士,1839 年升为柏林大学教授.1843 年秋他到意大利旅游,因病两次延长假期,1845 年春才回到柏林.1849 年他同雅可比一起去格廷根参加高斯获博士学位 50 周年纪念活动.不久雅可比去世,他整理发表了雅可比的遗稿,并在柏林科学院发表纪念演说.1855 年高斯去世后,狄利克雷被选为高斯的继任者.1858 年夏他患心脏病,加上年末妻子突然去世,在这种打击之下,他于 1859 年 5 月 5 日去世,享年 54 岁.

8 哈密尔顿(Hamilton)

哈密尔顿是英国自牛顿以后最伟大的数学家兼数学物理学家.18 世纪后期英国数学衰落,到 19 世纪 30 年代以后,英国数学开始复兴,在数学物理学及代数学两方面均有所成就,而这两方面均有贡献的只有哈密尔顿.

哈密尔顿,1805 年 8 月 5 日生于爱尔兰的都柏林,从小就是一个神童,5 岁时就能读拉丁文、希腊文和希伯莱文,8 岁时学会意大利文及法文,还不到 10 岁,又对学习东方语言充满热情,以一年学会一种语言的速度学会阿拉伯文、梵文等等,14 岁时就能以波斯文的颂词迎接波斯大使.

哈密尔顿在 13 岁那年,遇到一位美国计算神童,这才激起他对数学的兴趣,不久他就开始钻研数学经典著作.先是读牛顿

的《通用算术》、克莱洛的《代数》,其后读牛顿的《自然哲学的数学原理》以及拉普拉斯的《天体力学》,还在1823年指出后一书中证明力的平行四边形的数学错误,这些都引起都柏林大学天文学教授布林克利的注意.他还研究平面直线系的表示方法,这成为他向爱尔兰皇家科学院递交的第一篇论文.在这时,布林克利已经说:"这位年轻人,我不讲他将会是而是讲他现在就是当代第一流数学家."他还对诗歌极为热衷,自己一生写诗、译诗,并结交当时最著名的湖畔诗人华兹沃思(William Wordsworth, 1770—1850)、库勒里治(Samuel Taylor Coleridge, 1772—1834)等人,经常一起唱和.但是诗人并不特别欣赏他的作品.18岁时,哈密尔顿进入都柏林大学三一学院,他在古典文学以及数学方面都表现突出,多次荣获金牌,以至于布林克利升为主教之后,教授职位空缺,有许多杰出的候选者,哈密尔顿并不是正式的候选人,但是被鼓励去申请.结果这位大学还没有毕业的学生被任命为都柏林大学天文学教授以及都柏林附近的邓辛克天文台台长.1827年10月他开始定居于此,开始他那一身三任(哲学家、数学家、诗人)的生涯.哈密尔顿的前期工作主要是数学物理学,1832年他又写了一篇关于光线系统的论文,预言圆锥折射现象,不久被实验所证实.1833年他把光学原理应用于动力学上,提出特征函数观念.其后两年中他又提出哈密尔顿最小作用原理,引进哈密尔顿运动方程,从而使经典力学研究达到顶峰.应该说,哈密尔顿的光学及力学思想,不仅大大促进了当时物理学的发展,而且在100年以后推动了量子力学的诞生,对科学的意义要比他的代数工作更为重大.不过在19世纪中期,不论是他还是其他科学家,对四元数几乎形成一种狂热.但到19世纪末,除了少数人之外,四元数已让位于远为方便的向量观念了.

哈密尔顿关于代数的研究很早就已开始,他一直不满意皮科克关于代数学是“符号及其组合的体系”的说法,也不满意德·摩根对它的改进,他要建立一个更为实在的基础.他阅读了康德的《纯粹理性批判》后,受到很大启发.康德认为时间和空间是各种先验综合知识的两个来源,既然几何学是空间的科学,因此代数学必定是时间的科学.于是,1829年哈密尔顿在爱尔兰皇家科学院宣读了一篇论文,题目就是《作为纯粹时间科学的代数学》,其中主要谈到,几何学是建立在对空间的纯粹直观基础上的.在为代数学建立了哲学基础之后,遇到的第一个问题就是:时间是一维的直线,那么解二次方程时遇到的虚数怎么办?这样就开始了复数的研究.1837年他把复数 $a+bi$ 解释为实数的有序偶,并规定其运算规律以免除 $\sqrt{-1}$ 的麻烦.这样,复数仍然可以建立在一维实数的基础上.沿着这条道路,进而寻找“三维复数”.经过多年的努力,他终于在1843年10月16日同夫人沿着皇家运河散步时,突然心中产生一道闪光,发现了四元数.在通过布洛干桥时,他迫不及待地用小刀把公式刻在桥石上(即 $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$).当天参加爱尔兰皇家科学院会议时,他要求宣读关于四元数的论文,会议同意他在下一次全会(11月13日)宣读.1845年哈密尔顿到剑桥参加不列颠科学促进会年会后,他在牛顿著述《自然哲学的数学原理》的房间里住上一星期,这给他留下深刻印象.为了准备像《自然哲学的数学原理》那样的著作,他辞去爱尔兰皇家科学院主席职务,开始全力以赴撰写关于四元数的著作.其中第一部源于1848年在都柏林大学三一学院的六次讲课,当时听课的有凯雷及萨尔孟等,这些讲课的讲义《四元数讲义》于1853年出版.其后他准备大大扩展他的《四元数原理》,但是在他去世时还差一章没有完成,这本书在他去

世后出版(1866).他身体多病,由于婚姻不美满,他酗酒导致酒精中毒,晚年患痛风,在极其痛苦的情况下,于1865年9月2日去世.

9 埃尔米特(Hermite)

埃尔米特,1822年12月24日生于法国洛林地区的迪约兹.早年就自学拉格朗日及高斯的著作.1842年秋考入巴黎综合工科学校时已开始独立进行科研工作.1842年他写了两篇短文投给新创刊的《新数学年报》,1843年他把研究阿贝尔函数的除法所得到的结果告诉雅可比,得到下面的鼓励:"假如你看到你的一些发现在我以前的研究工作中已经有了,你不要为此烦恼,因为你从我最后完成的地方开始搞,必然有一小块相重的地带.将来如果我荣幸地收到你告诉我的结果的话,我将只会去好好学习."1847年他取得学士学位并通过教师资格考试.其后,1848年任巴黎综合工科学校辅导教师,1856年被选为巴黎科学院院士.1862年,巴黎高等师范学校为埃尔米特设立一个教授席位,1869年他还被巴黎综合工科学校及巴黎大学聘为教授.他是一位很好的老师,总是启发及引导学生了解高斯、雅可比、阿贝尔、柯西等人开创的事业及其最新的发展.1869—1875年他在巴黎大学讲方程论,后来他讲积分及函数论.他培养了大批学生,如庞加莱等.他与许多人的通信有着重要的历史价值,如荷兰数学家斯蒂尔捷斯.1901年1月14日他在巴黎去世.

埃尔米特在当时是法国数学界的领袖人物,也是国际公认的数学权威.他在椭圆函数及阿贝尔函数论、数论、代数论、函数逼近论等方面有许多贡献.他继承阿贝尔和雅可比关于椭圆函

数及超椭圆函数、阿贝尔函数的研究.这方面是19世纪中后期衡量大数学家的标志.刘维尔、外尔斯特拉斯、黎曼、克洛耐克等人都对此有巨大贡献,也是他们当时获得承认的标志.埃尔米特对阿贝尔函数的分点值及变换得出相应于椭圆函数的公式.他还应用椭圆函数的变换公式得出五次方程的解析解(1858),这在当时是一个新方向.他在数论方面的主要贡献是推广高斯的二次型工作,证明对任意变元,二次型的类数有限.在矩阵论中,他引进埃尔米特矩阵的概念,证明其特征根为实数.1873年他证明了e是超越数,引起数学界的广泛兴趣.1878年他引进埃尔米特多项式,这是正交多项式中最主要的一类.

10 克洛耐克(Kronecker)

克洛耐克,1823年12月7日生于普鲁士的里格尼茨,他的父亲是一位富裕的犹太商人,受过良好的教育,对孩子的教育甚为重视.克洛耐克先是跟着家庭教师在家中学习,后来上初级小学,接着上里格尼茨中学,这时他的中学老师是大数学家库默尔.他在中学时,由于他的勤奋和天才,所有学科都成绩突出,对数学尤其表现出了特殊的天赋和兴趣.1841年中学毕业后进入柏林大学.在柏林大学,他听过大数学家狄利克雷、雅可比和史坦纳的课.他还在波恩大学和布列斯劳大学听过课,这时他的中学老师库默尔刚好在布列斯劳大学任教,他们从此结下了深厚的友谊.除库默尔之外,他也深受狄利克雷的影响,同时,通过狄利克雷的介绍,他认识了银行家亚历山大·门德尔松,并结识了亚历山大·冯·洪堡.在波恩,他积极参加组织学生会的活动,但他的社会活动并没有影响他的数学研究.在学生时代,他就写了

一篇论文,其中证明了定理:对于每个素数 p,方程

$$1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}=0$$

是不可约的.1845 年他从柏林大学获得博士学位,论文的题目是《论复单元》,复单元现在的意思就是可逆元.当时,狄利克雷在意大利旅居期间,已经解决了用有限基来表示复单元的问题.克洛耐克在不知道狄利克雷的工作的情况下,独立解决了分圆数的相应问题.他自己觉得这个问题很重要,以至于到 1882 年还把它重新发表了.

他结束了大学学业以后,就开始从事银行业的活动,并管理刚去世的姨夫的地产.他经营有方,赚了大钱,为他以后从事学术活动打下了经济基础.他干了不到 10 年,在柏林买下一所漂亮的房子,从此又回来研究数学.在经商期间,他娶了他的表妹.1855 年,他到柏林大学当讲师;1861 年,他成为柏林科学院院士;1862 年,他成为柏林大学的副教授;1880 年,他接替波尔沙特任《克莱尔杂志》的主编;1883 年,他接替库默尔任柏林大学数学教授,并与外尔斯特拉斯共同主持数学讨论班.但他后来同外尔斯特拉斯因为学术观点不同,经常争论.他反对外尔斯特拉斯的分析方法,认为"上帝"创造了整数,其他的一切都是人造的.他认为,所有的算术都应该只建筑在整数的基础上,无理数是不可靠的.他还反对 G·康托尔的集合论,这也与外尔斯特拉斯的观点大相径庭.克洛耐克强调用算法来进行计算,而不是用概念.因此,他被认为是现代直觉主义和构造主义的先驱.

克洛耐克的主要工作是研究代数、数论和椭圆函数论.1853 年他发表了一篇重要文章,题目是《论代数可解方程》.这篇文章和 1856 年发表的同名文章一起,是对方程论的一项重要发展,其中研究了素数次方程的可解性问题,他提出了两个判断可解

性的标准.1891 年 12 月 29 日他在柏林去世.

11 库默尔(Kummer)

库默尔,1810 年 1 月 29 日生于德国的索拉乌(现波兰的扎雷).他的父亲是一位物理学家,于 1813 年早逝.他的母亲含辛茹苦把他和他的哥哥抚养成人.1819 年他进入当地文法中学学习,1828 年进入哈勒大学专攻新教神学.在大学时,他受到数学教授舍尔克的影响,转而专攻数学.1831 年毕业前,他写出一篇论文,解决了舍尔克提出的问题,同年 9 月被授予博士学位,同年取得中学教师授课资格,在家乡中学见习一年之后,1832 年在里格尼茨(今波兰赖克米卡)文法中学任教,一共教了 10 年的数学及物理课程.在这期间,他的学生中有后来的大数学家克洛耐克等人,他鼓励他们去独立从事科研工作,给他们很多帮助,与他们建立起长久的友谊.同时,他自己也开始在函数论方面进行研究工作,并同当时德国数学权威雅可比和狄利克雷进行学术交流,逐步在学术界取得一定的声誉.在狄利克雷的推荐之下,1839 年他被选为柏林科学院通讯院士,1840 年与狄利克雷夫人的堂妹结婚.1842 年在狄利克雷和雅可比的推荐之下,取得亚历山大·冯·洪堡的支持,被聘为布列斯劳大学数学教授.1855 年接替狄利克雷任柏林大学教授.在布列斯劳大学这段时期中,他的研究方向转向数论,并取得他一生中最重大的成就.1848 年革命中,他站在保守派一边,拥护君主立宪,反对共和制.同年他的妻子去世,他又同包尔结婚,他一共有 9 个子女.

1855 年库默尔到柏林大学任教授,并成为柏林科学院院士.同年,他的学生克洛耐克也来到柏林,1861 年起也以柏林科

学院院士的身份在柏林大学任教.1856年外尔斯特拉斯到柏林大学任副教授,他们三人一起使柏林大学成为德国最重要的数学中心.库默尔和外尔斯特拉斯在1861年开创纯粹数学讨论班,吸引了德国乃至世界许多有才能的年轻数学家.他不但在柏林大学教授解析几何、力学、曲面论和数论等课程,还在军事学院兼课,这对他虽是一大负担,但他很乐意这样做.他的讲课准备充分,表达清楚,吸引了大批学生.他培养了许多博士生,其中包括施瓦茨、G·康托尔、高尔丹等大数学家.他非常关心学生,有时还帮助学生解决物质上的困难.到19世纪60年代,他的行政工作越来越多,1863—1878年任柏林科学院物理数学部的终身秘书,1865—1866年任哲学院院长,1868—1869年任柏林大学校长.

在柏林期间,他一方面继续数论的研究工作,另一方面由于在军事学院授课的需要,对于一些几何问题,特别是光学系统的射线束问题发生兴趣.在哈密尔顿工作的基础上,他发现了一个四阶曲面,现被称为库默尔曲面,它有16个孤立奇点和16个奇异切面.

从19世纪70年代起,库默尔对于数学的关心越来越少了,这时外尔斯特拉斯和克洛耐克在数学上处于对立的地位,库默尔由于支持自己的学生及朋友而与外尔斯特拉斯也出现隔阂.1882年2月库默尔突然宣布由于记忆力衰退,自己已不能胜任工作,要求提前退休,并推荐克洛耐克为自己的接班人.从1883年起,他不再关心数学的研究及教学,在儿孙绕膝的环境中安度晚年.1893年5月14日他平静地离开人世.

12 刘维尔(Liouville)

刘维尔是柯西以后法国最有影响的数学家,1809 年 3 月 24 日生于加莱海峡省圣奥梅尔,父亲是前陆军上尉,母亲出身于洛林地区的上层中产阶级家庭.他首先在康莫西接受初等教育,并显示出数学才能.后来刘维尔随全家移居土尔,进入当地的学校学习古典语言,然后又到巴黎圣路易学校学习数学,这时他已经接触到当时的专业数学杂志《纯粹与应用数学年刊》,并开始进行自己的研究.从这时起,他开始在笔记本上记下自己的数学思想,他的这种笔记现存 340 本,共有50 000页.到 1824 年冬,他已写了 3 篇论文,并且掌握了射影几何、解析几何、力学及微积分的基础知识.1825 年刘维尔考入巴黎综合工科学校,第一学年就学习数学分析、几何学、力学、画法几何学、应用分析(即微分几何)、物理学、化学、历史、文学以及制图等课程,第二学年除继续学习这些课程之外,还学习测地学、社会算术(概率统计)及建筑学,他的分析及力学教师是安培.1827 年冬他为了取得工程师资格,继续在桥梁及道路学校学习.在校期间,他大量阅读数学的经典著作,其中包括拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、拉克鲁瓦的分析及概率论著作以及蒙日、杜潘、庞塞莱的几何学著作,同时还读过傅立叶的《热的解析理论》以及波瓦松的数学物理著作.当时的数学期刊极少,他几乎全部读过,其中包括巴黎科学院、柏林科学院、圣彼得堡科学院和土伦科学院的院报,巴黎综合工科学校的杂志、通讯以及当时惟一的专业数学杂志《纯粹与应用数学年刊》.同时,他开始进行科学研究,主要是发展安培的电动力学理论,并研究热的解析理论.在学校的最后一年,他突

然请假并于 1830 年 6 月结婚. 1830 年"七月革命"之后,他不得不自己找工作. 1831 年 11 月他在巴黎综合工科学校当助教,其后曾在迈耶私立学校教授初等数学课程(直到 1852 年). 1832 年他取得教师资格后,在路易十四中学兼课,1833 年 11 月他被任命为中央工艺制造学校(1829 年成立)的理论力学教授. 他虽然至少在四个学校兼课,教学任务繁重,一周甚至上过 34 节课,但仍然能积极从事研究.

1851 年他被任命为法兰西学院教授,1879 年退休. 在此期间,他兼任巴黎大学理学院理论力学教授(1857—1874). 1882 年 9 月 8 日他在巴黎去世. 刘维尔在力学、微分方程、数学物理、微分几何、椭圆函数论等方面的工作至今仍是经典的. 同时,他是代数数的有理逼近及超越数论的奠基者,但他在 19 世纪 50 年代以后所发表的 200 多篇关于二次型算术理论的论文价值不大.

13 闵可夫斯基(Minkowski)

闵可夫斯基,1864 年 6 月 22 日生于立陶宛的阿列霍塔斯,8 岁时随父母回到德国,定居在哥尼斯堡. 1880 年复活节,15 岁的闵可夫斯基进入柏林大学学习. 1881 年巴黎科学院宣布数学大奖竞赛,题目是表示整数为 5 个平方和的表法数. 爱森斯坦曾给出一个公式,但是没有证明. 巴黎科学院没有察觉到斯密司早在 1867 年已给出过证明的概要. 在宣布大奖竞赛题目后,斯密司立即送去自己的详细证明. 18 岁的闵可夫斯基一点儿也不知道斯密司的结果,完全独立地从爱森斯坦的只言片语中建立起整系数 n 元二次型的完整理论. 他的表述比斯密司的好,因为他

的亏格定义更为自然,更有普遍性. 他送去140页的手稿,尽管没有按照竞赛规则译成法文,但是在1883年春大奖揭晓时,他还是和刚去世的斯密司分享了大奖. 1881年,闵可夫斯基在柏林大学学过三个学期后到哥尼斯堡大学继续攻读,同希尔伯特结下终身友谊. 他们同1884年来任教的副教授胡尔维茨的交往,对于他们的数学生涯具有决定性的意义.

1885年闵可夫斯基在哥尼斯堡大学获得博士学位,服兵役后,1887年在波恩大学任教. 1892年升为副教授. 1894年回到哥尼斯堡大学,1895年接替希尔伯特的教授职位. 1896年他到瑞士苏黎世理工大学任教授,成为胡尔维茨的同事. 1902年希尔伯特在格廷根大学为他新设立一个教授席位,闵可夫斯基就任此职,直到1909年1月12日因患阑尾炎去世.

闵可夫斯基长期对二次型理论进行深入研究,在前人工作的基础上,做出了突出的贡献,特别是:

(1)对于有理系数的 n 元二次型,如果两个二次型在有理系数的线性变换下等价,当且仅当其三个不变量对应相等.

(2)在1905年的论文中,完成了实系数正定 n 元二次型的化简理论.

他对二次型理论的研究促使他创造了完全新的领域与方法——数之几何学或几何数论. 1890年他在研究三元二次型的基础上,发展了高斯及狄利克雷的几何方法,引进许多新的概念. 他写的《数之几何学》(1896)一书是该学科的经典著作.

闵可夫斯基的几何方法还使他对丢番图逼近理论做出重大的贡献. 拉格朗日曾给出一个数什么时候是二次代数数的判据,即二次代数数的连分数表示一定是周期的. 闵可夫斯基大大推广这个判据. 1903—1904年度,他在格廷根大学首先开设"丢番

图逼近"课程,系统整理并发展前人的结果,他的讲稿被整理成《丢番图逼近》一书,是这个领域的第一部引论.

数论工作只是闵可夫斯基的工作的一部分,实际上,闵可夫斯基现在的名声大都来自两个方面:一是凸体理论,这是他在研究数之几何的过程中所建立的数学新分支,如今在许多方面,特别是在数学规划理论方面,都有重大应用;二是相对论的数学基础.他是第一个想到"四维时空"概念的数学家,这影响了以后相对论的发展,成为爱因斯坦广义相对论的数学出发点.值得一提的是,爱因斯坦在苏黎世理工大学学习时,曾听过闵可夫斯基的课,闵可夫斯基对这位懒学生很不满意,但他万万没有想到,爱因斯坦后来居然创造出相对论这样的伟大理论.

14 蒙日(Monge)

蒙日,1746年5月9日生于法国科多尔省小镇博恩的一个小商人家庭.弟兄三人,他是长子,在家乡上学时就是一名出色的学生.1762—1764年在里昂的三一学院完成他的学业.1764年夏,他回到家乡时,带来自己设计的城市规划草图.这件出色的工作受到梅基埃尔王家军事工程学校一位教官的注意,于是这一事件决定了他一生的道路.1765年初,他被准许到这个学校工作,由于非贵族出身,一开始只能当制图员及技术员,制作一些建筑模型及要塞的设计图,他感到这些没什么意思.不到一年,他就有机会显示自己的数学才能.当时设计要塞的防护措施所用的方法极为复杂,而他想出一套快速的作图方法,这就是后来的画法几何学的前身.由于这种方法对于建筑要塞十分重要,长期以来作为军事机密不得泄露.他因此而成为数学教授保煦

(Charles Bossut,1730—1814)的助教.1769 年 1 月,蒙日继任保煦的职位,但没有教授头衔.1770 年,他继诺莱(Jean Antoine Nollet,1700—1770)任实验物理学讲师.这双重职务显示出他既是高明的数学家、物理学家,又是能工巧匠和能干的实验大师,同时还是第一流的教师.1775 年他被正式任命为王家数学物理学教授.

在 1766—1775 年这个阶段,他系统地发展了画法几何学,同时对微分几何学进行研究,1769 年 6 月在《百科全书杂志》上发表他的著名论文《论可展曲面、曲率半径以及各种拐点》.1770 年 10 月整篇论文完成,于 1771 年在法国科学院宣读,但拖到 1785 年才出版.这篇论文把纯粹几何学、解析几何学及微积分结合在一起,是三维空间几何学的重要论文.1771 年初,他结识了达兰贝尔及孔多塞,在孔多塞的劝说下,他在法国科学院宣读了四篇论文:第一篇是关于推广变分法来研究重积分的极值的论文,第二篇是上述微分几何学的论文,第三篇是关于偏微分方程论的,第四篇是关于组合分析的.每篇论文都开辟了一个新方向,表现出他多方面的创造才华,并反映出他在研究中总是兼顾几何的、分析的和实用的观点,这些观点均贯彻于他一生的科学工作中.

由于他的出色成果,1772 年 5 月,他被选为法国科学院通讯研究员.这时,他同范德孟成为好朋友.在范德孟的影响下,写了有关行列式的论文.1772 年欧拉发展可展曲面理论,引起他的兴趣.1775 年他又继续研究微分几何学,解决了一些实际问题.

约从 1774 年起,他的兴趣越来越趋向物理及化学,他做过许多重要实验,在学校组建实验室.1777 年他与阿尔(C.Huart)

结婚,婚后有三女.这时,他的主要精力都放在实验科学上,后来他又对冶金产生兴趣.1780年6月,他被选为法国科学院几何学助理研究员,这使他必须定期到巴黎去参加科学院的工作,而且还要代保煦的流体力学课.1784年他最终辞掉梅基埃尔王家军事工程学校的职务,定居巴黎.

18世纪80年代他得到一系列成就,如对水的合成与分解的研究(1783—1785),并由此成为拉瓦锡的新化学理论的积极拥护者和宣传者;另外,他还研究液化二氧化硫(1784),分析铁、钢的成分,并建立冶金学原理(1786—1788).他的研究领域十分广泛,还研究电火花穿过二氧化碳时的作用(1786)、毛细现象(1787)、某些大气现象的成因(1789)、生理光学(1789)、力学及机械理论.他对热学、声学、静电学及光学(成像理论)均做出了自己的贡献.在这期间,他也在数学方面取得突破,主要是曲面的微分几何学以及相关的偏微分方程理论(1785).因此,在法国大革命开始时,他已经是法国最著名的科学家之一了.

1789年法国大革命开始后,蒙日是科学家中最活跃的积极分子,对革命做出了各种重要的贡献.1792年8月事件后,他任临时执行委员会委员,1792—1793年曾任海军部长,1793年初投靠雅克宾派,以致热月政变后不得不躲一阵.

在法国大革命期间,他以他在数学、物理、化学及技术各方面的学识领导各项工作,其中包括领导军事院校的一部分工作,建立科学教育体系,同时他访问铁矿、冶炼厂等,解决许多技术问题,对法国冶金工业及军事工业的改善起了关键作用.1794年在建立中央公共工程委员会并筹建中央公共工程学校的过程中,他一直是中心领导人物.1795年该校更名为巴黎综合工科学校,从此它成为法国科技人才的摇篮.1794年起,为了培养未

来军官,他在该校讲授画法几何学,他的授课被整理成《画法几何》(*Geo-métrie descriptive*)于 1799 年出版,后来多次再版(1811,1820),为这门新学科奠定了基础. 1798 年,他参加拿破仑的埃及远征,在埃及组织成立开罗学院. 1801 年回国后,继续领导巴黎综合工科学校. 由于他的领导,巴黎综合工科学校成为法国高级科技人才的摇篮,从而使法国当时在科技方面遥遥领先. 其后 100 多年间,绝大多数法国杰出的科学精英,从波瓦松、柯西到庞加莱,从卡诺、安培到盖吕萨克(Joseph Louis Guy-Lussac),都是该校的毕业生,而且在他十几年的教学及科研工作中培养了一大批数学家,形成了第一个数学"学派". 属于这个学派的有发展解析几何学的阿谢特,发展微分几何学的穆尼埃、杜潘,以及创立射影几何学的庞塞莱、布里安香等人.

蒙日是法国大革命的积极活动家,也是拿破仑的狂热崇拜者和支持者,拿破仑也把他看成自己在科学界的忠实朋友,许多技术问题都交给他处理. 1804 年拿破仑称帝后,蒙日曾在 1806 年任上院(参议院元老院)议长,1808 年被封为德·佩吕兹伯爵. 1815 年波旁王朝复辟后,立即对他进行报复,1816 年 3 月剥夺了他的科学院院士称号以及养老金. 他在抑郁的心情下,于 1818 年 7 月 28 日在巴黎逝世. 巴黎综合工科学校的学生们不顾反动当局的阻挠,列队参加送葬,并举行追悼仪式,悼念这位为法国科技事业做出突出贡献的伟人.

蒙日是他那个时代(以分析为主流的时代)最主要的几何学家. 他是画法几何学的创立者,这一领域作为理工科学生的必修课程,在 19 世纪后期的德国、法国以及其他国家建立了许多教授席位,其影响不可低估. 对于几何学本身,他发展了空间解析几何学及微分几何学,在微分几何学方面的突出贡献是把偏微

分方程与几何学结合起来,对这两门学科都有所裨益.他对一阶偏微分方程不仅引进几何解释,而且还建立特征理论,这对偏微分方程理论是至关重要的.

15 庞塞莱(Poncelet)

庞塞莱,1788 年 7 月 1 日生于法国梅斯,早年在那里上中学.1807—1810 年进入巴黎综合工科学校学习,受到蒙日的巨大影响.毕业后加入工兵部队,然后在梅斯军事工程学校深造.1812 年以工兵中尉的身份随拿破仑远征俄国.这一场战争遭到惨败,拿破仑从莫斯科败退后,1812 年 11 月在克拉斯诺战役中又遭失败.庞塞莱受了重伤,被当成阵亡将士丢在战场上,经人救起后,庞塞莱成为战俘.经过近 5 个月冰天雪地的长途跋涉,他被关进伏尔加河畔的萨拉托夫战俘营.在战俘营中,他一本书都看不到,于是一心思考几何学,酝酿着他未来的著作《论图形的射影性质》.经历近两年的战俘生活后,1814 年底他被释放,并回到梅斯.

从 1815 年起,他在梅斯的兵工厂任工程师,其间出版了他的上述著作.不过由于公务缠身,他离开科研工作.后来应著名物理学家阿拉哥(Dominique François Jean Arago, 1786—1857)的邀请,1825—1835 年任梅斯工业学校机械应用力学教授.1826 年出版《力学讲义》,1834 年被选为法国科学院院士.同时为了祖国,他多次到国外旅行搜集情报,特别是对英国工业的发展留下深刻的印象.他还积极地搞组织工作,研究教育问题.1835 年他来到巴黎,成为陆军高级军官并任城建委员会委员.1838—1848 年任巴黎大学理学院物理及应用力学教授,其后两年任巴

黎综合工科学校校长.1848年革命后被选为议员,1851年代表法国参加首次伦敦世界博览会,并任1855年在巴黎首次举办的博览会的筹备委员会委员.1852年拿破仑第三发动政变,建立第二帝国,庞塞莱拒绝为皇帝服务,最后在1867年12月22日抑郁而终.

庞塞莱的《论图形的射影性质》在1822年出版,其摘要在1820年向法国科学院报告,1864—1866年其修订版出版,它开辟了几何学,特别是射影几何学复兴的新时代.他不仅总结了过去这方面的成就,而且有许多创新.他系统地引进无穷元素(无穷远点、无穷远直线等)和虚元素,他广泛地使用中心射影以及各种变换,特别是他区别开射影性质和度量性质,这预见了后来的结构观念.他还在射影几何学中系统地运用了两条最重要的原理——对偶原理及连续原理.对偶原理是近现代数学中最基本的概念之一,它反映了许多数学对象之间的对称性质.在平面射影几何学中,“点”和“线”对换往往从一个定理得出另一个定理(即对偶定理).最简单的例子是:“任何两不同点惟一决定一线.”其对偶定理是:“任何两不同线惟一决定一点.”利用对偶原理很容易从帕斯卡定理(一六边形的六个顶点均在一圆锥曲线上当且仅当三对边的交点共线)得出布里安香定理(一六边形的六边均与一圆锥曲线相切当且仅当连接对顶点的三条连线交于同一点).可是在帕斯卡得出其结果后,又经过160多年,布里安香才在1806年发表其定理,当时他还是巴黎综合工科学校的学生呢.

庞塞莱的连续原理是这样表述的:“如果一个图形从另一个图形经过连续变化得出,而且后者同前者一样地一般,那么可以马上断定,第一个图形的任何性质第二个图形也有.”例如,平面

上两个圆周可以相交于两个实交点,经过连续变化后可以不相交,变化前后的两个圆都是一般的,因此可以断言,“不相交”的两个圆实际上也相交,只不过相交成两个“虚”交点罢了.莱布尼茨在1687年也提到过这个原理,以后许多人,如蒙日和卡诺都用过,也得到广泛的承认.但是明确提出“连续原理”这个名称并当做绝对真理而广泛使用的还是庞塞莱.当然,他遭到许多批评.其实,他在战俘营中曾用分析方法检验这个原理,并且在1862—1864年出版的《分析学与几何学的应用》中发表了用分析方法给出的证明,但他坚持这个原理的正确性不依赖于该证明.

庞塞莱还发展了配极的一般理论,他的配极对应是相对于一个非退化圆锥曲线来讲的,是点与线的对应.在1824—1829年发表的几篇论文中,他发展了配极对应的概念,并在1826年的论文中由此明确提出对偶的概念.这样他奠定了射影几何学基础,但1830年以后他基本上停止了这方面的研究.

16 斯密司(Smith)

斯密司,1826年11月2日生于爱尔兰的都柏林,父亲是爱尔兰的律师,斯密司是4个孩子中最小的.他年仅2岁父亲就去世了,他的母亲争取到1万英镑的遗赠后移居英格兰,最后定居于怀特岛.

斯密司从小多病,而且眼睛高度近视,但4岁时就显示出学习语言的天才.在母亲及家庭教师的指导下,他在少年时代就已掌握了大量希腊、拉丁古典名著以及初等数学.15岁时他进入公立学校,由于兄、姐患肺结核相继死去,母亲带他去意大利住了两年,边休养边自学.19岁时,他进入牛津大学巴列奥尔学院

学习,暑假到意大利去休假,却因病回不了牛津,冬天稍稍恢复后,他又去巴黎大学和法兰西学院听课,这对于他未来的数学家生涯有着决定性的影响.后来他又回到牛津大学,1849 年完成了学业,并得了两个第一名:古典语文第一名和数学第一名.这两个专业他都同样爱好,最后他还是决定搞数学.

毕业以后,他作为研究员,写了几篇数论和几何学的短文,但不久之后,他转向研究德国数论大师高斯、狄利克雷、爱森斯坦等人的著作,从中受到很大的启示,这决定了他后来的研究领域.1851 年他成为牛津大学高级数学学者,1860 年被任命为塞维里几何学讲座教授,1861 年被选为英国皇家学会会员,1883 年 2 月 9 日去世.

斯密司最大的贡献是数论,特别是二次型理论.他在 1859—1865 年间向不列颠协会提交数篇《数论报告》,这是他对以前的数论研究的总结,也包括他许多独立的创造.他向英国皇家学会也递交过许多重要论文,其中包括线性不定方程组的一般解法、线性同余式组的解法,而最重大的成就是一般的 n 元二次型理论.斯密司把高斯关于实二次型的许多定理推广到复二次型.在他一生中的最后 20 年,他主要研究当时最时髦的课题——椭圆函数论.在当时,这个理论的符号表示很混乱,各人自行其是、各搞一套.斯密司的工作特别漂亮,他在临终前大致完成了《θ 及 ω 函数论》,这是一篇长达 200 多页的论文,是对在数论上极为重要的 θ 函数等理论的总结.

17 史陶特(Staudt)

史陶特,1798 年 1 月 24 日生于德国的罗登堡,1818 年进入

格廷根大学学习,受到高斯的教导.1821 年他关于彗星轨道的计算受到高斯的称赞.在这工作的基础上,1822 年他在埃尔兰根大学获得博士学位,但从此之后,他再也没有去研究天文学而转向数学.1822 年他在慕尼黑取得中学教师资格之后,曾在武兹堡中学及大学任教.1827 年转到纽伦堡中学及工业学校任教.从 1835 年起到他 1867 年 6 月 1 日去世,他一直担任埃尔兰根大学的教授.

史陶特的主要著作是《位置几何学》(1847)以及《续论位置几何学》(1857),为射影几何学奠定了严格的数学基础.虽然他没有给出公理化理论,却以欧几里得公理系统为基础,只是去掉涉及区间长度、角度、垂直等概念的东西.美中不足的是,他不必要地保留了平行公设,从而必须引进无穷远点而产生不必要的麻烦.他对射影几何学内容并没有添加多少东西,而是采用当时人们还不太习惯的抽象观点及方法来重新组织射影几何学体系,并重新定义调和点列以及射影变换.他的定义不必对点列、线束及面来分别定义,而且明显地表现出群的性质.由此,他得出现在所谓"射影几何学基本定理".他没有采用公理的方法,却对公理及顺序公理都有相应的明确表述,但是对于射影平面或空间拓扑只是暗含的假定.实际上,直到 19 世纪末才认识到可以不依赖欧氏空间来表示射影空间的拓扑,这是意大利数学家解决的.在《续论位置几何学》中,史陶特引进许多新思想,其中特别值得一提的是"投"的引进及其演算.投是定义在一维射影实体(点、线、面)上的四元组的射影等价类,尽管完全不同于以前所知道的数和量,但是他在两投之间定义和与积,他还知道投的集合构成域.另外,他首先对射影几何学的虚元素引进实的解释,为复射影几何学奠定了基础.他还明确地定义一维、二维、三

维复射影空间.在几何学之外,1840 年他独立于丹麦数学家克劳森(Thomas Clausen,1801—1885)得出伯努利数 B_{2n}的分母性质表示公式.

18 史坦纳(Steiner)

史坦纳,1796 年 3 月 18 日生于瑞士伯尔尼州.他的父亲是个农民,他一直帮助父亲在田里干活,到 14 岁刚学写字.1815 年,他不愿意干一辈子农活,想当一名教师.为了提高自己的教育水平,他投到大教育家培思泰洛齐(Johann Heinrich Pestalózzi,1746—1827)的门下.当时培思泰洛齐正进行教育的改革实践,史坦纳在他办的学校里既当老师又当学生,忠实地贯彻他的教育思想,但不久学校因经济原因办不下去了,史坦纳不得不自谋生计.在培思泰洛齐的影响下,史坦纳对几何学产生了兴趣,开始热望成为一名几何学家.他到德国海德尔堡去当家庭教师,还教了一段中学.同时他发愤自学,特别是从法国几何学派受到了启发.1822—1824 年他在柏林大学学习,其后在柏林工业学校任教.由于他偶然担任过德国教育界最有影响的威廉·冯·洪堡家的家庭教师,于是得到威廉·冯·洪堡的帮助.1834 年他被任命为柏林大学的副教授,直到 1863 年 4 月 1 日他在瑞士伯尔尼去世.他一直没能升为教授.

史坦纳是一位纯粹的几何学家,而且只用综合方法,极力反对代数方法及分析方法,甚至连数字都讨厌.他说,几何学刺激思维,而计算则代替思维.在柏林时期,他同阿贝尔、克莱因、雅可比等人很要好,他们都成为克莱尔创办的《纯粹与应用数学杂志》(1826 年创刊)的主要撰稿人,他们的论文给当时死气沉沉

的数学界带来一股新风.也正是这份杂志使这些年轻人的创见不致埋没.

1832年,史坦纳出版了他的主要著作《几何图形之间相互关系的系统发展》.他的总目标是用纯粹的综合方法构造几何学,他的基本概念是射影构成.他从基本图形(平面的基本图形是直线、线束及平面本身,空间的基本图形是直线、平面内线束、平面丛、线丛及空间本身)出发,逐步生成高次的图形,这就是史坦纳原理.例如,他在这本书中,从两个线束出发,由彼此射影对立的所有互相对应的线的交点形成的集合就是圆锥曲线.类似地,他也造出单叶双曲面及双曲抛物面等.这本书的附录中提出85个"问题和定理",对于后来的几何学家有着巨大的启发.在这本书中,他特别研究了神秘的帕斯卡六边形.在圆锥曲线上的六个点可以按照各种可能的组合,由两两相对的边得到的三个交点共线,这样共有60条"帕斯卡线",其中每三条线共点,共得到20个交点(史坦纳点),这些史坦纳点四个一组共线,又得到15条直线(普吕克尔线).史坦纳在1828年陈述上述定理时,有一个错误,遭到普吕克尔的猛烈批评(在书中得到更正).反过来,史坦纳坚决反对普吕克尔的解析方法,扬言如果《克莱尔杂志》接受普吕克尔的投稿,他就不再供稿.当时史坦纳的名气很大,占了上风,结果普吕克尔不得不在国外刊物上发表论文,后来又放弃数学研究达20余年之久,直到史坦纳去世.

史坦纳还研究并推广马尔法替问题,即求内接于三角形的三个互切的圆,他说有32个解.他还是反演几何学最早的创始者之一(1824).他提出直尺几何学(1833),特别是他曾用综合方法解决一些极大极小问题.因此,他在19世纪末被称为"欧几里得之后最伟大的几何学家".

19 斯图姆(Sturm)

斯图姆,1803年9月29日生于瑞士日内瓦,父亲是个教师.他小时候学习希腊、拉丁语文,并表现出很高的才能,后来还攻读德语等近代语文.1819年父亲去世之后,他放弃了语文的学习而转向数学.他进入日内瓦学院后,听过卢依耶(Simon L'Huillier,1750—1840)讲的数学课.卢依耶很快就发现斯图姆的数学才能,于是鼓励和帮助他,还借给他书看.1821年卢依耶退休后,他的继任者绍布(Jean-Jacques Schaub,1773—1825)不仅教斯图姆数学,而且还从经济上支援他,使他能够完成学业.毕业后,斯图姆当过家庭教师,在业余时间写出他的第一篇几何学论文,不久就发表在《纯粹与应用数学年报》上.1823年底在德布洛意公爵的帮助下,他到巴黎接触到当时法国科学界的头面人物拉普拉斯、波瓦松、傅立叶、阿拉哥、安培、盖吕萨克等人.1824—1825年,他和克拉东(Daniel Colladon,1802—1893)合作进行物理学实验,1825年底他们到巴黎继续学习及研究.在傅立叶的影响下,他逐步转向理论研究.此后,他又回到几何学的研究,1829年他成为《数学与工业通报》的数学主编,同年发表了著名的斯图姆方程的实根定理.

1830年"七月革命"后,德布洛意公爵当上了教育部长,斯图姆也被任命为教授,教授力学及数学.他的兴趣开始转向微分方程,1833年他加入法国国籍,在巴黎这个科学中心,他的学术地位扶摇直上.1836年他被选为法国科学院院士,1838年在高等工业学校任教,1840年成为分析及力学教授,同年接替刚去世的波瓦松任巴黎大学教授.这一时期,他获得了多种奖励和荣

誉,他在微分方程方面的重要工作也是在这个时期完成的.

19世纪30年代末,斯图姆尽心于教学工作,此外他对研究工作的兴趣转向力学及光学.由于过度劳累,他的健康状况恶化,1851年起已经不能胜任教学工作了,1855年12月18日在巴黎去世.

20 西尔维斯特(Sylvester)

西尔维斯特,1814年9月3日生于英国伦敦.他是犹太人后裔,是父母的7个孩子中最小的.他在伦敦的两家私立学校接受初等教育,后来到利物浦上中学.17岁时,他进入剑桥大学圣约翰学院,1833年底因病辍学,在家休养.1837年1月参加考试,他以第二名的成绩毕业,由于宗教的原因,西尔维斯特得不到学位,于是转到都柏林大学,到1841年才获得学士及硕士学位.

离开剑桥大学之后,他开始写论文,最初的论文是关于应用数学方面的.第一篇论文的题目是《菲涅尔的晶体光学理论的分析研究》,发表在哲学杂志上.不久,他被任命为伦敦大学学院物理学教授,成为德·摩根的同事.在当时,大学学院是惟一不考虑神学成绩的高等学府,从而接受了西尔维斯特.可是,当时大学学院还没有物理实验室,不过对西尔维斯特来说,则正中下怀.他脾气暴躁、缺乏耐心,做不好实验.即使这样,这个位置也不适合他的胃口,很快他就改行当数学教授.1841年,他到美国弗吉尼亚大学任数学教授.在一次和学生的争斗中,他误以为杀死学生,就匆匆跑到纽约,赶回英国.

回到伦敦之后,他同一家保险公司挂上钩,想搞法律方面的业务.1846年他成为一家法律协会的学员,1850年取得律师资

格.这时凯雷也在这里,两人经常谈论数学.当时凯雷对不变式论的兴趣诱使西尔维斯特也走上研究不变式论的道路,从此两人成为终身挚友.

1854年,格雷汉学院几何学讲师职位出缺,西尔维斯特去应试,试讲的结果失败了.第二年皇家军事学院数学教授职位又出缺,西尔维斯特去应试,再一次失败了.由于新任命的教授上任不久就去世了,他再一次争取终于取得成功.这时,他已经41岁了.1855—1870年是他在数学上取得巨大成就的时期,他除了进行不变式论的研究之外,同时对有关整数的分拆问题进行探讨,得到了相当满意的结果.1864年他在英国皇家学会报告了关于牛顿法则的证明,这是牛顿关于任意次方程的虚根数目的下界公式,但是始终没有得到证明,也没有确定其适用范围.在这个报告及1865年的论文中,他完整地解决这个问题并作了推广.这项工作,他认为是他个人在数学上最伟大的成就.

1867年,他继德·摩根之后出任伦敦数学会主席,并且第一次荣获伦敦数学会设立的德·摩根金质奖章.这时,他的业绩可谓登峰造极,各种国内外的荣誉及头衔接踵而来.正好这时,国防局颁布一项规定:军队系统所属官员到55岁一律强制以一半薪金退休.他马上就到岁数了,虽然他早就觉得军事学院不自在,可是,他觉得自己还能教书.由于收入减少所带来的生活紧张,他的研究工作开始走下坡路,兴趣也转向其他方面.这时,他出版了自己的惟一一本书,不是数学著作,而是《作诗法则》.同哈密尔顿一样,他习惯于表达自己对诗的感受.他也写诗,还认为他的诗同他的数学一样重要,不过他的诗多为华丽词藻的堆砌,并没有什么价值.他对词藻的爱好,使他成为“数学中的亚当”,他创造的数学名词术语比历代所有数学家都要多,其中大

多数生僻古怪,除了使自己的论文更加难懂之外,没有人愿意使用.当然,仍有少数留传至今,甚至进入教科书中(如二次型的惯性定律、零度等等).

1876年,大西洋彼岸传来新的消息,在巴尔第莫新建立的约翰斯·霍普金斯大学请他做第一任数学教授.他接受了邀请,这对美国数学的发展产生了重大影响,他培养出美国本土成长的第一批数学家.他还创办了《美国数学杂志》(1878),并投寄30篇论文给该刊,对美国的数学研究有一定的影响.不过,他的研究领域虽然广泛,但是并不关心欧洲大陆数学突飞猛进的发展,他对欧洲数学的许多重要成就不是不感兴趣,就是一无所知.他甚至连对代数学至关重要的伽罗华理论以及李群理论都没注意到,这无疑大大限制了他的成就和影响.

1883年牛津大学的斯密司去世,萨开里几何学教授职位空缺.西尔维斯特在朋友们的帮助下继任这一教授职位.1883年底,他离开约翰斯·霍普金斯大学,回到英国.但是,在牛津,他只能讲自己的研究工作,他的讲课不受欢迎.1892年,他选定一位代理教授,自己移居伦敦.由于记忆力及视力的逐步丧失,身边又没有亲人照顾,他的晚年生活孤苦凄凉,但他仍然坚强地活着,"与世界开战",不想求助于他人.他在1897年3月15日去世.

大 事 年 表

1482 • 欧几里得《几何原本》拉丁文译本出版.

1484 • 舒开(法)《三部》成书.

1489 • 威德曼(德)首先使用"+"、"-"符号.

1494 • 帕齐奥利(意)《算术、几何、比及比例关系大全》出版.

1517 • 路德(德)开始宗教改革.

1524 • 里斯(德)《科斯代数》出版.

1525 • 鲁道夫(德)《科斯代数》出版,使用小数及根号(1553 年史梯费尔出版修订本).

1527 • 阿皮安《计算法》出版,封面有帕斯卡三角形.

1543 • 哥白尼(波)《地球的自转》出版.

• 塔塔利亚(意)出版阿基米德一些论著的拉丁文译本.

1544 • 史梯费尔(德)《综合算术》出版,书中给出二项式系数(至 17 次),并讨论代数方程.

1545 • 卡尔达诺(意)《大法》出版,刊载三次方程解法.

1546 • 塔塔利亚在《各种问题与发明》中发表自己的三次方程解法.

1556 • 塔塔利亚《数量概论》出版.

1557 • 雷科德(英)《砺智石》出版.

1572 • 邦别利(意)《代数学》出版.

1579 • 韦达(法)《数学宝典》出版.

1591 • 韦达《分析术入门》出版.

• 符号代数或字母代数开始出现.

1598 • 西班牙国王菲力普三世设奖,求解海上求经度方法.

1600 • 韦达求出阿波隆尼斯问题的一个解,即造一个圆与给定三个已知圆相切.

1603 • 意大利山猫科学院在罗马建立.

• 卡塔尔迪(意)求出第 6 个和第 7 个完全数.

1605 • 培根《崇学论》出版.

1609 • 开普勒(德)《新天文学》出版.

1613 • 卡塔尔迪发展连分数法.

1614 • 耐皮尔(苏格兰)发表耐皮尔对数.

1615 • 开普勒(德)《酒桶的立体几何》提出新求积方法.

• 马桑(法)指出旋轮线的重要性.

• 韦达《论方程的整理和修正》出版.

1617 • 布里格斯(英)引进常用对数.

1619 • 开普勒《宇宙的和谐》出版.

• 笛卡尔(法)发现凸多面体的欧拉公式(1860 年首次发表).

1620 • 布尔日(瑞士)独立引入对数表.

1621 • 丢番图(希)《算术》希腊文、拉丁文对照本出版.

1624 • 布里格斯《对数算术》出版,扩大常用对数表.

1629 • 吉拉尔(法)《代数的新发明》出版,提出代数学基本定理.

• 费尔马(法)提出极大极小方法,撰写解析几何学著作.

1631 • 哈里奥(英)《实用分析术》出版.

• 奥特雷德(英)《算术之钥》出版.

1632 • 伽利略(意)《关于两大世界体系的对话》出版.

1634 • 罗伯瓦尔(法)著《不可分量论》(1693 年出版),用运动方法求曲线切线,使用不可分量法求旋轮线下面积.

1635 • 卡瓦列利(意)《连续体的不可分量的几何学:一种新方法》出版,提出不可分量法以及卡瓦列利原理.

1636 • 美国哈佛学院建立.

• 费尔马告诉马桑他发现第二对友数 17 256 及 18 416,他还提出三角形数猜想(1665 年发表).

1637 • 笛卡尔《方法谈》出版,附录《几何学》开创了解析几何学.

1638 • 伽利略《两门新科学的讨论和数学证明》在荷兰出版.

1639 • 卡瓦列利《杂题百道》证明,对 n 为 1 到 9 的整数,有 $\int_0^a x^n \mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

• 德博内(法)向笛卡尔提出常次切线的曲线问题以及其他问题,次曲线问题为莱布尼茨在 1684 年解决(对数曲线).

• 德萨格(法)《草稿》出版,一般认为是射影几何学的开始.

1640 • 帕斯卡(法)《圆锥曲线论》证明关于神秘的六边形的帕斯卡定理.

• 费尔马写信陈述费尔马小定理.

1642 • 帕斯卡发明加减计算机(1645 年发售).

1647 • 卡瓦列利《六个几何问题》出版.

1648 • 德萨格的朋友波色发表德萨格定理.

1649 • 萨拉撒(比利时)《对马桑提出的问题的解答》出版,把双曲线下面积解释为对数.

1649 • 斯霍腾(荷兰)把笛卡尔《几何学》译为拉丁文,并加以增订,分两卷出版,推动了解析几何在欧洲的传播.

1650 • 门格里(意)《新算术求积法》出版.

1654 • 费尔马和帕斯卡通信讨论概率问题.

1655 • 沃利斯(英)《圆锥曲线论》出版.

1656 • 沃利斯《无穷算术》出版.

• 惠更斯(荷兰)发现旋轮线的等时性质以及旋轮线的渐伸线仍是旋轮线.

1657 • 耐尔(英)求半立方抛物线弧长.

• 惠更斯《机会游戏的思考》出版,它是第一本出版的概率论著作,引入数学期望的概念.

1658 • 雷恩(英)求旋轮线弧长.

1659 • 帕斯卡《德顿维尔的信》出版,解决旋轮线求积问题.

• 德·维特(荷兰)《曲线原理》出版,用解析几何讨论圆锥曲线.

1660 • 英国王朝复辟.

• 无形学院建立,1662 年获得国王特许状成为英国皇家学会.

1663 • 剑桥大学设置卢卡斯教授席位,巴罗为首任.

• 卡尔达诺《机遇游戏》出版,它是第一本概率论著作,但在作者成书 200 年之后才问世.

• 沃利斯证明命题"对任意三角形,存在任意大小相似三角形"等价于第五公设.

1664 • 牛顿(英)发现一般二项式定理.

1665 • 法国《学者杂志》创刊.

• 英国皇家学会《哲学汇刊》创刊.

• 帕斯卡(作于1654年)的《算术三角形通论》出版,明确应用数学归纳法.

1666 • 莱布尼茨(德)《组合术》出版.

• 牛顿1666年10月的手稿中出现最早的微积分思想.

1667 • 格利高里(英)《论圆和双曲线的求积》出版.

1668 • 格利高里《通用几何部分》及《几何练习》出版,证明切线问题是面积问题的逆问题以及格利高里级数.

• 莫卡托(丹麦)《对数技术》出版.

1669 • 牛顿散发《无穷多次方程的分析》(1711年出版).

1670 • 巴罗(英)《几何学讲义》出版,包括求切线方法、求曲线长度方法以及求切线和求面积之间关系.

1671 • 牛顿著《流数和无穷级数法》(1736年出版),提出流、流数和极坐标等新坐标系.

• 格利高里发现$\frac{\pi}{4}$的级数,后为莱布尼茨在1673年重新发现,被称为莱布尼茨级数.

1672 • 门格里发表《圆的求积问题》.

• 莱布尼茨到达巴黎,从1672—1676年他得出自己的微积分方法.

• 莫尔(丹麦)《丹麦语欧几里得》出版,证明能用尺规作图的图形可单用圆规作图.

1673 • 惠更斯《摆钟》出版.

1676 • 牛顿给莱布尼茨"前书"(6月13日)(谈无穷级数),"后书"(10月24日)(用字谜介绍流数法).

• 莱布尼茨得出求x的任意整数幂或分数幂的微分法.

1677 • 莱布尼茨得出商的微分法则.

1678 • 塞瓦(意)证明三角形塞瓦定理.

• 科克(英)《算术》出版,在英流传 100 年之久.

1679 • 莱布尼茨在信中引入二进制.

• 拉伊尔(法)《圆锥截线新原理》出版.

1682 •《博学者学报》创刊.

1683 • 车恩豪斯(德)引入车恩豪斯变换,证明 $n(n>2)$ 次多项式可通过该变换使 $(n-1)$ 次项及 $(n-2)$ 次项的系数变为 0.

1684 • 莱布尼茨的微分法论文发表.

1685 • 沃利斯《代数通论》出版.

1686 • 莱布尼茨的积分法论文发表.

1687 • 牛顿《自然哲学的数学原理》出版.

1690 • 惠更斯《光论》出版.

• 雅各布·伯努利提出悬链线问题.

• 拉夫孙(英)《一般方程分析》提出一般代数方程的根的数值逼近方法.

1691 • 罗尔(法)发表《求解任意次方程一个方法的证明》,提出罗尔定理,但未加证明.

• 雅各布·伯努利正式引入极坐标系.

1692 • 莱布尼茨解决求线族包络线的方法,最先引进偏微分的概念.

1693 • 莱布尼茨再次发现行列式概念.

• 沃利斯《数学文集》第 2 卷出版,第一次发表了牛顿流数法的完全论述.

1694 • 雅各布·伯努利证明双纽线弧长可表为椭圆积分.

1695 • 雅各布·伯努利引入伯努利方程.

1696 • 洛比达(法)《关于曲线研究的无穷小分析》出版,这是第一部出版的微分法著作,其中提出洛比达法则.

• 约翰·伯努利提出最速降线问题,牛顿、莱布尼茨、洛比达、雅各布·伯努利及约翰·伯努利分别独立提出正确解法,并于 1697 年发表.

1697 • 雅各布·伯努利提出一些较复杂的等周问题以及变端点最速降线问题.

• 棣莫弗(法—英)推广二项式公式到多项式公式.

1698 • 雅各布·伯努利发表变端点最速降线问题的解.

1699 • 杜伊耶(瑞士)在伦敦挑起牛顿和莱布尼茨关于微积分发明优先权的争吵.

1700 • 雅各布·伯努利首先发表等周问题的正确解.

1702 • 约翰·伯努利提出求解积分的部分分式法.

1704 • 牛顿《光学》出版,其中作为附录收入“三次曲线的枚举”,他把三次曲线分为 72 种.

1707 • 牛顿的讲义《普遍算术》出版,主要讨论代数方程论.

1710 • 莱布尼茨发表代数及无穷小演算符号系统.

1713 • 雅各布·伯努利《猜测术》在他去世后由尼古劳第一·伯努利出版,其中首次陈述大数定律,引入伯努利数.

• 尼古劳第一·伯努利(瑞士)提出彼得堡悖论.

• 沃尔夫(德)《通用数学初阶》出版,第 2 卷于 1715 年出版.

1714 • 莱布尼茨《微分法的历史和起源》出版.

• 科兹(英)首次提出 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

1715 • 泰勒(英)《增量的直接和逆方法》出版,提出泰勒级数及有限差分法.

- 泰勒《线性透视》出版.

1716 • 莱布尼茨提出正交轨线问题向英国数学家挑战.

1717 • 哈雷(英)《代数方程的几何作图与数值解法讲义》出版.

1718 • 棣莫弗《机遇学说》出版,其中发展了随机误差论,最早提到正态曲线.

- 雅各布·伯努利《科学院论文集》出版,论述了变分法基础.
- 法纳诺(意)得出双纽线弧长加倍公式.

1719 • 泰勒《线性透视新原理》首次论述消没点原理.

1720 • 丹尼尔·伯努利(瑞士)解一种类型的黎卡提方程.

- 麦克劳林(苏格兰)《有机几何》出版,讨论二次、三次、四次乃至高次曲线.

1721 • 尼古劳第一·伯努利发现一阶常微分方程可积条件.

1722 • 科兹《测度的调和》出版,首先认识到三角函数的周期性.

1724 • 黎卡提(意)引入黎卡提方程.

1725 • 俄国圣彼得堡科学院建立.

1727 • 丰丹尼尔(法)《无穷几何原理》出版.

1728 • 丹尼尔·伯努利解一维弦振动方程.

1729 • 欧拉(瑞士)引进第二类欧拉积分.

- 赫尔曼(瑞士)用极坐标研究轨迹,并得到直角坐标与极坐标的变换公式.

1730 • 棣莫弗《分析杂著》出版.

1731 • 爱尔兰皇家都柏林学会成立.

- 英国皇家学会设立科普莱奖章.
- 克莱洛(法)《双曲率曲线的研究》出版,首先运用无穷小

演算研究空间曲线.

1732 • 莫培督(法)讨论笛卡尔和牛顿的宇宙体系的差别,并于1736年到拉普兰进行科学测量,结果于1739年发表.在《论地球形状》中,他支持牛顿两极扁平的理论,由此,牛顿的物理理论在欧洲大陆上开始得到广泛承认.

1733 • 布丰(法)研究概率论.

• 萨开里(意)《免除污点的欧几里得》出版,揭示非欧几何最早定理,向非欧几何迈出第一步.

1734 • 巴克莱主教(英)《分析学家》出版,攻击牛顿的微积分.

• 伏尔泰(法)开始把牛顿力学引入法国.

• 法国科学院开始为牛顿力学设置大奖.

1735 • 欧拉引进函数概念及记号 $f(x)$.

• 欧拉解决哥尼斯堡七桥问题(1741年出版).

1736 • 欧拉《力学》出版.

• 牛顿《论级数及流数法》英文版出版.

1737 • 格廷根大学建立.

• 欧拉证明 e, e^2 是无理数.

1738 • 棣莫弗《机遇学说》第二版引进斯特灵公式.

• 丹尼尔·伯努利《水力学》出版.

• 莫培督《论地球形状》出版.

• 伏尔泰《牛顿哲学原理》出版.

1739 • 苏格兰爱丁堡皇家学会成立.

1740 • 法国科学院最后一次给笛卡尔学说颁奖.

1741 • 林奈(瑞典)在1739年建立的科学会成为瑞典王立科学院.

1742 • 麦克劳林(英)《流数通论》出版,其中给出麦克劳林展开

式.

- 哥德巴赫提出哥德巴赫猜想.

1743 • 达兰贝尔(法)《动力学通论》出版.

1744 • 欧拉《求具有某种极大或者极小性质的曲线的技巧》出版,变分法正式建立.

- 欧拉《行星及彗星运动理论》出版.
- 达兰贝尔《液体的平衡及运动通论》出版.
- 莫培督提出最小作用原理.

1746 • 美国普林斯顿大学建立.

1747 • 达兰贝尔《关于风的成因的思考》出版,提出第一个偏微分方程.

- 克莱洛《月球理论》出版,提出三体问题的近似解,后来获圣彼得堡科学院 1750 年大奖.

1748 • 欧拉《无穷分析引论》出版,第一卷主要研究代数分析,正式引入函数概念,并研究其性质,第二卷主要研究解析几何学,使解析几何系统化.

- 麦克劳林《代数通论》出版(1796 年第 6 版),其中早于克拉梅得出二变元、三变元、四变元联立线性方程组的解.

1750 • 克雷姆(瑞士)《代数曲线的分析引论》应用代数研究平面曲线,并对它进行分类,得出克雷姆法则(但迟于麦克劳林).

1751 • 法国《大百科全书》开始出版,至 1772 年出齐 28 卷.

- 格廷根科学院成立.

1752 • 欧拉提出凸多面体的欧拉公式(1758 年出版).

1753 • 欧拉证明椭圆积分的加法定理.

1754 • 欧拉引进二次互反律.

1755 • 俄国莫斯科大学建立.

• 欧拉《微分法导引》出版.

• 拉格朗日(法)引进变分概念.

• 欧拉给出无粘性流体运动的欧拉方程.

1758 • 蒙图克拉(法)《数学史》出版,被认为是第一部真正的数学史.

1759 • 兰伯特(德)《透视理论》出版.

• 拉格朗日发展差分方程理论.

• 欧拉用连分数方法表示配尔方程的解.

• 华林(英)《分析杂录》出版.

1760 • 欧拉引入数论函数 $\varphi(x)$.

• 拉格朗日用分析方法研究变分法,并得出极小曲面方程.

• 欧拉开始研究曲面微分几何学.

1761 • 欧拉证明椭圆积分的加法定理.

• 欧拉《液体运动原理》出版.

1762 • 拉格朗日发表变分方法.

1763 • 贝叶斯(英)去世后,其概率理论出版.

• 克吕格尔(德)认识到平行公设不能由其他公设证明.

1764 • 贝祖(法)《数学教程》(5 卷)开始出版(到 1769 年出齐).

1766 • 兰伯特认识到有可能建立平行公设不成立的几何体系.

1767 • 拉格朗日发表《论数值方程的解法》.

1768 • 欧拉《积分法导引》第Ⅰ卷出版,第Ⅱ卷、第Ⅲ卷分别于1769 年、1770 年出版,内容除积分外,还包括微分方程及变分法.

• 拉格朗日首先证明配尔方程的解的存在性,讨论连分数

及其在不定方程上的应用.

1770 • 拉格朗日发表《关于方程代数解法的思考》(1772—1773年出版).

• 欧拉《代数全书》出版.

• 拉格朗日证明四平方和定理(1772年出版).

• 华林《代数沉思录》出版,提出华林问题,并首先发表哥德巴赫猜想.

1771 • 范德孟(法)提出方程论论文(1774年出版).

• 范德孟用组合方法描述纽结.

1772 • 范德孟建立行列式理论.

• 拉普拉斯(法)提出展开行列式方法.

• 拉格朗日和欧拉获法国科学院三体问题大奖.

1774 • 拉格朗日发表一阶偏微分方程积分理论.

• 拉格朗日关于月球轨道的论文获法国科学院大奖.

1775 • 拉格朗日建立二元二次型理论,其补充于1777年发表.

• 兰登(英)发现兰登变换.

1776 • 华林《分析沉思录》出版,提出无穷级数收敛的比值判别法.

• 拉格朗日论力作为势函数的梯度.

• 拉格朗日提出微分方程的奇解问题.

• 拉格朗日解差分方程.

1777 • 布丰提出投针问题,标志着几何概率论的开始.

1779 • 贝祖《代数方程的一般理论》出版.

1781 • 蒙日(法)发表《开挖与充填理论》(1784年出版).

1782 • 勒让德(法)求球状体的引力,得出勒让德多项式(1785年出版).

- 拉普拉斯指出引力势满足球坐标拉普拉斯方程(1785 年出版),在 1787 年的论文(1789 年出版)中得出直角坐标的拉普拉斯方程.

1784
- 勒让德证明勒让德多项式的正交性.
- 蒙日发展偏微分方程的特征理论(1787 年出版).

1785
- 勒让德发表《不定分析的研究》(1788 年出版).

1786
- 勒让德引入二次变分,得出变分问题的勒让德条件(1788 年出版),其后意识到它只是必要条件.
- 兰伯特《平行线论》出版.
- 布瑞英(瑞典)用车恩豪斯变换将一般五次方程化为 $x^5+ax+b=0$.

1787
- 勒让德提出勒让德变换.

1788
- 拉格朗日《解析力学》出版.
- 蒙日《初等静力学》出版.

1789
- 法国大革命开始.

1790
- 勒让德研究勒让德函数.

1792
- 勒让德发表《椭圆函数论》(1793 年出版).

1793
- 法国科学院被关闭.

1794
- 法国热月政变,罗伯斯庇尔被送上断头台,督政府时代开始.
- 巴黎综合工科学校的前身公共工程学校建立.
- 巴黎高等师范学校建立.
- 勒让德《几何原理》出版.

1795
- 法国重建法国科学院.
- 法国建立经度局.
- 蒙日讲授《画法几何》,1799 年成书出版.

1796 • 高斯(德)开始写数学日记(直至 1814 年),共有 146 项,第一项为用尺规作正 17 边形(1901 年出版).

1797 • 拉格朗日《解析函数论》出版.
• 卡诺(法)《无穷小演算的形而上学思考》出版.
• 威塞尔(丹麦)提出复数的几何表示.
• 拉克鲁瓦(法)《微积分论》第 1 卷出版.

1798 • 拿破仑远征埃及,蒙日、傅立叶等随行.
• 勒让德《数论》(2 卷)出版.
• 拉格朗日《论任意次数值方程的解法》出版.

1799 • 拿破仑发动政变,拿破仑时代开始.
• 拉普拉斯《天体力学》第Ⅰ卷出版,第Ⅱ卷、第Ⅲ卷、第Ⅳ卷在 1806 年之前出版.
• 高斯在博士论文中发表代数学基本定理的第一个证明.
• 鲁菲尼发表一般五次方程不能根式解的不完备的证明.

1800 • 阿波加斯特(法)《导数演算》出版.

1801 • 高斯《算术研究》出版,建立近代数论系统理论,特别是同余理论及二次型理论.

1802 • 拉克鲁瓦《微积分初步》出版.

1803 • 卡诺(法)《位置几何》出版.
• 伍德豪斯(英)《分析计算原理》出版,倡导用欧洲大陆微积分记号.

1806 • 阿尔冈(瑞士)发表虚量几何表示法.
• 拉普拉斯建立毛细现象数学理论.
• 朗克利(法)研究空间曲线的几何.
• 布里安香(法)证明帕斯卡定理的对偶定理.
• 卡诺《横截理论》出版.

1807 • 傅立叶(法)提交热传导的论文.
• 蒙日《分析在几何上的应用》出版.

1809 • 高斯《天体绕太阳沿圆锥曲线运动理论》出版.
• 普安索(法)发现另两种非凸正多面体,完成正多面体分类.
• 拉普拉斯发表分析的不同观点.

1810 • 德国柏林大学建立.
• 热尔岗(法)《纯粹与应用数学年刊》创刊,被认为是第一个专业数学期刊,1831年停刊.

1811 • 德国布雷斯劳大学重建.
• 傅立叶呈交修改过的热传导论文.
• 波瓦松(法)发展热的数学理论.
• 勒让德《积分法练习》开始出版(1819年完成).
• 波瓦松《力学通报》出版.

1812 • 皮科克、巴贝奇、赫歇尔(英)等组成分析协会,旨在引进欧洲大陆的分析符号与技巧.
• 拉普拉斯《概率的解析理论》出版,首先应用分析方法研究概率论.
• 高斯发表超几何级数论文.
• 卢依耶(瑞士)推广欧拉公式到有孔多面体.

1813 • 杜潘(法)《几何的发展》出版.
• 柯西(法)发展多面体理论.

1814 • 柯西宣读复积分理论论文.
• 波瓦松提出球内位势方程.

1815 • 法国波旁王朝复辟.
• 普法夫(德)建立一阶偏微分方程理论.

• 柯西研究置换理论.

1816 • 法国重建法兰西研究院及科学院.

• 热尔曼(法)研究弹性曲面.

• 贝塞尔(德)开始研究贝塞尔方程.

1817 • 法国《大百科全书》开始出版(至1845年完成).

• 波尔查诺(捷克)《纯粹分析证明》出版,引进严格的极限及连续概念,证明波尔查诺—外尔斯特拉斯定理及中间值定理,但未引起注意.

1818 • 德国波恩大学建立.

• 费涅尔(法)研究光的衍射,提出费涅尔积分.

1819 • 俄国圣彼得堡大学建立.

• 霍纳(英)得出代数方程近似解法.

1821 • 柯西《分析教程》第Ⅰ卷《代数分析》出版.

• 纳维尔(法)建立近代弹性理论.

1822 • 傅立叶《热的解析理论》出版.

• 庞塞莱(法)《论图形的射影性质》出版,开创近代射影几何学,发展变换方法.

• 巴贝奇开始发展差分机.

• 高斯引入保角变换,并在曲面上首先使用曲纹坐标.

• 德国自然科学家及医生协会第一次大会召开.

1823 • 柯西《无穷小演算教程概要》出版.

• 阿贝尔(挪威)首先提出并求解一个积分方程.

• 纳维尔首先提出粘性流体方程.

• 柯西发展弹性理论.

1824 • 阿贝尔证明一般五次及五次以上方程不能根式解.

1825 • 勒让德《椭圆函数论》开始出版(第2卷1827年出版,补

卷 1828 年出版).

1826 • 克莱尔(德)创办《纯粹与应用数学杂志》,这是延续至今的最早的专业数学期刊.

• 罗巴切夫斯基(俄)在喀山大学演讲,首次宣布非欧几何学原理.

• 阿贝尔证明阿贝尔积分的加法定理(1849 年全文发表),其特殊情形(超椭圆积分)在 1828 年发表.

• 庞塞莱、热尔岗等人提出射影几何对偶原理.

• 柯西引入留数演算.

• 柯西《无穷小分析在几何学中的应用》出版.

• 阿贝尔证明级数的阿贝尔判据,他还认识到一致收敛性的必要性.

1827 • 阿贝尔的椭圆函数论发表.

• 莫比乌斯(德)《重心演算》出版,其中引入齐次坐标.

• 高斯《曲面的一般理论研究》出版,引进高斯映射及全曲率等概念,证明伟大定理,开拓内蕴几何学新方向,奠定近代微分几何学的基础.

1828 • 格林(英)《论数学分析在电磁理论上的应用》出版,其中引入位势概念,开创位势理论,得出格林公式.

• 普吕克尔(德)《解析几何的发展》第 I 卷出版(第 II 卷 1831 年出版),其中证明普吕克尔公式.

1829 • 柯西《微分法讲义》出版.

• 雅可比(德)《椭圆函数论新基础》出版,开创椭圆函数理论及应用的新时期.

• 罗巴切夫斯基发表《论几何基础》,这是最早出版的非欧几何文献.

• 斯图姆(法)向法国科学院提交论文,证明斯图姆定理和代数方程数值求解方法.
• 伽罗华(法)向法国科学院呈交第一篇方程论论文.
• 狄利克雷(德)论傅立叶级数的收敛性.
• 柯西首先求矩阵的本征值.

1830 • 皮科克《代数通论》出版,强调形式的永恒性原理,使代数与方程论分离.
• 伽罗华向法国科学院呈交第二篇方程论论文.

1831 • 不列颠科学促进会成立.
• 伽罗华向法国科学院呈交第三篇方程论论文.
• 泽贝尔(德)建立三元二次型理论,高斯在评论时首先引入几何方法.

1832 • 史坦纳(瑞士)《几何图形相关性的系统发展》出版,通过射影生成法再建射影几何学.
• 雅可比提出阿贝尔积分的反演问题.
• 波耶(匈牙利)发表绝对几何学.
• 伽罗华去世前写出他的理论总结.

1833 • 勒让德总结平行公设的 12 个错误证明.
• 巴贝奇开始设计分析机.
• 拉梅(法)引入一般的曲纹坐标系.
• 刘维尔(法)证明一般黎卡提方程的解不可能用初等函数表出.

1834 • 雅可比在哥尼斯堡大学首先采用新型数学讨论班制度.
• 哈密尔顿(爱尔兰)发表《动力学一般方法初论》(《再论》于 1835 年发表)及《原先应用于光学的一般数学方法在动力学上的应用》,引入哈密尔顿函数,建立哈密尔顿动

力学.

1835 • 格林把位势理论推广到 n 维.

• 波瓦松《热的数学理论》出版.

• 凯特莱(比利时)《人体测量学》出版.

1836 • 刘维尔创办法国的《纯粹与应用数学杂志》,并任主编达40年之久.

• 斯图姆和刘维尔研究二阶线性常微分方程边值问题,开创斯图姆—刘维尔理论.

1837 • 狄利克雷引入通用函数定义.

• 狄利克雷引入 L 函数,证明一般算术数列中素数无穷,从而开创解析数论.

• 刘维尔证明不存在公式能把椭圆积分表为初等函数.

• 文策尔(法)证明用尺规三等分任意角及倍立方体的不可能性.

• 沙勒(法)《几何方法的起源与发展历史概述》出版.

• 波瓦松《概率研究》出版.

1839 • 《剑桥与都柏林数学杂志》创刊.

1840 • 高斯建立位势理论.

• 狄利克雷建立二元二次型类数公式.

1841 • 布尔(英)开创不变式理论.

• 雅可比引入函数行列式.

• 外尔斯特拉斯以幂级数建立函数论,认识到一致收敛的必要性(1896 年发表).

1842 • 雅可比在哥尼斯堡大学讲授的动力学课程中发展哈密尔顿的动力学思想,最终得出哈密尔顿—雅可比动力学体系,他的《动力学讲义》由克莱布什编辑,于 1866 年出

版.

- 柯西引入极限演算即优函数方法,证明微分方程的存在性定理.
- 外尔斯特拉斯引入解析开拓及自然边界概念(1894 年发表).

1843
- 哈密尔顿引入四元数.
- 凯雷(英)开始研究不变式论.
- 罗朗(法)引入罗朗展开.

1844
- 格拉斯曼(德)《线性延量论》出版,建立纯形式的几何演算,预示向量分析的建立.
- 刘维尔首次构造超越数并证明丢番图逼近的最初定理,开创了超越数论及丢番图逼近论.
- 柯西研究置换群理论.
- 布尔引进算符演算.

1845
- 凯雷引进非结合八元数,并开创 n 维解析几何学,开始超空间理论研究.
- 斯托克斯(英)提出粘性流体方程.

1846
- 伽罗华的遗稿首次公开发表.
- 切贝舍夫(俄)证明弱大数定律.
- 狄利克雷证明数域的单位定理.

1847
- 布尔《逻辑的数学分析》出版.
- 德 • 摩根(英)《形式逻辑出版》.
- 史陶特(德)《位置几何学》出版.
- 汤姆逊(英)引入变分原理,狄利克雷在稍后的讲课中引入同样的原理,后来被称为狄利克雷原理.
- 库默尔(德)引进分圆整数及理想因子,并对正则整数证

明费尔马大定理.

• 斯托克斯讨论一致收敛性,塞德尔(德)1848 年独立发表.

• 李斯亭(德)《拓扑学引论》出版.

• 基尔霍夫(德)发表电路公式.

1848 • 威尔布兰姆(英)发现傅立叶级数的吉布斯现象.

1849 • 凯雷开始三阶曲面的研究,特别证明其上存在 27 条直线.

• 塞雷(法)《高等代数教程》出版.

1850 • 普伊索(法)提出普伊索展开.

• 埃尔米特(法)建立多元二次型的理论.

• 库默尔建立分圆域类数公式.

1851 • 黎曼(德)的博士论文开创复变函数几何理论.

• 波尔查诺《无穷的悖论》在他去世后出版,预示 G·康托尔的无穷理论,特别是无穷集合可与其子集一一对应.

1852 • 西尔维斯特(英)研究型论,提出二次型惯性定律.

• 沙勒《高等几何通论》出版.

1853 • 黎曼关于傅立叶级数的就职论文提出黎曼积分的概念.

1854 • 黎曼就职讲演《作为几何基础的假设》定义流形,发展高维内蕴几何学(1868 年出版).

• 布尔《思维规律的研究》出版.

• 贝拉维蒂斯(意)《等当量理论》出版,预示向量演算及逆矢径变换理论.

• 凯雷定义群.

• 斯托克斯证明斯托克斯定理.

1856 • 外尔斯特拉斯发表阿贝尔函数论论文,解决超椭圆积分

反演问题,整个理论1869年完成(部分于1849年、1854年发表).

- 史陶特《对位置几何学的贡献》出版.

1857 • 黎曼《阿贝尔函数论》发表,引入 θ 函数理论.

- 黎曼《超几何级数论》发表.

1858 • 黎曼引入黎曼方法解波动方程的初值问题.

- 凯雷定义矩阵,发展其理论.
- 埃尔米特、布廖斯奇(意)、克洛耐克等分别独立用椭圆模函数解五次方程.
- 莫比乌斯和李斯亭分别独立发现单侧曲面.

1859 • 黎曼关于 ζ 函数的论文发表,其中提出黎曼猜想.

- 凯雷在关于不变式论的第V篇论文中表明,任何平面图形的度量几何都可以看成关于绝对(图形)的射影关系.

1860 • 布尔《有限差分法通论》出版.

1861 • 黎曼的"巴黎之作"发展二次微分形式理论(1876年出版).

- 斯密司(英)引入不变因子及初等因子.
- 马蒂厄(法)引入多重置换群.
- 李斯亭用正规形式表示曲面.

1862 • 克雷莫纳(意)《平面曲线的几何理论导引》出版.

- 庞塞莱《分析和几何的应用》出版.

1863 • 克雷莫纳引入平面图形的双有理变换,开创意大利代数几何学派.

- 莫比乌斯发表《初等相关性理论》,分类闭曲面及各种变换.

1864 • 沙勒发展特征理论,开创计数几何学.

- 库默尔引进具有 16 个奇点的四次曲面(后来被称为库默尔曲面).
- 洛赫(德)完成代数曲线黎曼—洛赫定理的证明.
- 克莱布什应用黎曼理论于代数曲线,开创代数几何学的新方向,1866 年同高尔丹(德)证明亏格的双有理不变性.
- 李普希茨(德)引入李普希茨条件.

1865 • 伦敦数学会建立,开始出版《会报》.

1866 • 富克斯(德)建立复域 n 阶线性微分方程的富克斯理论.
- 克莱布什和高尔丹《阿贝尔函数论》出版.
- 哈密尔顿《四元数原理》出版.

1867 • 汉克尔(德)《复数及其函数讲义》出版.
- 若尔当(法)引入运动群概念.

1868 • 黎曼 1854 年的就职演说发表.
- 赫姆霍茨(德)发表《论作为几何学基础的事实》,把黎曼的思想建立在物理的考虑之上.
- 贝尔特拉米(意)提出第一个非欧几何模型.
- 贝尔特拉米发表《常曲率空间的基本理论》.
- 普吕克尔《新几何学》第Ⅰ卷出版(第Ⅱ卷由克莱因编辑,1869 年出版),开创线几何学.
- 高尔丹证明二元整不变式的有限基定理.
- 克莱布什研究代数曲面.
- 外尔斯特拉斯研究双线性型.
- 克莱布什及卡尔·诺意曼(德)创办《数学年刊》.
- 数学文摘杂志《数学进展年报》出版.

1869 • 克里斯托菲尔(德)引入克里斯托菲尔记号,研究微分二

次型的变换.

• 李普希茨(德)解决微分二次型的变换问题.

• 施瓦茨(德)提出反射原理.

1870 • 若尔当《置换论及代数方程论》出版.

• 外尔斯特拉斯提出狄利克雷原理的反例.

• 施瓦茨提出交错法解狄利克雷问题.

• 诺意曼(德)提出算术平均法解狄利克雷问题.

• 克洛耐克(德)证明阿贝尔群的结构定理.

• 托麦(德)首先对柯西二元连续函数定理给出一个反例.

• B·皮尔斯(美)《线性结合代数》发表.

1871 • 克莱因(德)发展凯雷的结果,把度量几何(包括非欧几何)归结为射影几何的特殊情形.

• 贝蒂(意)引入重要的拓扑不变量——贝蒂数.

• 戴德金出版《数论讲义》第2版,附录中引入理想的概念,系统建立代数数论.

1872 • 法国数学会成立.

• 克莱因提出"埃尔兰根计划".

• 戴德金《连续性与无理数》出版,建立实数理论.

• G·康托尔(德)用柯西序列构造实数理论.

• 梅莱(法)用有理数的收敛序列定义实数.

• 外尔斯特拉斯的实数理论由柯萨克发表.

• 海涅(德)发表实数理论.

• 西洛(挪威)证明西洛定理.

• 迈耶(德)提出变分法的迈耶问题.

1873 • G·康托尔开创集合论.

• 埃尔米特证明 e 是超越数.

• 麦克斯韦(英)《电磁通论》出版.

• 克里福德(英)引入拟四元数.

1874 • S·李(挪威)发表变换群理论.

• 布瑞尔及M·诺特(德)发表《论代数函数及其在几何上的应用》,开创代数几何的新方向.

• 克莱因研究闭曲面的拓扑.

1875 • 柯瓦列夫斯卡娅(俄)证明柯西—柯瓦列夫斯卡娅定理.

• 达尔布(法)引入达尔布和,发展积分理论.

1876 • 外尔斯特拉斯证明整函数无穷乘积表示定理及亚纯函数可表为整函数之商,开创整函数及亚纯函数理论.

1877 • 瑞利(英)《声音理论》出版.

• 米塔格-莱夫勒(瑞典)证明米塔格-莱夫勒定理.

• 希尔(美)求希尔方程的周期解.

• 克里斯托菲尔研究波动方程的间断解.

1878 • 迪尼(意)《实变函数论基础》出版,这是第一部将数学分析建立在实数论基础上的著作.

• 克里福德引入克里福德代数.

• 弗罗宾尼乌斯(德)证明实系数线性结合代数的定理.

• 弗罗宾尼乌斯得出矩阵等价的充要条件,并证明凯雷-哈密尔顿定理.

1879 • 毕卡(法)证明毕卡大定理,开创值分布的方向.

• 舒伯特(德)《计数几何的演算》出版.

• 弗雷格(德)《概念文字》出版.

1881 • 庞加莱开始发表自守函数理论,并发表微分方程定性理论.

• 若尔当引进有界变差函数概念.

- 吉布斯(美)散发《向量分析原理》小册子,向量分析开始普及.

1882
- 米塔格-莱夫勒创办《数学学报》.
- 戴德金及韦伯发表《单变量代数函数论》,建立代数函数论的代数方向.
- 克洛耐克发表《代数量的算术理论概要》,建立除子理论,开创代数函数论的算术方向.
- 林德曼(德)证明 π 是超越数,从而彻底否定解决用尺规化圆为方的问题.
- 帕什(德)《新几何学讲义》出版.
- 内托(德)《置换理论及其在代数中的应用》出版.
- M·诺特研究空间代数曲线.
- 荷尔德(德)引入发散级数求和方法.
- 若尔当《分析教程》第一卷出版,1893年第二版完全修订.
- 杜·布瓦瑞蒙(德)《一般函数论》出版.
- 韦伯及冯·代克(德)定义并研究抽象群.
- 沃隆涅斯(意)推广射影几何到高维.

1883
- G·康托尔《一般集合论基础》出版.
- 弗洛凯(法)证明具有周期系数 n 阶线性微分方程周期解的存在性.
- 克莱因及庞加莱独立证明代数曲线可用自守函数单值化,但均不完全.

1884
- 克莱因《二十面体群与五次方程论讲义》出版.
- 弗瑞格《算术基础》出版.

1885
- 施瓦茨开始解 $\triangle u+\zeta f(x,y)u=0$ 的特征值问题.

- 外尔斯特拉斯证明有界区间上连续函数可被多项式一致逼近.

1886 • 庞加莱引进渐近级数.
- 韦伯证明克洛耐克—韦伯定理.
- 杜·布瓦瑞蒙发现连续函数,其傅立叶级数在某些点发散.

1887 • 达尔布《曲面的一般理论讲义》第Ⅰ卷出版(第Ⅱ卷 1889 年,第Ⅲ卷 1894 年,第Ⅳ卷 1896 年).
- 里奇(意)发表协变微分法.
- 若尔当《分析教程》第三卷出版,首次提出若尔当曲线定理.
- 沃尔泰拉(意)引入线函数概念.
- 弗罗宾尼乌斯证明每个有限群都有到自身的置换表示,并用四个公理定义抽象群.

1888 • 基灵(德)分类复单李代数.
- 戴德金《数是什么,数应当是什么》出版,建立自然数理论及公理系统.
- S·李及恩格尔(德)《变换群理论》第一卷出版(第二卷 1890 年,第三卷 1893 年).
- 美国数学会的前身纽约数学会成立.

1889 • 皮亚诺(意)发表自然数公理.
- 杜·布瓦瑞蒙用特征线方法分类一般二阶线性齐次偏微分方程.
- 荷尔德证明群论的若尔当—荷尔德定理.

1890 • 德国数学家联合会成立,次年开始发行《德国数学家联合会年报》.

- 希尔伯特(德)证明不变式论的有限基定理.
- 皮亚诺引进皮亚诺曲线.
- 施罗德(德)《逻辑代数讲义》第一卷出版.

1891
- G·康托尔提出对角线方法.
- 沃隆涅斯《高维几何基础》出版.
- 韦伯提出类域的概念.
- 闵可夫斯基(德)用几何方法解二次型简约问题.

1892
- 庞加莱《天体力学的新方法》开始出版.
- 李雅普诺夫(俄)建立微分方程稳定性理论.
- 帕德(法)提出帕德逼近.
- 亥维塞德(英)系统提出算符演算.
- 法诺(意)给出射影几何学的第一组公理系统.

1893
- 希尔伯特证明零点定理.
- 卡斯泰努沃(意)肯定解决代数曲面的吕略特问题.

1894
- 庞加莱证明 $\Delta u + \lambda u = f$ 所有特征值的存在性.
- 斯蒂尔捷斯(荷兰)建立连分式理论,其中提出斯蒂尔捷斯积分.
- 比安奇(意)《微分几何教程》首先使用微分几何一词.
- 沃隆涅斯《高维几何学纲要》出版.

1895
- G·康托尔发表《对超穷集合论的贡献》.
- 庞加莱开始发表系统的组合拓扑学论文.
- 弗罗宾尼乌斯建立有限群的特征标理论,开创群表示论.
- 韦伯《代数教程》第一卷出版(第二卷 1896 年出版,第二版 1898—1899 年出版).
- 皮亚诺《数学公式》开始出版,书中通过符号逻辑及公理

化建立数学体系.

1896 • 阿达马(法)及瓦莱-布桑(比利时)分别独立证明素数定理.

• 闵可夫斯基《数的几何》出版,开创数之几何新领域.

• 卡斯泰努沃刻画有理代数曲面.

• 沃尔泰拉建立积分方程理论.

• 切萨洛(意)《内蕴几何讲义》出版.

1897 • 第一届国际数学家大会在瑞士苏黎世召开.

• 伯恩塞德(英)《有限阶群论》出版.

• 毕卡、西马特(法)《二元代数函数论》第一卷出版(第二卷 1906 年出版).

• 陶贝尔(奥)证明陶贝尔型定理.

• 布拉里-福蒂(意)提出最大序数的矛盾.

1898 • 德国《数学科学百科全书》开始出版.

• 怀特海(英)《普遍代数》出版.

• 保莱尔(法)《函数论讲义》出版.

1899 • 希尔伯特《几何学基础》出版,建立了新的公理理论,掀起新的公理化高潮.

• 皮埃利(意)《论作为假设演绎体系的初等几何》出版.

• G·康托尔区分两种集合以避免矛盾.

1900 • 第二届国际数学家大会在巴黎召开.

• 希尔伯特提出 23 个数学问题.

• 古尔萨(法)证明 f 连续与导数存在已足以刻画解析性,从而外尔斯特拉斯的解析函数论可由柯西—黎曼观点推出.

• 希尔伯特在一定条件下证明狄利克雷原理.

主要参考文献

1 数学百科全书、辞典、类书

1.1 Teubner B G. *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihren Anwendungen*. 6 卷, 23 部. Leipzig, 1898—1935.

1.2 Naas J, Schmid H L. *Mathematisches Wörterbuch*. 2 卷. Akademie Verlag, 1961.

1.3 *Ma*Тема*Т*ическая ЗнЦukΛ*one*ДИя. 5 卷. Совет знцикΛоnевия, 1977—1985.

中译本:数学百科全书. 5 卷. 北京:科学出版社, 1994—2000.

1.4 日本数学会编. 岩波数学辞典. 第一版. 东京:岩波书店, 1954;修订版, 1960;第二版, 1968;第三版, 1985.

英译本: *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. 日文第二版译本(2 卷), 1977;日文第三版译本(4 卷), 1985.

中译本(日文第二版译本):数学百科辞典. 北京:科学出版社, 1984.

2 数学史原始文献

2.1 Smith, David Eugene, ed. *A Source Book in Mathematics*. 2 卷. New York: McGraw-Hill, 1929.

2.2 Struik, Dirk J. *A Source Book in Mathematics*: 1200—1800. Cambridge(Mass): Harvard University Press, 1969.

2.3 Birkhoff, Garrett, ed. *A Source Book in Classical Analysis*. Cambridge(Mass): Harvard University Press, 1973.

2.4 Fauvel, John, Jeremy Gray, eds. *The History of Mathematics: A Reader*. The Open University, Walton Hall, Milton Keynes, 1987.

3 数学文献目录

3.1 Poggendorff, Johann Christian, ed. *Biographish-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exact Naturwissenschaften*. 6 卷, 11 册. J A Barth Leipzig, 1863—1920; Berlin: Verlag Chemie, 1925—1940.

3.2 Müller, Felix. *Führer durch die mathematische Literatur, mit besonderer Berü cksichtigung der historischwichtigen Schriften*. Teubner, Leibzig, 1909.

3.3 Royal Society of London. *Catalogue of Scientific Papers*, 1800—1900. 19 卷. Cambridge: University of Cambridge Press, 1914—1925.

4 数学史及传记工具书

4.1 May, Kenneth O. *Bibliography and Research Manuel of the History of Mathematics*. Toronto: University of Toronto Press, 1973.

4.2 Dauben, Joseph W. *The History of Mathematics from Antiquity to the Present, A Selective Bibliography*. New York: Garland Publishing, 1985.

4.3 Grattan-Guinness, Ivor, ed. *Manuel of Historiography of Mathematics*. 2 卷. London: Routledge, 1994.

4.4 Gillispie, Charles Coulston, ed. *Dictionary of Scientific Biography*. 16 卷. New York: Scribners, 1970—1980.

5 数学通史

5.1 专著

5.1.1 Bourbaki, Nicolas. *Eléments d'historie des mathématiques*. Paris: Hermann, 1960, 1968, 1974.

5.1.2 Cantor, Moritz B. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. 4 卷. Teubner, Leipzig, 1880—1908.

5.1.3 Kline Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972.
中译本:古今数学思想.4 册.上海:上海科学技术出版社,1979—1981.

5.1.4 *ИсТорИя МаТемаТИка*. 3 卷. Hayka, Москва, 1970—1972.

5.2 专著及教科书之间的较可靠的参考著作

5.2.1 Cajori, Florian. *A History of Mathematics*. 第一版. New York: Macmillan, 1893; 第二版, 1919.

5.2.2 Smith, David Eugene. *History of Mathematics*. 2 卷. Ginn and Company, 1923—1925.

5.2.3 Scott J F. *A History of Mathematics*. London: Taylor and Francis, 1958.

中译本: 数学史. 侯德润, 张兰译. 北京: 商务印书馆, 1981.

5.2.4 Becker, Oscar, Hoffman J E. *Geschichte der Mathematik*. Bonn: Athenäum-Verlag, 1951.

5.2.5 Hofmann, Joseph E. *Geschichte der Mathematik*. 3 卷. Walter der Gruyter, 1953—1957.

英译本: *The History of Mathematics*. New York: Philosophical Library, 1956—1959.

5.2.6 Struik, Dirk J. *A Concise History of Mathematics*. 第一版, 1948; 第二版, 1961; 第三版, 1967; 第四版, 1990.

中译本(第一版): 数学简史. 关娴译. 北京: 科学出版社, 1956.

5.2.7 Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*. 第一版. John Wiley, 1968; 修订版, 1989.

5.3 教科书

5.3.1 Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. 第一版, 1953; 第二版, 1964; 第三版, 1969; 第四版, 1976; 第五版, 1983; 第六版, 1990.

中译本(第六版): 数学史概论. 欧阳绛译. 太原: 山西经

济出版社,1993.

5.3.2 Burton D M. *The History of Mathematics*. Newton(Mass): An Introduction Allyn and Bacon, 1985.

5.3.3 Stillwell, John. *Mathematics and its History*. New York: Springer Verlag, 1989.

5.4 其他

5.4.1 Bell E T. *Development of Mathematics*. 第一版. New York: McGraw Hill, 1940; 第二版, 1945.

6 断代史

6.1 古代数学史

6.1.1 van der Waerden B L. *Science Awakening*. 英译本. Arnold Dresden 译. New York: Wiley, 1961.

6.1.2 Gericke, Helmuth. *Mathematik in Antike and Orient*. Berlin: Springer Verlag, 1984.

6.1.3 Gericke, Helmuth. *Mathematik in Abendland*. Berlin: Springer Verlag, 1990.

6.1.4 Neugebauer, Otto. *The Exact Science in Antiquity*. Princeton: Princeton University Press, 1951.

6.1.5 Heath, Thomas. *A History of Greek Mathematics*. 2 卷. Clarendon Press, 1921.

6.1.6 Szabó, Árpád. *The Beginnings of Greek Mathematics*. Boston: D Reidel Dordrecht, 1978.

6.1.7 Юшкевич А П. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. 德译本. Ziegler 译. Basel: Pfalz Verlag, 1964.

6.1.8 Berggren J L. *History of Greek Mathematics, A Survey of Recent Research*. Hist Math, 1984, 11(4).

6.1.9 Schönbeck, Jürgen. *Euklid durch die Jahrhundert*. Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1984.

6.2 近代数学史

6.2.1 Dieudonné Jean ed. *Abrégéd' historie des mathematiques*. 2卷. Paris: Hermann, 1978.

6.2.2 КоΛмогоров А Н, Юшкевич И А П, eds. Математика XIXвека. Hayka, Москва. 第一卷, 1978; 第二卷, 1981; 第三卷, 1987.

英译本(第一卷): *Mathematics of the 19th Century*. Birkhäuser, Basel, 1992.

6.2.3 Klein Felix. *Vorlesungen ü ber die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*. 2卷. Berlin: Springer, 1926—1927.

6.2.4 Dieudonné Jean. *A Panorama of Pure Mathematics*. 英译本. Macdonald I G 译. Bordas: Academic Press, 1982.

7 分科史

7.1 初等数学

7.1.1 Tropfke Johannes. *Geschichte der Elementarmathematik*. 第一版, 1903; 第二版, 1921—1924; 第三版, 1938—1940; 第四版第一卷: 算术与代数. Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke eds. Berlin: Walter de Gruyter, 1980.

7.1.2 Van der Waerden B L. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. New York: Springer Verlag, 1983.

7.2 微积分

7.2.1 Boyer Carl B. *The Concepts of the Calculus, a Critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral*. Columbia University Press, 1939. 重印本: New York: Hafner, 1949.

再版更名为: *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover, 1959.

中译本(重印本): 微积分概念史. 上海师范大学数学系翻译组译. 上海: 上海人民出版社, 1977.

7.2.2 Baron, Margaret E. *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford: Pergamon, 1969.

7.2.3 Edwards C H. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer Verlag, 1979.

中译本: 微积分发展史. 张鸿林译. 北京: 北京出版社, 1987.

7.3 数学分析

7.3.1 Grattan-Guinness Ivor ed. *From the Calculus to Set theory*. London: Duckworth, 1980.

7.3.2 Engelsman S B. *Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation*. Amsterdam: North-Holland, 1984.

7.3.3 Bottazini Umberto. *It Calcolo Sublime, Storia dell' analisi matematica da Euler a Weierstrass*. Editore Boringhieri, Torino, 1981.

英译本: *The Higher Calculus, A History of Real and Complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer, 1986.

7.3.4 Volkert Klaus. *Geschichte der Analysis*. Mannheim: Bibli-

ographisches Institut, 1987.

7.3.5 Grattan-Guinness Ivor. *The Development of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge (MA): MIT Press, 1970.

7.3.6 Goldstine H. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Berlin: Springer, 1980.

7.4 几何学

7.4.1 Boyer Carl B. *History of Analytic geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956.

7.4.2 Coolidge J L. *A History of Geometrical Methods*. Oxford: Oxford University Press, 1940.

7.4.3 Mainzer Klaus. *Geschichte der Geometrie*. Bibliographisches Institut, 1980.

7.4.4 РозенфеЛъд, Борш Абрамович. *ИсТорИя НеевкЛивовоИ ГеомеТрИИ*. Наука Москва, 1976.
英译本: Rosenfeld B A. *A History of Non Euclidean Geometry*. New York: Springer, 1988.

7.4.5 Gray Jeremy. *Ideas of space, Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*. Oxford: Clarendon, 1979; 第二版, 1989.

7.5 数论

7.5.1 Dickson, Leonard Eugene. *History of the Theory of Numbers*. 3卷. Carnegie Institution of Washington, 1919—1923.

7.5.2 Weil, Andre. *Number theory, An Approach through History*. Basel: Birkhäuser, 1984.

7.6 代数学

7.6.1 van der Waerden B L. *A History of Algebra*. New York:

Springer, 1985.

7.6.2 Scholz E. *Geschichte der Algebra*. Mannheim: Bibliographisches Institute, 1991.

7.7 代数几何学

7.7.1 Dieudonné Jean. *History of Algebraic Geometry*. 英译本. Belmont: Wadsworth, 1985.

7.7.2 Brieskorn E, Knörrer H. *Plane Algebraic Curves*. 英译本. Basel: Birkhäuser, 1986.

7.8 其他

7.8.1 Dieudonné Jean. *History of Functional Analysis*. North-Holland: Amsterdam, 1981.

7.8.2 Dieudonné Jean. *History of Algebraic and Differential Topology* 1900—1960. Boston: Birkhäuser, 1989.

7.8.3 Brezinski, Claude. *History of Continued Freactions and Pad'e Approximants*. Berlin: Springer, 1991.

7.8.4 Goldstine H H. *A History of numerical analysis from the* 16*th through the* 19*th century*. Berlin: Springer, 1977.

8 数学社会史著作

8.1 Mehrtens, Herbert ete ed. *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Boston: Birkhäuser, 1981.

8.2 Biermann Kurt-R. *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität*, 1810—1920. Ahademie Verlag, 1973.

8.3 Fang, Joong, Takayama K P. *Sociology of Mathematics and Mathematicians: A prolegomenon*. New York: Paideia Pr Happauge,

1975.

8.4 Lorey, Wilhelm. *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des* 19 *Jahrhunderts*. Teubner, Leipzig, 1916.

8.5 Jahnke, Hans Niels, Michael Otte, eds. *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*. Reidel, Dordrecht. 1981.

[General Information]
书名=近代数学史
作者=胡作玄著
页数=752
SS号=12377954
DX号=
出版日期=2006.12
出版社=山东教育出版社